DOI: 10.3901/JME.2013.17.110

回转副精度特性的弹性冗余空间机构模型*

王德伦¹ 王 智¹ 董惠敏¹ 于树栋^{1,2}

(1. 大连理工大学机械工程学院 大连 116024;
2. 瑞尔森大学机械与工业工程系 多伦多 M5B 2K3 加拿大)

摘要: 提出回转副精度特性的弹性冗余空间机构模型, 将实际回转副中的弹性约束等效映射为多个从动件弹性冗余支承, 实际回转副零件的几何误差特性等效映射为刚性凸轮轮廓曲面, 形成以多组从动件弹性悬浮刚性凸轮几何轮廓的弹性冗余空间机构, 从而较真实地反映实际回转副结构及其零件的几何、运动、材料物理性质与工况载荷特性等因素的耦合关系。建立弹性冗余空间凸轮机构的几何位移基本方程、静力平衡方程、物性方程, 将回转副精度及其随位置和载荷变化的特性转化为弹性冗余空间机构的位移分析与静力分析求解问题, 并给出典型回转副精度特性计算分析与试验测试对比示例, 为机器精度分析与设计提供新的理论基础, 也为机构学理论开辟新的应用领域。

关键词: 机构 精度 回转副 弹性约束 冗余约束

中图分类号: TG156

A Novel Precision-characterization Model of a Revolute Joint Based on the Concept of Spatial Mechanisms with Redundant Elastic Constraints

WANG Delun¹ WANG Zhi¹ DONG Huimin¹ YU Shudong^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024;
2. Department of Mechanical and Industrial Engineering, Ryerson University, Toronto M5B 2K3, Canada)

Abstract: A novel approach, based on the concept of spatial mechanism with redundant elastic constraints is presented to set up a comprehensive precision-characterization model of an actual revolute joint. When considering component flexibility and manufacturing errors, the shaft in an actual revolute joint can move in a much more complex manner in comparison with an ideal revolute joint with only one rotational degree of freedom. In the proposed model, the rigid cams with special profiles are used to represent the geometrical error, springs are used to describe the deformations of joint components and surfaces in actual machine parts. The spatial cams, suspended by multiple straight-followers with springs, called an RE mechanism, is proposed to simulate the kinematics of the shaft in the revolute joint. The basic model equations, such as kinematic equations, equations of equilibrium, and equations of physical properties are concisely derived. With the proposed model, the precision of an actual revolute joint and its load-dependent properties can be seen as the solutions of the basic equations of a corresponding RE mechanism. An example is presented to illustrate the solution process of the precision model of a revolute joint, and numerical results were compared with the experimental results obtained from the corresponding test setup. The proposed model provides for the first time a theoretical basis for joint precision analysis and synthesis. This opens up a new application of the theory of mechanism in design of machine components.

Key words: Mechanism Error Revolute joint Elastic constraint Redundant constraint

0 前言

机构抽象反映了机器中构件间的运动与力的传递及变换关系, 是机器运动与尺度设计的基本内

容; 机构中的构件是刚体, 运动副是理想形状; 机构中的理想回转副, 有 5 个自由度被刚性约束, 只有 1 个回转自由度。然而, 实际机器中的运动副是由两个或多个实际几何曲面及介质支承接触形成, 不仅每个曲面有制造误差, 而且还有弹性, 会产生变形; 同时, 运动副元素所属的构件是由若干弹性零件联接而成, 在载荷作用下会产生变形, 也影响

* 国家自然科学基金资助项目(51275067)。20121129 收到初稿, 20130621 收到修改稿

运动副元素的几何曲面形状和接触位置; 所以, 机构中的构件和运动副都存在制造误差和弹性变形, 使得实际机器与理想机器中的零部件位置及运动产生差异。这种差异及其在载荷作用下的变化特性形成了机器的精度及其特性。而含有误差的弹性零件曲面及介质构成的实际回转副, 与理想运动副约束的偏差及其变化性质, 构成实际回转副的精度与特性。

