

DOI: 10.3901/JME.2013.15.062

考虑自旋状态下弹流润滑的球轴承 力学特性计算方法研究*

郭凯^{1,2} 苑士华¹ 张玉言¹ 王晓力¹

(1. 北京理工大学机械与车辆学院 北京 100081;

2. 上海汽车集团股份有限公司技术中心 上海 201804)

摘要: 角接触球轴承中的滚动体产生自旋运动, 自旋状态下的弹流润滑(Elastohydrodynamic lubrication, EHL)性能对轴承的力学特性产生一定的影响。建立了考虑自旋运动的 EHL 模型, 研究自旋运动对载荷分布和油膜形状的影响。利用刚体中心膜厚与接触载荷之间的关系, 实现了 EHL 模型与轴承力学模型之间的耦合, 从而提出了考虑自旋状态下弹流润滑的球轴承力学特性计算方法。与传统的基于 Hertz 接触理论的计算方法进行了对比分析, 结果显示两者在接触载荷和接触角的计算方面比较接近, 但对轴承变形、接触位移及膜厚分布的计算差别较大, 基于 EHL 计算方法所得的轴承变形小于基于 Hertz 接触方法的计算结果, 且转速越高差别越明显, 考虑自旋运动后最小膜厚不再随轴承转速升高而单调增长, 当转速达到一定程度后最小膜厚开始下降。

关键词: 自旋 弹流润滑 球轴承 力学特性

中图分类号: TH133

Study on the Calculation Method of Ball Bearing Mechanical Characteristics Considering Elastohydrodynamic Lubrication with Spinning

GUO Kai^{1,2} YUAN Shihua¹ ZHANG Yuyan¹ WANG Xiaoli¹

(1. School of Mechanical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081;

2. SAIC Motor Technical Center, Shanghai 201804)

Abstract: The spinning occurs in angle-contact ball bearings. The elastohydrodynamic lubrication (EHL) with spinning affects the mechanical characteristics of rolling bearings. The EHL model considering spinning is built, and the influence on load distribution and oil film shape is investigated. The coupling model of the EHL with spinning and the bearing mechanics is set up based on the relationship between contact force and mutual approach. The mechanical characteristics based on the proposed method are compared with the conventional method based on Hertz theory. The calculation results show that the contact forces and contact angles are relatively close, but the bearing deformation, contact displacement and film distribution are significantly different. The bearing deformation considering EHL is smaller than that using Hertz hypothesis, and the difference increases with bearing speed. The minimum film thickness considering spinning no longer increases with bearing speed, the minimum film thickness begins to decrease when the bearing speed increases to a certain value.

Key words: Spinning Elastohydrodynamic lubrication Ball bearing Mechanical characteristics

0 前言

滚动轴承广泛应用于各种旋转机械系统, 轴承

的力学特性分析是研究轴承温升、寿命和系统动态性能的基础。随着轴承转速的不断提高, 静力学方法已不再满足轴承力学特性分析的需求, GUPTA 等^[1-2]相继提出了动力学分析方法, 国内学者也在姿态角的确定等方面对拟静力学方法进行了一定的改进^[3-5]。虽然(拟)动力学方法比拟静力学方法考虑的

* 国家重点基础研究发展计划资助项目(973 计划, 2011CB706602)。
20120211 收到初稿, 20130115 收到修改稿

自由度更多,但是在接触载荷、变形、膜厚及摩擦牵引力的计算方面,仍是基于 JONES^[6]所建立的拟静力学模型。JONES 模型在计算中基于 Hertz 接触假设,而油润滑轴承中接触区通常处于弹流润滑(Elastohydrodynamic lubrication, EHL)状态,并且角接触球轴承中滚动体在接触区产生自旋滑动^[7],自旋状态下的弹流润滑特性与 Hertz 接触特性存在明显差别^[8-9]。因此,目前的轴承力学模型中对自旋及弹流润滑的考虑不够充分。

