DOI：10.3901/JME.2014.19.166

基于压缩索引的二阶四面体网格等值面抽取方法*

刘鹤丹 [1, 2, 3]　王成恩 [1, 2, 3]
(1. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室　沈阳　110819；
2. 东北大学辽宁省复杂装备多学科设计优化技术重点实验室　沈阳　110819；
3. 东北大学信息科学与工程学院　沈阳　110819)

摘要：基于二阶 10 节点四面体网格单元可视化过程中存在的等值面拓扑、三角等值面片结果的计算、存储及传输代价问题，提出了基于压缩索引的等值面抽取方法。为真实表现网格单元内部等值面片拓扑结构并克服其二义性，分析并简化了二阶 10 节点四面体单元等参插值函数，提出顶点、棱边、表面间的关系矩阵，分别在网格单元棱边、表面及体内计算提取可以表现等值面几何拓扑特征的等值点，设计了关键点匹配规则；结合三类插值点间的逻辑关系制定了令拓扑准确唯一的等值面片三角化及优化策略，设计了辅助三角化、图像优化及绘制过程的可分裂式三角面片压缩索引结构，提出了针对初始面片及优化后面片存储结构的分裂策略。试验结果证明，该方法可准确描述及确定二阶四面体网格单元内部等值面片的唯一拓扑结构，基于压缩索引结构的计算及优化分裂方法简捷有效，可适应不同的精度要求，大幅降低了计算与绘制传输中产生的代价。

关键词：可视化；二阶 10 节点四面体；等值面抽取；关系矩阵；压缩索引结构
中图分类号：TP391

Isosurface Extraction Method Based on Compressed Index in Second-order Tetrahedron

LIU Hedan[1, 2, 3]　WANG Chengen[1, 2, 3]
(1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819；
2. Liaoning Province Key Laboratory of Multidisciplinary Optimal Design for Complex Equipment, Northeastern University, Shenyang 110819；
3. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819)

Abstract：In order to solve the problem of isosurface topologies and the cost of triangular patches computing, storage and transmission during the visualization process in second-order 10-node tetrahedrons, the isosurface extraction method based on compressed index is proposed. To reflect the real topology of the isosurface and overcome the ambiguity, the method analyzes and simplifies the parameter interpolation function of second-order 10-node tetrahedron, proposes the matrixes of relationships between vertex, surface and cube, calculates accurate contour points in edge, extracts surface and mesh key points which can performance the geometric topological characteristics of isosurface in mesh grids, designs a key point matching rule; based on the logical relationship among the three types of interpolation critical point, it develops the isosurface triangulation and optimization rules which have accurate and unique topologies，and the split-style compress index structure of triangle to triangulation, image optimization and drawing. The experiments show that the method can describe the isosurface accurately and define an unique geometry topology within second-order tetrahedral mesh grid, the calculation and splitting optimization method based compressed index structure is simple and effective, it has the adaptability to different accuracy requirements, and can reduce the cost of computation, drawing and transmission dramatically.

Key words：visualization；second-order 10-node tetrahedron；isosurface extraction；ralationship matrix；compressed index structure

0　前言

科学计算可视化的核心是三维数据场可视化[1]，等值面是三维标量场数据的基本表达形式。LORENSEN 等[2]于 1987 年提出了基于 8 节点六面体体元的典型面绘制方法 Marching Cubes 法 (以下简称 MC 法)；1991 年，DOI 等[3]在 MC 算法基础上将六面体网格单元剖分为四面体网格单元，提出了不会产生二义性并能保证拓扑正确的 Marching Tetrahedron 算法(以下简称 MT 法)；NATARAJAN [4]

* 国家高技术研究发展计划资助项目(863 计划，2009AA04Z104)。
20131105 收到初稿，20140711 收到修改稿

于 1994 年发现了体二义性并提出了最初的解决办法；LOPES 等[5]引入了肩点和变形点，较 MC 算法更准确地描述了 8 节点六面体网格内部等值面的走势。有限元法已成为一种能够有效求解各类工程和科学计算问题的通用数值分析方法[6]，在可视化研究领域发挥着不可替代的重要作用。

由于其他种类的网格都可以转化为四面体网格，因此，具有插值计算更容易、表示简明等优势的四面体单元是有限元法三维问题分析中最常见的表示方式[7]，近年来许多学者对四面体网格划分方法及应用进行了更进一步的研究[8-12]。基于点云数据集的 CAD 数字化模型重建是机械设计的关键技术之一[13]，对有序点云数据集进行逐个微四面体构造可以使多个设计过程融为一体，实现精细及快速可视化[14]。高阶多节点多面体中，插值函数更加复杂，生成的等值点及三角面片数量相对更加庞大，图像计算、绘制与传输效率需要依赖结果的压缩处理及并行操作。国内现阶段对基于高阶四面体网格单元的可视化问题研究较少，因此本文针对二阶四面体等参插值函数特征进行分析，以保证等值面几何拓扑性质为前提，以降低计算、存储及传输代价为目标，提出一种基于压缩索引的等值面抽取方法。

1　网格单元内部标量场分布特征

如图 1 所示，在参数空间所在局部坐标系中以原点为一个顶点，沿三个坐标轴方向建立一个边长为 1 的基本 10 节点四面体网格单元，10 个节点由 4 个网格顶点及 6 个棱边中点组成。