机器精度及其特性是机器性能的重要指标, 如机床和精密仪器仪表等, 精度丧失意味着机器失效。然而, 机器精度主要包括构件精度(零件及其静态联接面)与运动副精度; 那么, 构件及运动副精度与其零件及联接有何关系? 如何计算与评价? 在运动状态与工况载荷作用下的特性是什么? 这些问题目前尚待研究; 现有机精度研究文献也有采用机构模型, 有的将零件与动联接面的误差特征表述为机构的刚性杆长误差与运动副间隙^[1-7], 有的直接用机构表示误差^[8], 有的赋予机构构件弹性参数^[9], 也有利用机构学原理进行零件误差坐标变换或矩阵变换^[10-13]; 这些研究多是把机器精度简化为机构刚性构件精度或几何精度, 部分考虑了构件弹性变形, 但缺少运动副结构、零件几何误差、材料物理性能与载荷之间的有机联系, 难以体现不同运动状况和载荷作用下机器的精度变化特性。实际构件及运动副是通过多个具有误差的几何表面间弹性接触与变形协调、或相对运动来实现运动与力的传递, 其精度及特性是结构、几何、运动、弹性与工况载荷之间耦合关系的综合体现。

回转副是机器中常用的运动副, 如机床主轴, 一般由轴、轴承等运动零件与轴承座等支承固定零件组成。本文总结实际回转副的常见结构类型, 分析其弹性支承约束与几何精度映射, 构建回转副精度特性的弹性冗余空间机构模型, 讨论该模型的基本方程及其性质, 把实际回转副的精度特性问题转化为弹性冗余空间机构的位移与静力求解问题, 从而形成回转副精度特性模型, 对于涉及温度、动态、时变等因素时该模型的修正和其他运动副的精度特性模型, 作者将另文探讨。

1 回转副典型轴承结构与弹性约束

实际回转副是由具体轴承结构及介质实现对旋转轴运动的支承与约束, 主要有滚动轴承和滑动轴承及其组合; 这些轴承依据承载方向不同呈现向心轴承、推力轴承、向心推力(或推力向心)轴承等结构类型; 以滚动轴承及其组合为例, 具体典型结

构与轴承约束分别讨论如下。

1.1 回转副的滚动轴承结构

为了实现回转副 5 个自由度约束, 一般都有两个以上轴承组合使用, 其典型组合安装方式有双支点单向固定与一端固定另一端游动两种形式, 以深沟球轴承为例的典型结构, 如图 1 和图 2 所示。

图1 回转副对称双支点单向固定滚动轴承结构

图2 回转副一端固定一端游动滚动轴承结构

将深沟球轴承替换为其他型式的轴承, 如推力球(滚子)轴承、圆锥滚子轴承、圆柱滚子轴承、调心球(滚子)轴承等, 并适当修改定位结构, 可得到类似的回转副滚动轴承结构。如以一对角接触球轴承代替图 2 中左端轴向固定的深沟球轴承, 而以圆柱滚子轴承代替右端的深沟球轴承, 形成承受更大轴向和径向载荷的回转副结构, 如图 3 所示的机床主轴类似结构。

图3 回转副角接触球轴承与圆柱滚子轴承结构

显然, 不同类型结构的滚动轴承组合具有不同的约束性质与刚度, 从而得到不同的回转副精度及其特性。

1.2 回转副的滚动轴承约束与刚度

对于回转副的滚动轴承结构, 由于滚动轴承可以向心与推力轴承结构集成在一起, 使得滚动轴承的功能集成化, 其结构多样化且约束复杂化; 在此仅论述四类滚动轴承。

向心轴承：有深沟球轴承和圆柱滚子轴承，如图 4a 所示，前者主要承受径向载荷，也可承受一定的双向轴向载荷，即约束 2 个径向自由度(用实线弹簧表示)和 1 个轴向自由度(用虚线弹簧表示)，其中轴向约束与轴承轴向定位结构相关。而后者仅承受径向载荷，即约束 2 个自由度径向位移(用实线弹簧表示)，其他方向需要有辅助支承限制，即需要组合使用；在此约定：单方向弹性约束采用单个弹簧 k_j^V 表示，上标 $V(V=X, Y, Z)$ 表示弹簧约束的坐标轴方向，下标 j 表示沿坐标轴 V 的正向或反向， $j=1$ 表示沿坐标正向， $j=2$ 表示反向；后文均采用相同约定。

推力轴承：无论滚动体是球还是滚子，见图 4b，仅承受单向轴向载荷，也就是约束一个单向自由度(用实线弹簧表示)，需要与其他轴承组合使用。

向心推力或推力向心轴承：有角接触球轴承和圆锥滚子轴承，见图 4c，都可同时承受径向载荷和单向轴向载荷，即约束 2 个径向自由度(用实线弹簧表示)和 1 个单向轴向自由度(用实线弹簧表示)，一般需要成对组合使用。