作者首先建立了自旋状态下的弹流润滑数学模型并进行了数值求解,得到了油膜分布情况随载荷、速度、自旋等因素的变化规律,进而拟合了刚体中心膜厚的经验公式,并将油膜中心膜厚和最小膜厚的计算结果与现有公式进行了对比验证。利用刚体中心膜厚公式建立了自旋状态下弹流润滑的接触载荷-变形关系,并将之耦合到球轴承力学模型中,实现了考虑自旋运动及弹流润滑的球轴承力学特性分析。运用该方法与传统的 JONES 拟静力学方法进行了对比计算,分析了两对轴承接触载荷、变形及膜厚等特性的计算差别。

1 考虑自旋的弹流润滑建模与分析

EHL 与 Hertz 接触理论的本质区别在于是否考虑润滑油膜的作用。润滑油膜的存在使 EHL 状态下的压力分布和变形状态与 Hertz 接触时明显不同,如图 1 所示。通常定义如下参数以描述 EHL 油膜及变形特征: h_c 为油膜中心膜厚; h_{\min} 为油膜最小膜厚; h_0 为刚体中心膜厚; δ 为接触中心的弹性变形。

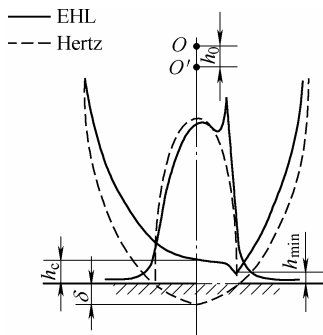


图1 EHL 与 Hertz 接触示意图

其中, h_0 的物理意义为接触体几何中心的移动距离,是轴承力学建模过程中的关键参数(后文中详细论述)。 h_0 与 δ 、 h_c 之间存在如下关系

$$h_0 = \delta - h_c \quad (1)$$

Hertz 接触时,由于 h_c 为 0,则 h_0 与 δ 的数值相同,正因如此, JONES 中直接利用 δ 以简化建模过程。但若考虑弹流润滑作用, h_0 与 δ 并不相同,

而是受到载荷、速度及自旋等方面的影响,因此,本文将利用自旋弹流润滑状态下的 h_0 建立球轴承的力学模型。

1.1 球轴承中的自旋运动

球轴承中的运动学关系如图 2 所示,其中 ω_i 为轴承内圈角速度, ω_m 为滚动体公转角速度, ω_r 为滚动体自转角速度, α 为接触角, β 为滚动体自转轴线与轴承轴线之间的夹角,称为姿态角,下标 i 代表内圈, o 代表外圈。由图示关系可知,滚动体自转轴线与接触椭圆法线之间存在非垂直夹角,从而在接触法线方向产生相应的角速度分量,即滚动体与套圈之间沿接触法线方向存在相对旋转运动,称为自旋运动, ω_{si} 、 ω_{so} 即分别为滚动体在内、外圈上的自旋角速度。

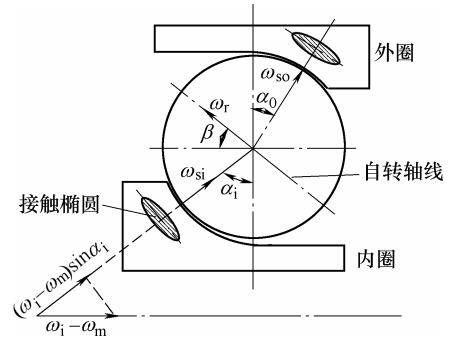


图2 球轴承中的自旋运动

由几何关系可得自旋角速度的具体表达为

$$\begin{cases} \omega_{si} = \omega_r \sin(\beta - \alpha_i) - (\omega_i - \omega_m) \sin \alpha_i \\ \omega_{so} = \omega_r \sin(\beta - \alpha_o) + \omega_m \sin \alpha_o \end{cases} \quad (2)$$