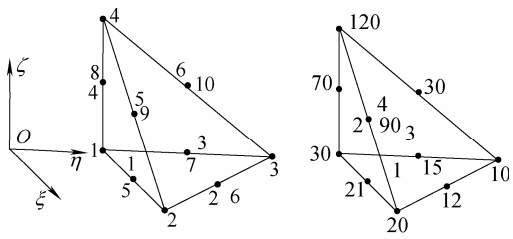
假设图 1 所示四面体各顶点直角坐标为 $A_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，$i$ =1,2,3,4,其内部空间任一点 P 的直角坐标为 (ξ,η,ζ) ,体积坐标 (L_1,L_2,L_3,L_4) 满足

$$L_1=\frac{\mathrm{vol}(PA_2A_3A_4)}{\mathrm{vol}(A_1A_2A_3A_4)}\qquad L_2=\frac{\mathrm{vol}(PA_1A_3A_4)}{\mathrm{vol}(A_1A_2A_3A_4)}$$
$$L_3=\frac{\mathrm{vol}(PA_1A_2A_4)}{\mathrm{vol}(A_1A_2A_3A_4)}\qquad L_4=\frac{\mathrm{vol}(PA_1A_2A_3)}{\mathrm{vol}(A_1A_2A_3A_4)}\tag{1}$$
$$L_1+L_2+L_3+L_4=1$$

式中　vol——四面体体积，例如 $\mathrm{vol}(PA_2A_3A_4)$ 表示四面体 $PA_2A_3A_4$ 的体积。

该基本单元中，直角坐标与体积坐标间关系为

$$\begin{cases}\xi=\sum_{i=1}^{4}\xi_i\cdot L_i\\ \eta=\sum_{i=1}^{4}\eta_i\cdot L_i\\ \zeta=\sum_{i=1}^{4}\zeta_i\cdot L_i\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}1-\xi-\eta-\zeta=L_1\\ \xi=L_2\\ \eta=L_3\\ \zeta=L_4\end{cases}\tag{2}$$



(a) 节点及棱边　　(b) 顶点值及表面

图 1　10 节点四面体结构示意图

假设 $F(L_1,L_2,L_3,L_4)$ 为网格单元内部三维连续等值面图像，则网格单元节点属性定义为

$$\begin{cases}F_P<C & P为负点\\ F_P=C & P为等值点\\ F_P>C & P为正点\end{cases}$$

式中　F_P ——点 P 处某标量场物理量值；

C ——有限元计算结果当前关注标量场物理量阈值(即等值面标量值)。

图 1 所示 10 节点四面体单元内部标量场任一点处插值函数 F 为三元二次函数

$$\begin{aligned}F(L_1,L_2,L_3,L_4)=&a_1\cdot L_2^2+a_2\cdot L_3^2+a_3\cdot L_4^2+\\&a_4\cdot L_2\cdot L_3+a_5\cdot L_3\cdot L_4+a_6\cdot L_2\cdot L_4+\\&a_7\cdot L_2+a_8\cdot L_3+a_9\cdot L_4+a_{10}\end{aligned}\tag{3}$$

式中　$a_1=2(F_1+F_2-2F_5)$；

$a_2=2(F_1+F_3-2F_7)$；

$a_3=2(F_1+F_4-2F_8)$。

其余类似。

函数另一表达形式为

$$F=\sum_{k=1}^{10}N_k\cdot F_k\tag{4}$$

式中　F_k ——节点 k 处函数值；

N_k ——节点 k 处形函数。

角节点

$$N_k=(2L_k-1)L_k,k=1,2,3,4\ ；$$

棱中点

$$N_5=4L_1L_2,N_6=4L_2L_3,N_7=4L_1L_3$$
$$N_8=4L_1L_4,N_9=4L_2L_4,N_{10}=4L_3L_4$$

任意 10 节点曲边四面体与图 1 所示基本单元相互映射的位移函数 T 如式(5)所示

$$T=\sum_{k=1}^{10}N_k\cdot T_k\tag{5}$$

式中　T_k ——节点 k 处位移值。

2　等值面抽取方法描述

传统的 MT 算法仅在 4 节点四面体网格单元棱

边插值计算等值点，对照其 3 种体元等值面拓扑方式形成三角等值面片[3]。该方法判断等值面的方式十分简单，但仅能解决各边标量场均为线性分布的 4 节点四面体等值面抽取问题。为解决二义性问题、有效表达二阶 10 节点四面体网格内部的等值面真实效果，本文设计了基于压缩索引的等值面抽取方法，分为“等值面片轮廓抽取”、“体关键点抽取与轮廓匹配”、“等值面片三角化及压缩存储”以及“基于索引的等值面优化”四个模块。算法步骤如下。