调心轴承：有调心球轴承和推力调心滚子轴承，允许轴线偏转，见图 4d；前者主要承受径向载荷，也可承受一定的双向轴向载荷，即约束径向和轴向位移(3 个自由度)；后者则以轴向载荷为主，也可承受径向载荷，即约束 2 个径向自由度和双向轴向自由度(用实线弹簧表示)。

图 4 四类典型滚动轴承结构与约束

为简化表示，图 4 中的约束模型仅给出了实现上述轴承约束所需的最少约束弹簧数；实际滚动轴承的支承约束与滚道、滚动体之间的接触状态相关，轴向约束与径向约束之间也存在关联性，可根据分析需要适当增加约束弹簧的数量或改变约束弹簧的位置，如图 4c 中向心推力轴承可采用 4 个与径向约

束弹簧——对应的轴向约束弹簧。

回转副中旋转轴的弹性位移是轴承座、轴承、轴等零部件及其配合面弹性变形的累积，若以旋转轴上轴承支承段中心截面的形心 O 为参考，上述轴承约束等效弹簧刚度(k_j^V)可定义为截面形心 O 沿轴线 $V(V=X, Y, Z)$ 方向上的载荷与弹性位移比值，不同方向上等效弹簧刚度不同。可对轴承进行适当简化，建立回转副的整体有限元模型^[14]计算等效约束弹簧刚度。由于滚动轴承一般为标准件，为计算方便也可分为轴承座与轴承两部分近似简化计算，轴承刚度可按滚动轴承技术手册提供的资料计算，如单列向心球轴承的径向刚度^[15]

$$k_B^r = 32\ 375 Z D_w^{1/2} \delta_r^{1/2} \cos^{5/2} \alpha \quad (1)$$

式中， Z 为滚动体个数， D_w 为滚动体直径， δ_r 为径向弹性变形， α 为接触角。

1.3 回转副滚动轴承结构的弹性约束等效模型

由上述可知，回转副旋转轴的位置精度及其特性与轴承支承结构及约束性质相关，也就是与轴承类型与轴承安装方式相关，在此以图 1~3 的典型回转副结构作为示例阐述。

如图 1 所示的回转副结构，将旋转轴由若干支承截面弹性悬浮起来，形成回转副轴承结构的物理性质等效——弹性约束等效模型，左右两端轴承分别等效为两个径向弹性约束和一个单向轴向弹性约束，并以弹簧表示，依据弹性约束性质，这是最少约束数目，见图 5。虽然在实际运转过程中，轴承弹性约束可以在 360° 任意方向，在此模型中分解为 X, Y, Z 三个方向，旋转轴的空间位置和静态平衡状态由各弹簧刚度及各支承截面的几何形状确定。

图 5 回转副双支点单向固定结构弹性约束模型

而图 2 所示的回转副结构，其右端轴承有 2 个径向弹性约束自由度(没有轴向弹性约束)，左端有 2 个径向弹性约束自由度和 1 个双向轴向弹性约束，将弹性约束以弹簧表示，属于一端固定一端游动结构的弹性约束模型，如图 6 所示。

按照第 1.2 节的轴承约束分析，回转副的不同轴承组合结构，可以按照轴承类型和安装结构的约束性质，以弹簧表示弹性约束，构建回转副的弹性

图6 回转副一端固定一端游动结构弹性约束模型

约束模型。如图3所示的回转副轴承结构，由向心圆柱滚子轴承与双排角接触球轴承(向心推力轴承)组合形成，即右端轴承有两个径向弹性约束(没有轴向弹性约束)，左端有双排径向弹性约束和双向轴向弹性约束，同属于一端固定一端游动结构的弹性约束模型，如图7所示，对于多排的滚动轴承约束，只需要增加对应的轴承支承约束截面即可，并考虑多组轴承组合对轴承约束刚度的影响^[16]。

图7 回转副一端双固定一端游动结构弹性约束模型

2 回转副精度的弹性冗余机构模型

对于回转副滚动轴承结构而言，其旋转轴在运动或承受载荷时，若干支承在不同方位有几何误差和弹性约束，约束的类型和程度取决于轴承的类型和结构，由于弹性约束及其变化规律与具体结构、几何参数、材料、工况载荷等条件相关，从而决定了回转副的精度及其特性，几何误差需要等效映射以便简化几何计算模型，但几何误差和弹性变形在安装和工作载荷作用下往往会相互转化，因此，需要建立涵盖几何映射和弹性约束的回转副精度弹性冗余机构模型。