因此,自旋运动是角接触球轴承的典型特点,其对弹流润滑特性及轴承力学特性产生一定影响。

1.2 自旋弹流数学模型

结合角接触球轴承中自旋运动的特点,建立了考虑自旋运动的弹流润滑数学模型。将套圈与滚动体接触的自旋弹流润滑副等效为无限大平面与椭球的接触,如图 3 所示。

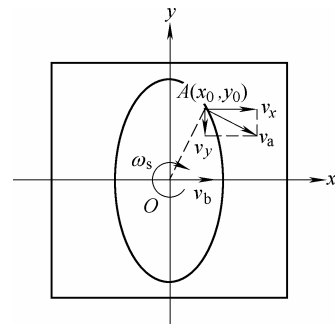


图3 自旋运动等效模型

图3中平面绕O点处法线方向以自旋角速度 ω_s 做旋转运动,椭球以滚动体与套圈的平均滚动速度

v_b 滚动, 坐标 y 、 x 分别为接触椭圆长、短半轴方向, v_a 为接触区内某点 $A(x_0, y_0)$ 的卷吸速度, v_x 、 v_y 为 v_a 在 x 、 y 方向的卷吸速度分量。

由图 3 所示关系可将 v_x 、 v_y 表达为

$$\begin{cases} v_x(x_0, y_0) = \frac{\omega_s y_0}{2} + v_b \\ v_y(x_0, y_0) = -\frac{\omega_s x_0}{2} \end{cases} \quad (3)$$

卷吸速度在任意方向的牛顿流体 Reynolds 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 12 \frac{\partial}{\partial x} (v_x \rho h) + 12 \frac{\partial}{\partial y} (v_y \rho h) \quad (4)$$

式中, p 为油膜的压力, η 为油液动力黏度, ρ 为油液密度。油膜厚度方程为

$$h(x, y) = h_0 + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \lambda)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\lambda)^2}} d\xi d\lambda \quad (5)$$

式中, R_x 、 R_y 分别为沿 x 轴、 y 轴方向的当量曲率半径, E' 为综合弹性模量, Ω 为接触区域, ξ 、 λ 为积分变量。载荷平衡方程为

$$F = \iint_{\Omega} p(x, y) dx dy \quad (6)$$

式中, F 为外载荷。黏压关系采用 ROELANDS 黏压公式^[10]

$$\begin{cases} \eta = \eta_0 \exp\{(\ln \eta_0 + 9.67)[(1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^z - 1]\} \\ z = \alpha_p / [5.1 \times 10^{-9} (\ln \eta_0 + 9.67)] \end{cases} \quad (7)$$

式中, η_0 为油液在常压下的动力黏度, α_p 为黏压系数。密压关系采用 DOWSON-HIGGINSON 密压公式

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{0.6p}{1 + 1.7p} \right) \quad (8)$$

式中, ρ_0 为油液在常压下的密度。

1.3 数值计算与分析

对式(3)~(6)进行数值求解, 采用快速傅里叶变换方法计算弹性变形, 采用线性松弛的方法进行压力循环迭代, 并根据载荷平衡方程对刚体中心膜厚进行修正, 直至压力和载荷均满足收敛精度 1×10^{-5} 。图 4 为 $F=200$ N, $v_b=5$ m/s, $\omega_s=0 \sim 500$ rad/s 变化时, $x=0$ 截面上的油膜厚度分布。由图 4 可见受自旋运动的影响, 油膜厚度沿 $y=0$ 截面不再对称, 最小膜厚随自旋角速度的增加而减小, 并处于卷吸速度最小的位置。而中心膜厚几乎不变, 原因是当