(1) 将全局坐标系下的曲边 10 节点四面体网格映射为局部坐标系中的直边 10 节点四面体基本网格单元，在基本单元中进行步骤(2)~(5)操作。

(2) 根据棱边及表面简化插值函数，计算单元各棱边等值点及面关键点，生成等值面片轮廓。

(3) 由轮廓点计算单元的体关键点，将其匹配相对应的闭合轮廓。

(4) 以体关键点为公共中心点，结合其匹配轮廓及压缩策略实现等值面片三角化，以等值面片为单位存储于相应压缩索引结构。

(5) 若未满足图像精度需求，则对相应压缩索引结构进行分裂操作，对现有三角面片进行剖分。

(6) 将计算结果反映射回全局坐标系下的曲边 10 节点四面体网格单元，生成实际三角等值面片。

2.1 等值面片轮廓抽取

本文抽取的等值点根据所在位置分为三类：棱边等值点、表面关键点和体关键点。三类点均为等值点，均满足二阶 10 节点四面体等参插值函数，棱边等值点与表面关键点为等值面片轮廓构成基本点，表面关键点和体关键点可分别在网格表面及内部控制等值面的凹凸形状。

类似 MT 算法，在网格单元棱边上利用等参插值函数计算出的等值点即为棱边等值点。根据同一条棱边的三个已知节点属性判断出该棱边插值点的分布状态，由式(4)，棱边 1 的插值函数可简化为式(6)所示仅依赖该棱边三个已知节点的函数形式

$$F_{Edge_1}=\sum_{k=1,2,5}N_k\cdot F_k \tag{6}$$

且

$$L_1+L_2=1,\ L_3=L_4=0$$

展开为一元二次函数形式

$$F_{Edge_1}=2(F_1+F_2-2F_5)L_1^2+(4F_5-F_1-3F_2)L_1+F_2 \tag{7}$$

式中 F_{Edge_1}——棱边 $Edge_1$ 的插值函数，且位于棱边 $Edge_1$ 上的等值点满足 $F_{Edge_1}=C$。

单元各棱边简化插值函数根据以下棱边与顶点关系矩阵计算

$$\boldsymbol{A}_{EP}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{EP}=(a_{mn})\quad m=1,2,\cdots,6\quad n=1,2,\cdots,10$$

$$a_{mn}=\begin{cases}0 & \text{节点}n\text{不在棱边}m\text{上}\\1 & \text{节点}n\text{在棱边}m\text{上}\end{cases}$$

由于一条棱边可能出现两个等值点有效解且二者应为同一等值面片的相邻棱等值点等相对复杂的情况，因此不能简单地将两相邻等值点直接以直线段连接，因此引入表面关键点，即网格表面与等值面交线上的几何特征点。

如图 2 所示，$\widehat{MN}$ 及 $\widehat{M'N'}$ 为真实等值面与网格单元表面的交线，若仅提取 M、N、M'、N'，则存在二义性且连接效果与实际曲线有较大差异。根据网格单元插值函数，以 M、N 为基础点，计算该函数曲线上距离 $\overline{MN}$ 最远点 P (面肩点)[5,15]，将 P 作为该表面的面插值关键点，则 $\overline{MP}$、$\overline{PN}$ 与 $\overline{MN}$ 相比可更精确地描述等值面与该表面的交线；若选择 M、M' 为基础点则该计算无解，由此得出网格单元表面等值面交线的精确拓扑。

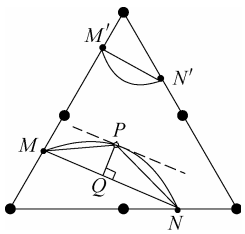


图 2 面关键点

由式(4)推知，表面 1 的插值函数可简化为如下仅依赖该表面上的六个已知点的函数形式

$$F_{Face_1}=\sum_{k=1\sim7}N_k\cdot F_k \tag{8}$$

且

$$L_1+L_2+L_3=1\qquad L_4=0$$

展开为二元二次函数形式

$$\begin{aligned}F_{Face_1}=&2(F_1+F_3-2F_7){L_1}^2+2(F_2+F_3-2F_6){L_2}^2+\\&4(F_3+F_5-F_6-F_7)L_1\cdot L_2+(4F_7-F_1-3F_3)L_1+\\&(4F_6-F_2-3F_3)L_2+F_3\end{aligned} \tag{9}$$

此时插值函数仅根据当前表面上的六个已知节点属性即可判断表面插值关键点的数目与位置，

而后由表面插值函数求解表面上的关键点。

单元各表面简化插值函数根据以下表面与相关顶点关系矩阵计算

$$\boldsymbol{A}_{FP}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&1&0&0&1&1&0\\0&1&1&1&0&1&0&0&1&1\\1&0&1&1&0&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{FP}=\left(a_{mn}\right)\quad m=1,2,3,4\quad n=1,2,\cdots,10$$

$$a_{mn}=\begin{cases}0 & \text{节点}n\text{不在面}m\text{上}\\1 & \text{节点}n\text{在面}m\text{上}\end{cases}$$

在网格单元各表面顺次将该面三条棱边对应为一环状结构；根据六个已知节点属性排除各对称性，棱边等值点分布按节点属性数目分为四大类情况；遍历等值点的两点组合，以两等值点为基础点计算表面关键点，生成各表面上的等值面轮廓片段；至各表面计算完毕，将轮廓片段以相同的等值点 ID 首尾顺次连接，形成完整的等值面轮廓的封闭曲线。

四面体的表面关键点 P 还应同时满足

$$\begin{cases}\boldsymbol{MN}\cdot\boldsymbol{PQ}=0\\\boldsymbol{MQ}=\lambda\cdot\boldsymbol{QN}\end{cases}\quad \text{且}\quad F_P=C \tag{10}$$