2.1 回转副轴承结构的运动与几何等效

回转副轴承结构的旋转轴由若干支承截面弹性悬浮起来后，当轴承运动联接面存在几何误差时，外圈相对固定，旋转轴(含内圈)的轴线方向与位置随内圈位置变化而改变，其与理想位置及方向的差别综合反映了轴承运动联接面几何误差对旋转轴位置与运动精度的影响。在此构造一组等效刚性凸轮

轮廓，该凸轮与旋转轴固接，使凸轮与旋转轴该截面形心具有相同的运动规律——几何与运动等效；由于旋转轴的位置与运动由轴承元件几何形状(含误差)和受力平衡确定，运动等效需要满足几何等效条件和力平衡条件，即旋转轴的空间位置、运动和静态平衡状态由等效凸轮轮廓几何形状与各弹簧刚度确定，若等效凸轮轮廓在任意位置均满足等效运动的几何条件和等效支承约束反力与外载荷的平衡条件，则该凸轮可以等效描述轴承旋转轴的空间几何位置与运动。

滚动轴承支承结构几何误差及其特性主要包括零件表面几何误差及其特征、两零件表面固定(静)联接几何误差特征传递、两个或多个零件表面运动(动)联接几何误差特征传递三方面，即等效刚性凸轮轮廓体现零件曲面几何误差特征及其静动联接面传递，如图8所示。

(1) 零件表面几何误差及其特征，如内圈内孔表面、滚道表面的几何误差特征等；回转副零件表面实际几何特征可描述为理想曲面附加几何误差特征的形式，以曲面方程描述

$$S: r = S(\theta, z) = S_0(\theta, z) + \mu(\theta, z) \quad (2)$$

式中， r 、 θ 、 z 为坐标变量， $r = S_0(\theta, z)$ 为理想曲面， $r = \mu(\theta, z)$ 为几何误差特征。可测量零件表面若干截面轮廓，并以曲线拟合得到各截面轮廓曲线，如采用傅里叶级数拟合截面 i 的曲线方程

$$r = r_{i0} + a_{i0} + \sum_n [a_{in} \cos(nw_i \theta) + b_{in} \sin(nw_i \theta)] \quad (3)$$

式中， r 、 θ 为坐标变量， r_{i0} 为截面 i 理想形状对应的基值， $a_{i0} \sim a_{in}$ 、 $b_{i1} \sim b_{in}$ 、 w_i 为拟合参数，对应截面几何误差特征；以所有被测截面的轮廓曲线数据为基础，通过曲面拟合得到零件表面轮廓，在此以 $\Delta(S)$ 表示拟合曲面 S 的几何误差特征。

(2) 零件表面 S_A 和零件表面 S_B 通过固定(静)联接方式 ξ 将其几何误差特征进行传递映射到另一工作表面 S_g ，有

$$\xi: (\Delta(S_A), \Delta(S_B)) \rightarrow \Delta(S_g) \quad (4)$$

如图8b所示，轴、内圈内孔几何误差特征通过内圈与轴的过盈配合传递与映射到内圈滚道。

(3) 两个或多个零件表面 S_A 、 S_B 、 S_C 、...通过运动(动)联接方式 η 将其几何误差特征进行映射与传递转换为运动零件的轨迹变化 δ ，有

$$\eta: (\Delta(S_A), \Delta(S_B), \Delta(S_C)) \rightarrow \delta \quad (5)$$

图8 回转副滚动映射曲面示意图

如图8c所示内圈滚道、外圈滚道和滚动体的几何误差特征通过相对运动传递映射给内圈位置与运动。

显然,对于回转副滚动轴承结构,既有旋转轴、轴承元件、轴承座等零件表面的几何误差,又有轴与内圈、外圈与轴承座的静联接 ξ 以及内圈、外圈和滚动体的动联接 η 的误差特征传递与映射;以内圈滚道面为凸轮轮廓基础,以相关曲面误差特征函数经过静、动联接面传递与映射为依据,构建等效凸轮的轮廓,其径向与轴向轮廓方程可分别表述为

$$S_R: r = S_R(\theta, z) = r_0(\theta, z) + \delta_R(\theta, z) + \sigma_R(\theta, z) \quad (6)$$

$$S_Z: z = S_Z(r, \theta) = z_0(r, \theta) + \delta_Z(r, \theta) + \sigma_Z(r, \theta) \quad (7)$$