自旋运动中心与接触椭圆中心重合时, 接触中心处的卷吸速度不变。

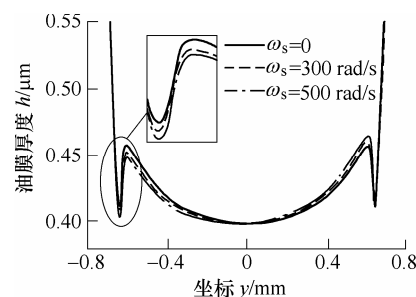


图 4 $x=0$ 截面上的油膜厚度分布

为便于将弹流计算结果耦合到轴承动力学计算中, 作者结合滚动轴承工作载荷、速度、自旋角速度等的大致范围, 对不同参数下的弹流润滑进行数值计算, 进而拟合出该范围内的刚体中心膜厚、油膜中心膜厚和最小膜厚的经验公式。部分参数的取值范围: 椭圆率 $\lambda_e=1.0 \sim 9.5$; $v_b=1 \sim 40$ m/s; $F=200 \sim 10\,000$ N; $\omega_s=0 \sim 500$ rad/s。为了便于分析计算, 对以下参数进行了归一化, 其具体表达为

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{h}{R_x} & \bar{v} &= \frac{v \eta_0}{E' R_x} & \bar{F} &= \frac{F}{E' R_x^2} \\ \bar{\omega}_s &= \frac{\omega_s \eta_0}{E'} & G &= \frac{\alpha_p}{E'} \end{aligned} \quad (9)$$

式中, \bar{h} 、 \bar{v} 、 \bar{F} 、 $\bar{\omega}_s$ 分别为油膜厚度、速度、载荷、自旋角速度的量纲一形式, G 为量纲材料参数。通过大量计算拟合出各量纲一油膜厚度公式的具体表达分别如下。

(1) 刚体中心膜厚

$$\begin{aligned} \bar{h}_0 &= 1.397 \bar{F}^{0.678} (1 - 1.418 \times 10^{-5} \bar{v}^{0.677}) [1 + 0.155 \times \\ &\exp(-4.443 \times 10^{-5} G)] \lambda_e^{-0.364} [1 - \exp(-2.628 \lambda_e)] \times \\ &(1 + 1.294 \times 10^{19} \bar{\omega}_s^{2.274}) \end{aligned} \quad (10)$$

(2) 中心膜厚

$$\bar{h}_c = 0.769 \bar{v}^{0.67} \bar{F}^{-0.067} G^{0.53} \lambda_e^{0.434} [1 + 1.753 \exp(-0.179 \lambda_e)] \quad (11)$$

(3) 最小膜厚

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\min} &= 8.9 \times 10^{-3} \bar{v}^{0.72} [1 + 1.043 \exp(-664.016 \bar{F})] G^{0.801} \times \\ &\lambda_e^{1.616} [1 + 21.46 \exp(-0.3 \lambda_e)] \times \\ &(1 - 1.31 \times 10^{10} \bar{\omega}_s^{1.024}) \end{aligned} \quad (12)$$

由于本文所用的是式(10)所示刚体中心膜厚, 为了验证拟合公式的准确性, 需要与现有的经验公式进行对比分析。但是目前并未见到考虑自旋运动的刚体中心膜厚公式, 只有不考虑自旋的油膜中心膜厚和最小膜厚公式, 其中公认的比较准确的

是 HAMROCK 和 DOWSON^[11] 给出的经验公式(后文简称 H&D 公式)

$$\begin{cases} \bar{h}_c = 2.69 \bar{v}^{0.67} G^{0.53} \bar{F}^{-0.067} [1 - 0.61 \exp(-0.73 \lambda_c)] \\ \bar{h}_{\min} = 3.63 \bar{v}^{0.68} G^{0.49} \bar{F}^{-0.073} [1 - \exp(-0.68 \lambda_c)] \end{cases} \quad (13)$$

因此, 作者只能对 h_c 和 h_{\min} 的计算结果进行对比, 对比结果如下表所示。可见本文给出的 h_c 计算方法与 H&D 方法的计算结果差别甚微, 从而验证了本文给出的计算公式的正确性, 而由于自旋运动导致 h_{\min} 的计算结果小于 H&D 方法, 也符合前文中的分析结论, 因此利用式(10)~(12)进行油膜厚度的计算是可行的。