其中，λ 为常数，令 $|\boldsymbol{PQ}|$ 取最大值的 P 点称作该表面 M、N 间的表面关键点。若有解，则计算出的最值点 P 作为面 $L_4=0$ 上点 M、N 间的表面关键点。将基础点 M、N 分别与计算出的表面关键点 P 连接，以“棱等值点 1-表面关键点-棱等值点 2”即“M-P-N”连接关系结构输出；若无解，则说明点 M、N 非相邻轮廓点。至各表面计算完毕，将轮廓片段以相同的等值点 ID 首尾顺次连接，生成完整封闭的等值面轮廓曲线。

2.2　体关键点抽取与轮廓匹配

轮廓仅表达了等值面与网格表面的相交轮廓信息，并不包含等值面的内部几何特征，于是将表面关键点的涵义扩展到三维空间，引入可表现网格内部等值面片凹凸性的体关键点。本文对于单元体内是否存在回转等值面的两种情况分别抽取变形点和近似中心点作为体关键点。

若单元体内等值面出现回转，即同一等值面从单元同一表面穿入并穿出，则计算并抽取类似文献[5]中引入的以某坐标轴正交面为切面的等值面切点即变形点为体内关键点。本文以体积坐标计算网格单元内部等值面的变形点 T

$$\frac{\partial F}{\partial L_2}|_T=\frac{\partial F}{\partial L_3}|_T=F_T-C=0$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial L_3}|_T=\frac{\partial F}{\partial L_4}|_T=F_T-C=0$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial L_2}|_T=\frac{\partial F}{\partial L_4}|_T=F_T-C=0 \tag{11}$$

如图 3 所示，T 的解集即该网格中所有等值面片的变形点集合，需要将其与该网格中各组等值面轮廓选择性匹配。

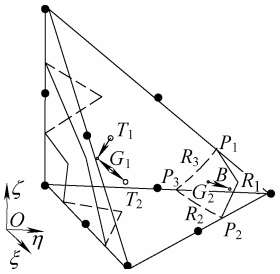


图 3　变形点与等值面轮廓匹配

由于棱等值点与面关键点数目相同，则该面片所有轮廓点的坐标平均点 G 为

$$G_{L_i}=\frac{\sum_{v=1}^{N_{EP}}(P_{v_{L_i}}+R_{v_{L_i}})}{2N_{EP}}\quad i=1,2,3,4 \tag{12}$$

式中　N_{EP} ——棱等值点数目；

P ——棱等值点；

R ——面关键点。

若该网格内只有一组轮廓，在变形点集合中选取距离该轮廓平均坐标点最远点作为该组轮廓相匹配的体关键点。若该网格内有多组轮廓，则如图 3 所示，先计算坐标平均点距离各变形点最近的轮廓，将所有变形点分配给所对应的(距离最近)轮廓组；而后，各组轮廓分别从其对应变形点中选取与其坐标平均点距离最远点作为体关键点与之匹配。例如，将坐标平均点为 G_1 的轮廓(简称轮廓 G_1)所在等值面片简称为等值面片 G_1，变形点 T_1、T_2 到点 G_1 距离最近，则等值面片 G_1 的变形点为 T_1、T_2，而这两点中，与点 G_1 距离最远点为 T_2，因此 T_2 作为体关键点与轮廓 G_1 匹配。

若单元体内存在无回转等值面，则该单元中不存在变形点解或某组轮廓在上述匹配过程中不能成功(如图 3 中轮廓 G_2)。此种情况下，受文献[4，16]中对于双肩点近似求解的启发，以无回转等值面轮廓的坐标平均点 G_2 为基础点，计算等值面片的近似中心点 B。

如图 3 所示，从点 G_2 出发，沿 G_2 点处函数梯度(或相反)方向利用式(13)计算该轮廓所在面片的

近似中心点 B 作为体关键点。

$$\begin{cases} B_{L_i} = G_{L_i} \pm \dfrac{\partial F}{\partial L_i}\Big|_G \quad i=1,2,3 \\ B_{L_4} = 1 - B_{L_1} - B_{L_2} - B_{L_3} \\ F(B_{L_1}, B_{L_2}, B_{L_3}, B_{L_4}) = C \end{cases} \tag{13}$$

2.3 等值面片三角化及压缩存储

“以棱边等值点计算表面关键点，以轮廓点计算体关键点”的逻辑关系表达了等值面片上三类点的几何拓扑关系，同时决定了如图 4 所示三角面片的“体关键点-表面关键点-棱等值点”结构组成。因此在计算过程中，得到一个等值面片的体关键点结果，沿其匹配轮廓顺次提取相邻两个轮廓等值点即得到该等值面的三角面片。以此三角化方法为基础，以图 5 中采用三角形三个顶点形式的传统存储结构表达的等值面片，即可以如图 6a 所示的三角面片压缩索引结构来存储。该压缩结构以体关键点为公共中心点的面片，结构的头元素为标识位，有公共中心点的结构标识位为“0”，第二位用来存储公共中心点(体关键点)，而后将闭合轮廓中的轮廓点顺次存储为后续元素，则公共点与后续结构中任意两个相邻元素即构成一个三角面片。将图 5 及图 6a 对比可见，与传统三点式存储方式中每个点都产生重复存储代价的情况相比，压缩后，除轮廓连接点 P_1 外的面片轮廓点和公共中心点无须重复存储，轮廓连接点仅需存储两次。压缩存储结构除简捷优势外，其构成部分恰好与等值面抽取过程中的计算模块结果一一对应，同时可作为优化剖分的分裂基本索引结构。