式中, r 、 θ 、 z 为坐标变量, $r_0(\theta, z)$ 、 $z_0(r, \theta)$ 对应内圈滚道曲面理想轮廓, $\delta_R(\theta, z)$ 、 $\delta_Z(r, \theta)$ 为曲面误差特征经过静、动联接面传递与映射后在凸轮坐标系中的像, $\sigma_R(\theta, z)$ 、 $\sigma_Z(r, \theta)$ 为凸轮轮廓的载荷特征系数。

轴承等效支承约束模型中,每个单向支承约束与其对应凸轮轮廓构成一个单向弹性约束,一组共线支承约束与一对共轭凸轮轮廓构成一个自由度约束,即10个支承约束对应10个凸轮轮廓,构成5个自由度约束,满足任意位置上的约束与力平衡条件。由于篇幅所限,回转副滚动轴承结构对应的具体凸轮方程的形成过程与参数将另文论述。

在凸轮坐标系($OXYZ$)_{*i*}下将凸轮轮廓方程记为

$$S_{ij}^V: g_{ij}^V(x, y, z) = 0 \quad i=1, 2 \quad j=1, 2 \quad V=X, Y, Z \quad (8)$$

式中, i 、 j 、 V 含义与弹性约束中约定一致。回转副在不同工况与载荷作用下,回转轴将产生弹性变形,即两端各等效凸轮曲面之间有相对弹性位移,两端凸轮之间存在六个相对位移参数,在后文讨论。

一般而言,滚动轴承为标准件,可以通过研究滚动轴承的精度特性,简化为带有映射函数的凸轮轮廓几何曲面,外部(轴与轴承座)曲面的几何特征可以作为映射函数的输入参数,这是一项具有重要意义的研究工作,还需要深入研究。

2.2 回转副精度的弹性冗余机构模型

采用上述弹性约束与几何特征映射简化模型,

可以表示瞬时位置回转副的状态,而在任一位置或连续运动且不同工况载荷情况下,需要建立回转副精度与特性的数学模型。因此,考虑到几何、运动与静力平衡等方面的连续性,提出将旋转轴上的等效映射几何曲面转化为刚性盘状凸轮 S_{ij}^V ,而对旋转轴曲面的弹性支承约束等效为带有弹簧预紧恢复力的刚性滚子直动从动件 k_{ij}^V 作用于刚性凸轮,使得每个轴承简化为带弹簧复位的多从动件凸轮机构;为便于计算,将从动件导轨分布在机架坐标系中的 X 、 Y 、 Z 轴上(或平行);对于回转副的多轴承组合结构,如图1所示的双支点单向固定回转副轴承结构,可等效为如图9a所示的多从动件弹性支承的刚性凸轮机构;回转副中由结构弹性引起的位移或自由度称为弹性自由度,而这种弹性自由度是冗余的,在实际回转副轴承结构中又必然存在,即弹性冗余自由度,上述机构称为弹性支承多自由度冗余空间凸轮机构,简称为弹性冗余机构。

弹性冗余机构的结构与性能参数集中体现了实际回转副轴承结构的几何误差与弹性的影响:等效凸轮轮廓综合体现了相关零件的几何误差与预紧受力状态,从动件复位弹簧在机架上位置反映了轴承座位置误差以及轴承外圈与轴承座之间配合状况的影响,从动件复位弹簧反映了轴承结构与接触刚度,两端凸轮之间弹簧 C_S 表示了回转轴的弹性等,该模型综合反映了实际回转副结构、几何、物理、载荷等因素之间的耦合关系。

对于如图2所示的一端固定另一端游动回转副轴承结构,可得到另一种弹性冗余空间机构,如图9b所示。对于不同轴承类型与结构参数的回转副,可得到相应弹性约束形式从动件的个数、方向、位置以及凸轮几何轮廓、形状与相对位置等,从而建立回转副精度特性的弹性冗余机构模型。

图9 回转副精度的弹性冗余机构模型

3 弹性冗余机构的基本方程

在弹性冗余机构中,凸轮及其旋转轴转动任何

角度, 其空间位置(轴线)由径向与端面凸轮几何轮廓及其从动件弹簧(含旋转轴变形)协调确定, 可以通过弹性冗余机构的位移方程与静力平衡方程解出。在此分析回转副精度特性的弹性冗余机构的自由度, 建立位移与静力基本方程。