表 油膜厚度计算结果对比

接触载荷 F/N	滚动速度 $v_b/(m/s)$	自旋角速度 $\omega_s/(rad/s)$	油膜中心膜厚 $h_c/\mu m$		油膜最小膜厚 $h_{\min}/\mu m$	
			H&D	本文	H&D	本文
500	5	200	0.404 0	0.404 1	0.326 8	0.321 0
500	10	300	0.642 8	0.642 9	0.523 6	0.489 1
500	15	400	0.843 5	0.843 6	0.689 8	0.601 5
1 500	5	200	0.375 4	0.375 4	0.305 4	0.301 6
1 500	10	300	0.597 2	0.597 3	0.483 2	0.465 4
1 500	15	400	0.783 6	0.783 7	0.636 6	0.572 3

2 基于弹流润滑的球轴承力学模型

2.1 载荷平衡关系

滚动轴承中单个滚动体的受力状态如图 5 所示。其中, Q 为法向接触载荷, F_f 为沿接触椭圆长轴方向的切向力, F_c 为离心力, M_g 为陀螺力矩, 下标 j 代表随方位角变化的第 j 个滚动体。

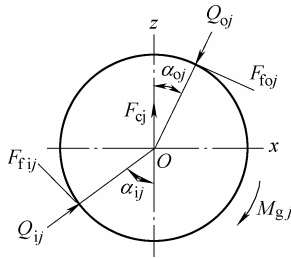


图5 第 j 个滚动体的受力状态

由于沿接触椭圆短轴方向的切向力和保持架作用力等相对接触载荷 Q 小很多, 因此在接触载荷和变形的计算中忽略这些力的影响。由此建立滚动体受力平衡方程

$$\begin{cases} Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - F_{fij} \sin \alpha_{ij} - Q_{0j} \cos \alpha_{0j} + F_{f0j} \sin \alpha_{0j} - F_{cj} = 0 \\ Q_{ij} \sin \alpha_{ij} + F_{fij} \cos \alpha_{ij} - Q_{0j} \sin \alpha_{0j} + F_{f0j} \cos \alpha_{0j} = 0 \\ (F_{fij} + F_{f0j}) R_b - M_{gj} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

式中, R_b 为滚动体半径。

轴承在满足各个滚动体受力平衡的同时, 还需满足接触载荷与外载荷之间的平衡, 由此建立轴承载荷平衡方程

$$\begin{cases} F_a = \sum_{j=1}^z (Q_{ij} \sin \alpha_{ij} + F_{fij} \cos \alpha_{ij}) \\ F_r = \sum_{j=1}^z (Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - F_{fij} \sin \alpha_{ij}) \cos \varphi_j \\ M = \sum_{j=1}^z [(Q_{ij} \sin \alpha_{ij} + F_{fij} \cos \alpha_{ij}) r_{ij} - F_{fij} R_i] \cos \varphi_j \end{cases} \quad (15)$$

式中, F_a 为轴承所受轴向载荷, F_r 为径向载荷, M 为外力矩, R_i 为内滚道曲率半径, r_i 为内滚道曲率中心到轴承轴线的距离, φ 为滚动体方位角。

2.2 变形协调关系

接触载荷、接触角、离心力、陀螺力矩等都与轴承套圈位移和接触位移有关, 需建立轴承套圈位移和接触位移之间的变形协调关系。轴承受载后, 单个滚动体中心位移和套圈位移如图 6 所示, 外圈曲率中心 P_{0j} 固定不动, 内圈曲率中心由 P_{ij} 移到 P'_{ij} , 球中心由 P_{bj} 移到 P'_{bj} 。 d_a 、 d_r 和 θ 分别为内圈的轴向位移、径向位移和角位移, Δd 为滚动体中心与套圈曲率中心之间的距离变化量, α_0 为初始接触角, f 为滚道曲率系数, X_{1j} 、 X_{2j} 、 Y_{1j} 、 Y_{2j} 分别代表图中所示相应两点之间的水平或垂直距离。