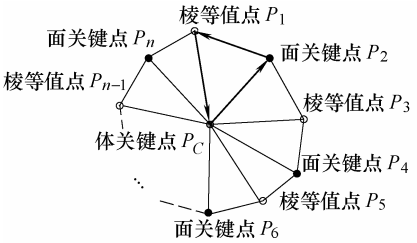


图 4 等值面片三角化规则示意图

P_c	P_1	P_2
P_c	P_2	P_3
P_c	P_3	P_4
⋮		
P_c	P_{n-1}	P_n
P_c	P_n	P_1

图 5 传统顶点存储方式

0	P_c	P_1	P_2	…	P_n	P_1

(a)具有唯一公共点 P_c 的三角面片(边缘点 P_i 数目 $i=n$)

1	P_{O1}	P_{I1}	P_{O2}	P_{I2}	…	P_{In}	P_{On+1}

(b) 带状分布的三角面片

(三角带外围点 P_{Oi} 数目 $i=n+1$，内围点 P_{Ij} 数目 $j=n$)

图 6 三角面片压缩索引结构

2.4 基于索引的等值面优化

存在提高精度需求时，为尽量避免优化过程中产生过大的计算、绘制及传输代价，因此采用图 6 所示的三角面片压缩存储结构为分裂索引，采用基于边中点的剖分方式，将每个三角形剖分为 4 个子三角片，具体优化策略如下。

(1) 类似计算面关键点方法计算网格单元表面上相邻两个等值点间的插值点。

(2) 计算各三角面片位于网格单元内部边的中点及其梯度，沿梯度(或相反)方向计算等值点，若计算后中点移动至等值点的距离 d 与所在边长 l 之比不超过优化精度阈值 ε (初次剖分一般可按需要在区间[0.1,0.3]内取值)，将中点作为剖分点；否则舍弃中点，将等值点作为剖分点。

(3) 重新生成三角面片。

(4) 若不满足精度要求，将阈值 ε 减半，转到步骤(1)，若满足精度要求，则完成该面片优化。

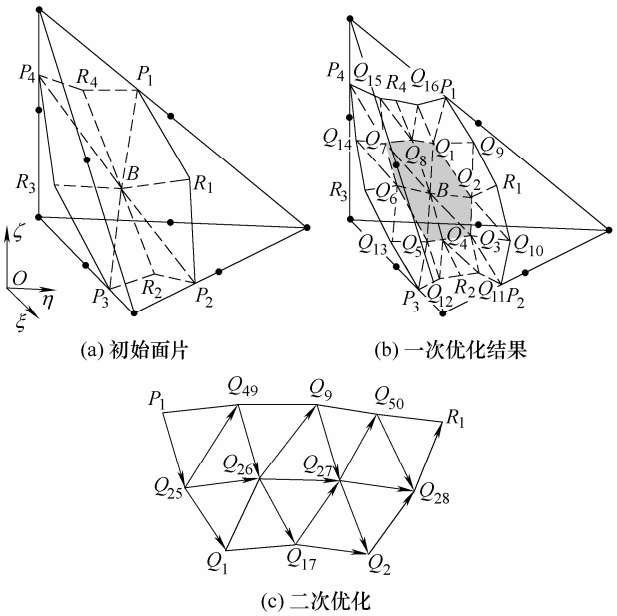


图 7 等值面片优化前后对比

图 7 说明了针对该算法设计的等值面片优化计算及存储过程。图 7a 为生成的初始等值面片，$\triangle BP_1R_1$、$\triangle BR_1P_2$ 等 8 个三角面片存储于图 8 结构中。

0	B	P_1	R_1	P_2	R_2	P_3	R_3	P_4	R_4	P_1

标识位 公共点 轮廓点

图 8 初始基本面片压缩索引结构

将其按优化策略进行一次优化后的结果为图 7b 所示，对应其几何特征，按位置插入添加点将初始结构分裂为图 9 所示以下两类结构。

(1) 以点 B 为公共点的中心面片(8 个三角片)。

(2) 外围三角带(以每个本次修复前面片为一个行单元结构)。

图 9b 中外围三角带为图 6b 所示类型压缩索引结构，该结构类型标识位为“1”，同一行单元中位

于标识位后任意连续三个元素即代表一个三角面片。例如结构 2 中第一行则代表 $\Delta P_1Q_1Q_9$、$\Delta Q_1Q_9Q_2$、$\Delta Q_9Q_2R_1$ 三个三角面片。