3.1 弹性冗余机构自由度分析

如图 9a 所示的双支点单向固定滚动轴承结构对应的弹性冗余空间机构, 简称双支点弹性冗余空间机构, 共有 12 个构件, 即 1 个回转轴(带有两个凸轮), 10 个直动从动件和 1 个机架; 而每个从动件分别与机架构成一个移动副、与凸轮构成一个高副, 共 10 个 I 级副和 10 个 V 级副, 那么, 由机构自由度计算公式^[17]可知

$$F = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (9)$$

将构件数 $n=12$ 、运动副数 $g=20$ 以及 10 个 I 级副和 10 个 V 级副代入上式可以得到

$$F = 6 \times (12 - 20 - 1) + 1 \times 10 + 5 \times 10 = 6$$

即双支点弹性冗余机构有 6 个自由度, 其中凸轮(轴)回转是 1 个绝对自由度, 其余 5 个是由于材料弹性变形引起的弹性自由度, 表现为凸轮应该被约束的 3 个方向的线位移和 2 个方向的角位移, 与旋转轴悬浮起来的支承运动相对应。

双支点弹性冗余机构的 10 个从动件对应 10 个弹性运动, 对于刚体机构而言, 5 个从动件即可完全描述了刚性凸轮的 5 个自由度运动, 另外 5 个从动件是冗余弹性运动, 也是最少冗余弹性运动, 从另一角度说明了弹性冗余的含义。

对于一端固定一端游动结构的回转副, 弹性冗余空间机构的自由度也一样。

显然, 该机构中每增加一个刚性从动件会引入 6 个自由度, 同时也带来一个 I 级副(与凸轮构成高副)和一个 V 级副(移动副), 即 6 个约束, 正好抵消, 或者说增减从动件及其移动副与高副, 不会改变回转副弹性冗余机构的自由度数, 即最简化弹性冗余机构。这为分析含有结构误差与过约束或超静定轴承结构提供便利。

值得讨论的是, 在传统机构学中, 约束与自由度是相互对立而又相互依存, 自由度是相对机架而言的; 同时, 构件的自由度数目又是独立运动参数的数目, 固定为机架的构件没有独立运动参数(或自由度为 0)。但在实际机器中, 机架上各点因材料受力弹性变形而被动产生了弹性位移或运动, 使被约束构件具有了弹性运动自由度, 与刚体机构中原构件运动规律或机构自由度无关, 这是弹性冗余自由

度与传统机构学刚体构件中自由度含义的区别。

3.2 弹性冗余机构的位移方程

以图 9a 所示的双支点弹性冗余空间机构为例, 分别建立直角坐标系, 如机架 $(OXYZ)_f$ 、输入截面 $(OXYZ)_{p2}$ 、输出截面 $(OXYZ)_{p1}$ 、2 个等效凸轮 $(OXYZ)_1$ 与 $(OXYZ)_2$ 、10 个直动从动件 $(OXYZ)_{ij}^V$ ($i, j=1, 2; V=X, Y, Z$); 在此约定: 字母上标 X, Y, Z 表示位移方向, 下标 i 为凸轮(截面)序号, 下标 j 表示在该运动方向上的从动件序号; 其中 $i=1$ 表示从属左端凸轮曲面, $i=2$ 表示从属右端凸轮曲面, 如图 10 所示。则从动件坐标原点 O_{ij}^V 相对于机架坐标原点 O_f 的位移表示凸轮从动件的(弹性)位移, 即轴承结构的弹性变形; 凸轮坐标原点 O_i 相对机架坐标原点 O_f 的位移表示凸轮中心的运动, 即回转副轴心的位移, 而凸轮坐标原点 O_2 相对于 O_1 的位移表示旋转轴的弹性变形。

图 10 弹性冗余机构的坐标系

将凸轮轮廓方程式(8)置于机架坐标系 $(OXYZ)_f$ 中, 得到在固定坐标系的方程

$$g_{ij}^{Vf}(x, y, z, \mathbf{R}_i) = 0 \quad i=1, 2 \quad j=1, 2 \quad V=X, Y, Z \quad (10)$$