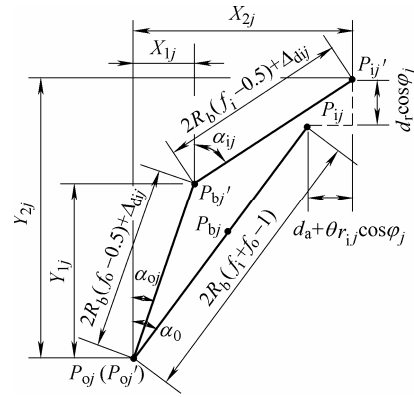


图6 滚动体中心与滚道曲率中心的位置变化

由几何关系可得

$$\begin{cases} X_{1j}^2 + Y_{1j}^2 = [2R_b(f_0 - 0.5) + \Delta d_{0j}]^2 \\ (X_{2j} - X_{1j})^2 + (Y_{2j} - Y_{1j})^2 = [2R_b(f_i - 0.5) + \Delta d_{ij}]^2 \\ X_{2j} = 2R_b(f_i + f_0 - 1) \sin \alpha_0 + d_a + \theta r_{ij} \cos \varphi_j \\ Y_{2j} = 2R_b(f_i + f_0 - 1) \cos \alpha_0 + d_r \cos \varphi_j \end{cases} \quad (16)$$

2.3 接触载荷-变形关系

式(14)、(15)为载荷平衡方程, Q 是未知量; 式(16)为变形协调方程, Δd 是未知量。为使联立求解,

需要建立 Q 与 Δ_d 之间的关系。由图 1 和图 6 可知, Δ_d 与 h_0 的物理意义相同, 因此建立 Q 与 h_0 之间的关系即可。由前文的论述可知, 在 Hertz 接触假设下, $h_0 = \delta$, 而 Q 与 δ 之间满足

$$Q = k\delta^{1.5} \quad (17)$$

式中, k 为接触刚度, 只与接触材料和几何形状有关。因此 JONES 模型中直接采用式(17)建立接触载荷-变形关系。而本文考虑了接触区的自旋运动及弹流润滑特性, 基于第 1.3 节中建立的 h_0 与 Q 之间的关系, 利用 h_0 的取代图 6 中的 Δ_d , 采用式(10)联立式(14)~(16), 从而实现轴承动力学与自旋 EHL 的耦合计算, 采用 Newton-Raphson 方法对式(14)~(16)迭代求解, 可得到接触载荷、接触角、轴承位移和接触位移等特性参数。

3 轴承力学特性计算与比较

将本文模型与基于 Hertz 理论的 JONES 模型进行对比计算。轴承型号为 7210 角接触球轴承, 内径 50 mm, 外径 90 mm, 初始接触角 40° 。轴向载荷 10 kN, 轴承转速 0~15 000 r/min 时接触载荷与接触角变化如图 7、8 所示。