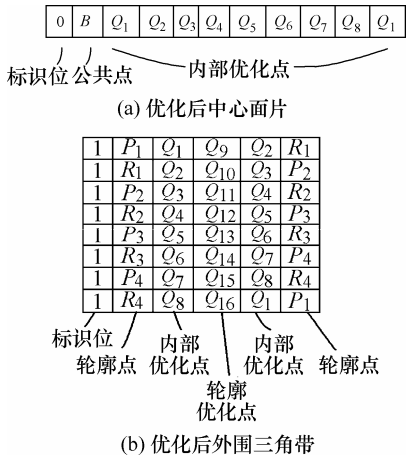


图 9　一次优化结果压缩索引结构

若对图 7b 所示等值面进行二次深度优化，则将图 7b 中阴影所示部分重复上述一次优化的操作步骤，层层“剥离”，外层三角带分别以外围点、内围点为基础点添加插值点剖分为内外两组三角带；中心结构则以其公共点(体关键点)和外缘点为基础，添加插值点分离出新的中心结构和外缘三角带。结构 1 仍按一次优化的方式及相应结构存储，结构 2 中部分外围面片优化结果如图 7c 所示，该部分优化后压缩索引结构如图 10。

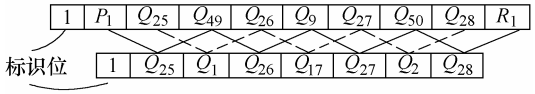


图 10　外围三角带单元二次优化结果压缩索引结构

每次优化对象都是各压缩索引结构表示的基本面片组，由于对一个三角面片的优化过程中可能存在面片趋于平缓而新添加的优化插值点均为原三角面片中点的情况，因此，可以设置并调整该次优化的基础等值面片组中出现该情况的未优化比例阈值(无须调整的百分比)，结合精度需要来判断是否有必要将原有面片结果更新为此次优化结果。

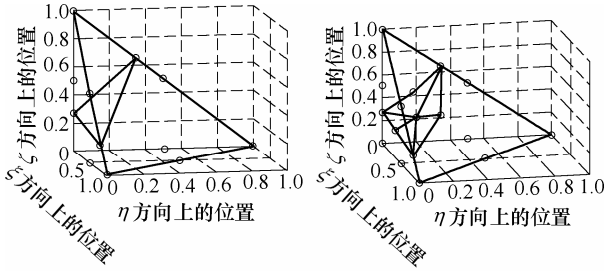
由图 7 可知，本算法的优化策略采用迭代方式，由于迭代过程中，基础点与插值点具“W”形几何分布规律，保证了二者间的拓扑关联及逻辑关系，植入压缩存储过程的优化过程中，仅对两类初始结构以上述简单规律拆分并插入相应优化点即可，任意层次的深度优化结果均可以两类压缩索引结构相结合的形式进行表示。优化及存储索引两个过程相得益彰，有效便捷地实现了多精度的适应需求。

3　实例分析

本节对基于压缩索引的二阶四面体网格等值面抽取方法的准确性及完备性进行验证；而后将未压缩与使用压缩结构存储的三角面片结果文件的存储代价进行比较。所有程序均在 Intel(R) Xeon(R) CPU E5205 1.86 GHz 1.87 GHz，8 GB 内存的计算机上采用 VC++编程实现。

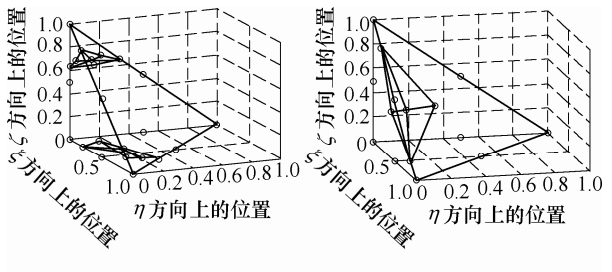
如图 11 所示，图 11a 为仅在棱边计算抽取等值点后形成的等值面效果；图 11b 为采用本文方法添加了表面关键点和体关键点后的等值面效果。由图对比可知，添加关键插值点后，可以正确描述等值面在网格单元表面及内部的真实凹凸特征。

图 12 为同一棱边上存在两个等值点解时，两个等值点在网格单元内部是否连续情况的等值面效果示意图。图 12a 为两个等值点解非连续棱边等值点情况，图 12b 为两等值点解为连续棱边等值点所构成的等值面效果。结果说明，本文提出的方法生成的等值面不存在二义性，同时添加的关键点可以有效准确地分辨出等值面拓扑结构，更加真实地描绘出等值面片在网格内部的形状。



(a) 棱边等值点构成结果　　(b) 添加关键点结果

图 11　关键点添加前后效果对比图



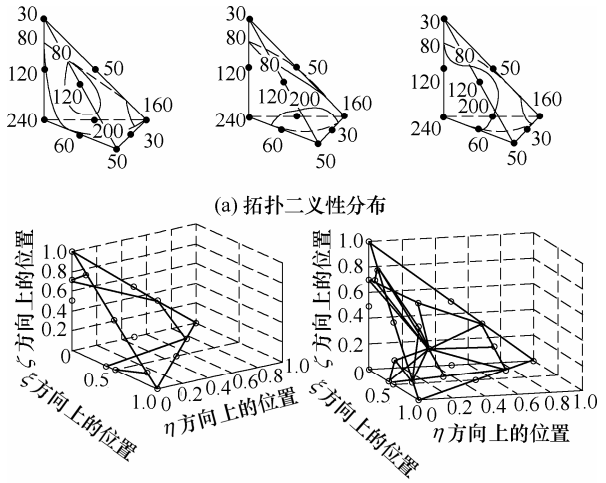
(a) 两等值点解不连续　　(b) 两等值点连续

图 12　同一棱边两个等值点解效果图

图 13 为单元内部可能存在的二义性拓扑、只抽取棱边等值点构成等值面及本文抽取方法试验结果对比示意图。结果证明，本文方法可真实有效地描述网格单元内部等值面拓扑结构，结果不存在二