式中, 参数 $\mathbf{R}_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$ 决定凸轮 i 在坐标系 $(OXYZ)_f$ 中的位置与姿态。

凸轮轮廓曲面与十个从动件导轨轴线分别相交, 三向导轨轴线方程在机架坐标系下可分别写为

$$y - y_{ij}^{Xf} = z - z_{ij}^{Xf} = 0 \quad i=1, 2 \quad j=1, 2 \quad (11)$$

$$x - x_{ij}^{Yf} = z - z_{ij}^{Yf} = 0 \quad i=1, 2 \quad j=1, 2 \quad (12)$$

$$x - x_{ij}^{Zf} = y - y_{ij}^{Zf} = 0 \quad i=1 \quad j=2 \text{ 或 } i=2 \quad j=1 \quad (13)$$

可得到凸轮曲面上十个交点, 即凸轮轮廓与从动件 k_{ij}^V 的接触点 P_{ij}^{Vf} , 在坐标系 $(OXYZ)_f$ 下的坐标记为 $(x_{ij}^{Vf}, y_{ij}^{Vf}, z_{ij}^{Vf})$, 接触点位置随凸轮轮廓形状和凸轮位置而变化。而凸轮轮廓几何曲面在接触点处的法矢由曲面方程式(10)求得

$$\mathbf{n}_{ij}^V = \left(\frac{\partial g_i^f}{\partial x}, \frac{\partial g_i^f}{\partial y}, \frac{\partial g_i^f}{\partial z} \right) = (n_{ij}^{Vx}, n_{ij}^{Vy}, n_{ij}^{Vz}) \quad (14)$$

显然, 凸轮轮廓上接触点处的法线矢量 $\mathbf{n}_{ij}^V$ 与从

动件移动方向 $\mathbf{v}_{ij}^V$ (分别沿 X_f 、 Y_f 、 Z_f 轴方向) 存在夹角 α_{ij}^V , 称为凸轮机构在该点的压力角

$$\cos \alpha_{ij}^V = \frac{\mathbf{n}_{ij}^V \cdot \mathbf{v}_{ij}^V}{|\mathbf{n}_{ij}^V| |\mathbf{v}_{ij}^V|} \quad (15)$$

与实际轴承的接触角、载荷类型与方向等有关, 在凸轮几何曲面等效时需要考虑。

为便于建立凸轮机构的位移方程, 在此建立位移矢量。从动件 k_{ij}^X 复位弹簧在空载状态下, 从动件端点到从动件与机架移动副接触点 O_{ij}^V 之间的矢量记为 $\mathbf{L}_{ij}^V$; δ_{ij}^V 表示从动件 k_{ij}^X 复位弹簧在工作载荷下的变形量; $\mathbf{r}_{ij}^V$ 表示凸轮中心 O_i 到接触点 P_{ij}^{Vf} 的矢量, 如图 11 所示; 以 O_{fi} 表示第 i 个凸轮截面上从动件移动 X 导轨轴线与 Y 导轨轴线的交点, 仅与机架相关, $\mathbf{r}_i$ 表示 O_{fi} 到 O_i 的矢量。

图 11 弹性冗余机构的位移示意图

弹性冗余机构中构件与机架为刚体, 从动件复位弹簧作用于机架使从动件与凸轮保持接触, 机架两固结参考点之间的距离为 L_{Di} , 对应于轴承曲面的中心截面公称直径, 如滑动轴承的轴瓦曲面或滚动轴承的外圈滚道; 回转副的两轴承支承面之间的距离为 L_S , 对应回转副两端轴承中心截面的距离; 轴向从动件与机架上作用点到支承截面的距离为 L_{Bi} , 对应回转副轴向定位端面到轴承中心截面的距离; 上述距离均为机架的固定参数, 与机构运动参数无关。分别建立弹性冗余空间机构在任一支承截面的 X 、 Y 、 Z 方向的位移基本方程

$$|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{ij}^X + (\mathbf{L}_{ij}^X - \delta_{ij}^X)| = L_{Di}/2 \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad (16)$$

$$|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{ij}^Y + (\mathbf{L}_{ij}^Y - \delta_{ij}^Y)| = L_{Di}/2 \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad (17)$$

$$|\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{ij}^Z + (\mathbf{L}_{ij}^Z - \delta_{ij}^Z)| = L_{Bi} \quad i=1 \quad j=2 \text{ 或 } i=2 \quad j=1 \quad (18)$$