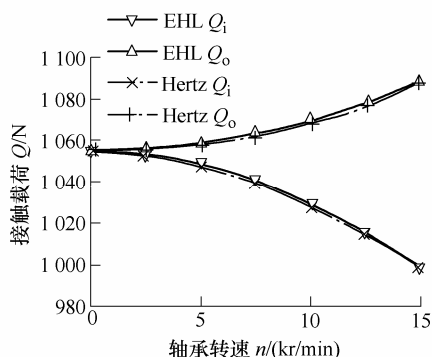


图 7 接触载荷随轴承转速变化比较

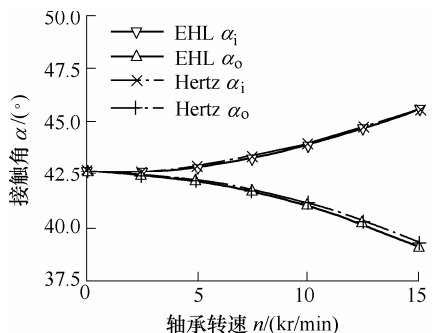


图 8 接触角随轴承转速变化比较

受高速时离心力的影响, 滚动体与内圈接触载荷减小、接触角增大, 与外圈接触载荷增大、接触

角减小。基于 EHL 的方法中接触载荷的计算结果略大, 接触角结果略小, 但差别不甚明显。原因是润滑油膜的存在影响了接触体的变形和位移状态, 而对载荷分布的影响较小, 并且接触载荷 Q 的计算是通过对接应力的积分得到, 从而进一步减弱了弹流润滑作用的影响, 两种方法所建立的载荷平衡方程相同, 因此接触载荷和接触角的计算结果差别不大。

对接触中心位移 Δ_d 和轴承轴向变形 d_a 的结果对比如图 9、10 所示。可见, 两种模型对变形情况的计算差别较大, 基于 EHL 的计算结果比基于 Hertz 的计算结果偏小, 且转速越高偏差越大。原因是低速时弹流润滑作用较弱, EHL 与 Hertz 接触较为相近, 而随着转速的提高, 弹流润滑作用逐渐明显, 使接触变形状态发生较大变化。润滑油膜的存在使滚动体中心实际位移 Δ_d 小于 Hertz 接触状态下的变形 δ , 最终导致 EHL 状态下的轴承轴向变形小于 Hertz 接触状态下的变形。

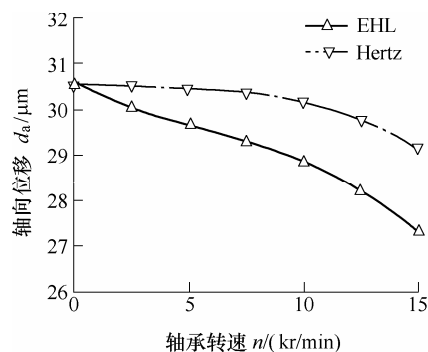


图 9 轴向位移随轴承转速变化比较

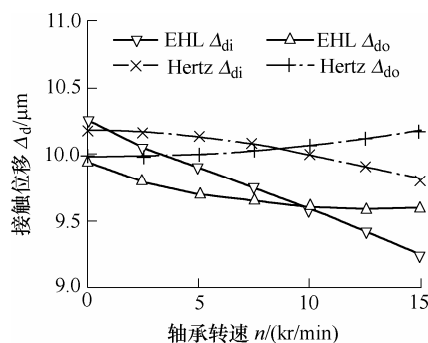


图 10 接触位移随轴承转速变化比较

润滑油膜厚度是决定接触区润滑和摩擦状态的关键, 利用式(11)~(13)对比计算了考虑自旋运动前后的内、外圈接触区中心膜厚与最小膜厚随轴承转速的变化情况, 如图 11、12 所示。由前文的分析可知当自旋轴线与接触椭圆中心重合时, 自旋角速度对中心膜厚无影响, 因此考虑自旋前后中心膜厚的计算结果一致。但是最小膜厚的计算差别较大, 且随转速提高而更加明显。原因是轴承转速升高后,

自旋角速度随之增大, 自旋运动导致最小卷吸速度降低, 最小膜厚变薄。在不考虑自旋效应时, 最小膜厚随轴承转速提高而增大, 但考虑自旋运动后, 最小膜厚变化存在拐点, 转速增大到一定程度后最小膜厚下降, 对接触区摩擦状态产生不利影响。