义性，表面关键点及体关键点可使等值面结果更加准确接近真实等值面。

图 14 为同一网格单元中同时出现回转与非回转等值面片时的等值面绘制效果,结果证明,本文提出的体关键点计算方法可智能识别各面片的体关键点，并可简捷有效地抽取表达各类不同等值面片的拓扑特征。



(a) 拓扑二义性分布

(b) 棱边等值点构成结果 (c) 添加关键点构成结果

图 13 同一棱边等值点唯一解效果图

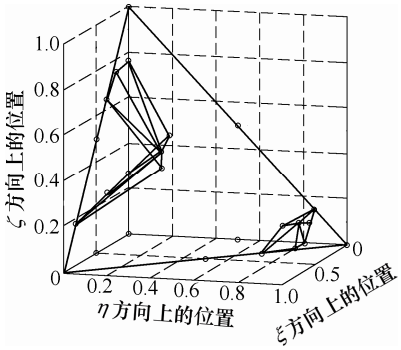


图 14 轮廓与体关键点匹配

图 15 为图 12 中的计算结果反映射至全局坐标系中的原 10 节点曲边四面体网格单元后的等值面效果示意图，试验证明了其结果的真实有效性。

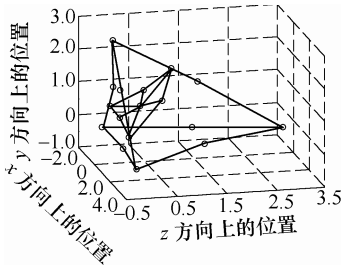
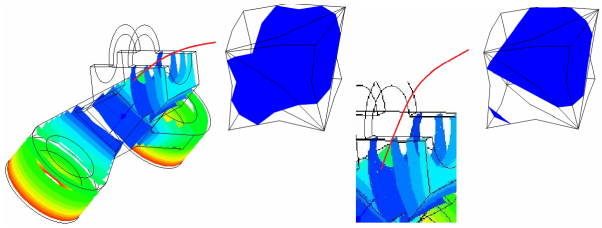


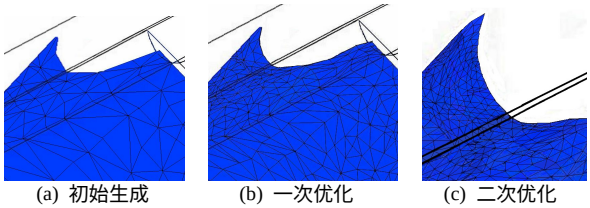
图 15 曲边 10 节点四面体

图 16a 为在设计温度场分析应用中对一机械零件使用该方法实现的等值面效果，初始生成的总体等值面效果，等值面片数目为 19 536，优化精度初始阈值为 0.1，未优化比例阈值为 0.25；图 16b 为将二阶四面体剖分为四节点四面体后利用 MT 算法得到的局部效果，由局部部分单元放大效果对比可知，本文算法添加的表面关键点可保证等值面的连续性，可有效避免二义性网格单元中产生的等值面空洞；添加体关键点可以表现出等值面在网格单元内更真实、准确的凹凸形状。在该数据集上，继续对初始生成结果进行一次优化及二次优化，优化前后局部效果对比图如图 17 所示，可见本算法的优化策略可以适应并满足不同的精度需要。在此过程中各阶段生成的三角面片结果，利用常规三角面片顶点存储方式及本文提出的相应压缩存储结构两种方式生成的文本文件存储代价见图 18，对比可见，利用本文提出的压缩结构可明显降低存储代价。



(a) 本文算法 (b) 剖分算法

图 16 机械设计温度场分析应用等值面抽取对比效果示意图



(a) 初始生成 (b) 一次优化 (c) 二次优化

图 17 优化前后等值面效果对比示意图

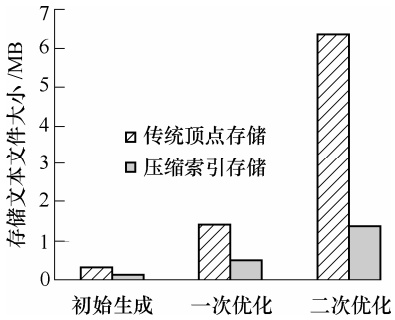


图 18 等值面片不同存储方式存储代价对比

4 结论

本文研究了二阶 10 节点四面体的等值面计算抽取问题，基于等参插值函数的性质以及抽取等值点分布特征，设计了几何元素计算关系矩阵及便于等值面存储及分裂的索引结构及相应策略，提出了基于压缩索引的二阶 10 节点四面体等值面抽取方

法，设计了评价试验，试验结果证明了该方法的正确性和有效性。研究表明，该方法的优势如下。

(1) 无须重新建立可视化模块中的计算函数，利用与有限元计算相同的插值与映射模式，简化插值函数并提出了关系矩阵,解决了曲边 10 节点四面体中的等值点计算及准确定位问题。

(2) 以准确的等值点为基础，根据逻辑关系计算提取等值面中具有代表性的几何特征辅助等值点，解决了二义性问题，等值面结果保留了本身的几何关键特征。

(3) 利用三类等值关键点间的几何关联及逻辑关系控制计算过程，面片三角化初始结果可直接存储于压缩结构，并将压缩结构作为进一步优化分裂及绘制索引，针对不同拓扑形式的面片组合，结合相应索引结构，设计了简捷有效的优化修复过程。

(4) 设计的等值面优化及压缩索引策略可以适应不同的精度需求，且保证了较低的绘制与传输代价。

参 考 文 献

[1] 唐泽圣，孙延奎，邓俊辉.科学计算可视化理论与应用研究进展.清华大学学报(自然科学版)，2001，41(4/5)：199-202.
TANG Zesheng，SUN Yankui，DENG Junhui. Advances in the study of visualization in scientific computing[J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology)，2001，41(4/5)：199-202.

[2] LORENSEN W E，CLINE H E. Marching cube：A high resolution 3D surface construction aigorithm[J]. Computer Graphics，1987，21(4)：163-169.

[3] DOI A，KOIDE A. An efficient method of triangulating equi-valued surfaces by using tetrahedral cells[J]. IEICE Transaction on Information and Systems，1991，E74-D(1)：214-224.

[4] NATARAJAN B K. On generating topologically consistent isosurfaces from uniform samples [J]. The Visual Computer，1994，11(1)：52-62.

[5] LOPES A，BRODLIE K. Improving the robustness and accuracy of the marching cubes algorithm for isosurfacing[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graghics，2003，9(1)：16-29.

[6] 关振群，宋超，顾元宪，等. 有限元网格生成方法研究的新进展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2003，15(1)：1-14.
GUAN Zhenqun，SONG Chao，GU Yuanxian，et al. Recent advances of research on finite element mesh generation methods[J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graghics，2003，15(1)：1-14.

[7] KAUFMAN A，MUELLER K. Overview of volume rendering[J]. The Visualization Handbook，2005，10，127-174.

[8] 胡建伟，方林聪，刘利刚，等. 基于 Delaunay 四面体剖分的网格分割算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2009，21(12)：1729-1732.
HU Jianwei，FANG Lincong，LIU Ligang，et al. Mesh segmentation based on 3D delaunay triangulation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graghics，2009，21(12)：1729-1732.

[9] 王磊，聂玉峰，李义强. Delaunay 四面体网格并行生成算法研究进展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2011，23(6)：923-932.
WANG Lei，NIE Yufeng，LI Yiqiang. Advances of research on parallel Delaunay tetrahedral mesh generation[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graghics，2011，23(6)：923-932.

[10] 周筠，樊晓平，廖志芳，等. 医学体数据中四面体化方法的研究进展[J]. 计算机应用研究，2011，28(10)：3615-3622.
ZHOU Yun，FAN Xiaoping，LIAO Zhifang，et al. Research progress in tetrahedral mesh generation from medical volume data[J]. Application Research of Computers，2011，28(10)：3615-3622.

[11] 吴火珍，焦玉勇，李海波，等. 复杂区域三维有限元四面体网格自动生成研究[J]. 岩土力学，2011，32(11)：3479-3486.
WU Huozhen，JIAO Yuyong，LI Haibo，et al. Study of 3D finite element tetrahedral mesh automatic generation for complex regions[J]. Rock and Soil Mechanics，2011，32(11)：3479-3486.

[12] 于荣欢，邓宝松，吴玲达，等. 三维标量场并行等值面提取与绘制技术[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2012，24(2)：244-251.
YU Ronghuan，DENG Baosong，WU Lingda，et al. Parallel isosurface extracting and rendering of 3D scalar fields[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graghics，2012，24(2)：244-251.

[13] 齐从谦，陈亚洲，甘屹，等. 反求工程中复杂曲面数字化重构关键技术的研究[J]. 机械工程学报，2003，

39(4)：131-135.
QI Congqian，CHEN Yazhou，GAN Yi，et al. Research on the key-technologies of complex surface digitizing reconstruction in reverse engineering[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2003，39(4)：131-135.

[14] 朱玉芳，杨继全，王昌明. 基于空间微四面体的异质材料零件建模方法[J]. 机械工程学报，2012，48(1)：150-155.
ZHU Yufang，YANG Jiquan，WANG Changming. Micro-tetradral-based representation for heterogeneous objects modeling[J]. Journal of Mechanical Engineering，2012，48(1)：150-155.

[15] CIGNONI P，GANOVELLI F，MONTANI C，et al. Reconstruction of topologically correct and adaptive trilinear isosurface[J]. Computers and Graphics，2000，24(3)：399-418.

[16] 夏仁波，刘伟军，王越超. 保证拓扑正确的高精度等值面提取技术[J]. 机械工程学报，2006，42(6)：133-140.
XIA Renbo，LIU Weijun，WANG Yuechao. Topological correct and high resolution technique for three-dimensional reverse[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering，2006，42(6)：133-140.

作者简介：刘鹤丹(通信作者)，女，1983 年出生，博士研究生。主要研究方向为科学计算可视化、数据集成。
E-mail：liuhedan@hotmail.com
王成恩，男，1964 年出生，博士，教授，博士研究生导师。主要研究方向为复杂产品数字化设计、科学计算可视化等。
E-mail：wangc@mail.neu.edu.cn