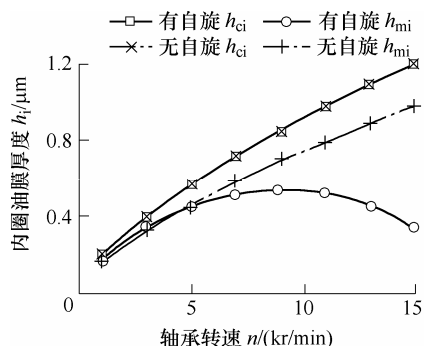


图 11 内圈油膜厚度随轴承转速的变化

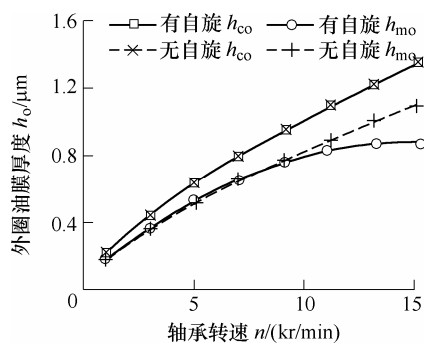


图 12 外圈油膜厚度随轴承转速的变化

4 结论

(1) 通过对自旋状态下弹流润滑的数值计算, 拟合了刚体中心膜厚、油膜中心膜厚和最小膜厚的经验公式, 并与传统公式对比验证了本文公式的正确性。

(2) 将刚体中心膜厚公式耦合到轴承力学模型中, 提出了考虑自旋状态下弹流润滑的轴承力学特性计算方法, 并与传统的基于 Hertz 理论的计算方法进行了比较。结果显示两者在轴承接触载荷和接触角的计算方面差别不大, 但对轴承变形的计算差别较为明显。基于 EHL 方法的变形计算比基于 Hertz 方法的结果偏小, 且转速越高差别越大。

(3) 考虑自旋运动后, 最小膜厚不再随轴承转速升高而单调增长, 当转速升高到一定程度后最小膜厚开始下降, 高速轴承的摩擦状态分析需要考虑自旋运动的影响。

参 考 文 献

- [1] GUPTA P K. Advanced dynamics of rolling elements[M]. New York: Springer Verlag, 1984.
- [2] MEEKS C R. Ball bearing dynamic analysis using computer methods, Part I: Analysis[J]. Journal of Tribology, 1996, 118(1): 52-58.
- [3] 邓四二, 李兴林, 汪久根, 等. 角接触球轴承摩擦扭矩特性研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(5): 114-120. DENG Sier, LI Xinglin, WANG Jiugen, et al. Frictional torque characteristic of angular contact ball bearings[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(5): 114-120.
- [4] 丁长安, 周福章, 朱均, 等. 滚道控制理论与滚动体姿态角的确定[J]. 机械工程学报, 2001, 37(2): 58-61. DING Changan, ZHOU Fuzhang, ZHU Jun, et al. Raceway control assumption and the determination of rolling element attitude angle[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(2): 58-61.
- [5] 彭波, 王黎钦, 崔立, 等. 角接触球轴承分析模型的数值求解[J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41(3): 370-374. PENG Bo, WANG Liqin, CUI Li, et al. Numerical solution of analysis model for angular-contact ball bearings[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2009, 41(3): 370-374.
- [6] JONES A B. Ball motion and sliding friction in ball bearings[J]. Journal of Basic Engineering, 1959, 81(3): 1-12.
- [7] HARRIS T A. Rolling bearing analysis[M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 2001.
- [8] DOWSON D, TAYLOR C M, XU Hao. Elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts with pure spin[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 1993, 207(23): 83-92.
- [9] YANG Peiran, CUI Jinlei. The influence of spinning on the performance of EHL in elliptical contacts[J]. Solid Mechanics and Its Applications, 2006, 134: 81-92.
- [10] 温诗铸, 杨沛然. 弹性流体动力润滑[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992. WEN Shizhu, YANG Peiran. Elastohydrodynamic lubrication[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1992.
- [11] HAMROCK B J, DOWSON D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts, Part III: Full flooded results[J]. Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, 1977, 99(2): 427-434.

作者简介: 郭凯, 男, 1986 年出生, 博士。主要研究方向为车辆传动理论与技术。

E-mail: guokai107@163.com

苑士华(通信作者), 男, 1958 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为车辆传动系统理论与技术。

E-mail: yuanshihua@bit.edu.cn