回转副轴承结构的等效弹性冗余机构有 8 个径向位移基本方程, 2 个轴向位移基本方程, 而其中待求变量包括 10 个弹性变形量 δ_{ij}^V 以及 $\mathbf{r}_i$ 对应的 6 个坐标变量。共有 10 个基本方程, 16 个待求变量。

3.3 弹性冗余机构静力平衡方程

实际回转副在工作时的外力, 包括驱动力和工作阻力, 均可以有组, 可顺次将力与力矩记为 $\mathbf{F}_{P1} \sim \mathbf{F}_{Pn}$ 、 $\mathbf{M}_{P1} \sim \mathbf{M}_{Pn}$, 在机架坐标系 $(OXYZ)_f$ 中描述为 $\mathbf{F}_{Pn} = (F_{Pn}^X, F_{Pn}^Y, F_{Pn}^Z)$ 、 $\mathbf{M}_{Pn} = (M_{Pn}^X, M_{Pn}^Y, M_{Pn}^Z)$, 可等效作用在点 O_{Pn} , 机架坐标系原点 O_f 到 O_{Pn} 的矢量记为 $\mathbf{r}_{Pn} = (x_{Pn}, y_{Pn}, z_{Pn})$ 。为论述方便, 仅在输入与输出截面处分别施加一组外载荷。

以每个从动件为研究对象, 取分离体如图 12a 所示, 从动件 k_{ij}^V 受凸轮作用(接触)力 $\mathbf{F}_{ij}^V$ 、支承弹簧回复力 $\mathbf{F}_{ij}^{VK}$ 和机架(移动导轨)的支反作用力 $\mathbf{F}_{ij}^{Vf}$; 则由三力汇交平衡条件, 沿从动件移动方向平衡得到 $|\mathbf{F}_{ij}^{VK}| = |\mathbf{F}_{ij}^V| \cos \alpha_{ij}^V$, 或

$$\mathbf{F}_{ij}^V = \mathbf{n}_{ij}^V |\mathbf{F}_{ij}^{VK}| / (|\mathbf{n}_{ij}^V| \cos \alpha_{ij}^V) \quad (19)$$

式中, $i, j=1, 2$; $V=X, Y, Z$, 10 个从动件对应 10 个方程。其中 α_{ij}^V 为凸轮轮廓上接触点的压力角, 由式(15)计算, $\mathbf{F}_{ij}^V$ 沿该接触点的凸轮曲面法向量 $\mathbf{n}_{ij}^V$ 方向。

图 12 弹性冗余机构中构件的受力分析

以凸轮及其旋转轴为研究对象, 取分离体如图 12b 所示, 受外载荷 $\mathbf{F}_{P1} \sim \mathbf{F}_{Pn}$ 、 $\mathbf{M}_{P1} \sim \mathbf{M}_{Pn}$ 以及 10 个从动件 k_{ij}^V 在凸轮接触点的反作用力 $\mathbf{F}_{ij}^V$ 作用, 将机架坐标系原点 O_f 到力作用点(接触点) P_{ij}^{Vf} 的矢径记为 $\mathbf{r}_{ij}^{Vf}$, 如图 12b 所示, 有力、力矩矢量平衡方程

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\mathbf{F}_{ij}^X + \mathbf{F}_{ij}^Y + \mathbf{F}_{ij}^Z) + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_{Pk} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\mathbf{F}_{ij}^X \mathbf{r}_{ij}^{Xf} + \mathbf{F}_{ij}^Y \mathbf{r}_{ij}^{Yf} + \mathbf{F}_{ij}^Z \mathbf{r}_{ij}^{Zf}) + \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_{Pk} \mathbf{r}_{Pk} + \sum_{k=1}^n \mathbf{M}_{Pk} = \mathbf{0} \quad (21)$$

上述力与力矩的矢量平衡方程展开共有 6 个标量平衡方程, 外力和接触点矢量及压力角是已知量, 而 10 个从动件的作用力及其分量是未知量, 由式(19)可以把 10 个从动件的作用力及其分量联系起来, 即 6 个方程 10 个待求未知量。

3.4 弹性冗余机构的物性方程

在弹性冗余机构中用弹簧和弹性轴等效实际回转副的弹性, 在此讨论在载荷作用下从动件弹簧和弹性轴的变形与变形协调。依据刚度定义, 弹性冗余机构中每个从动件的载荷 $\mathbf{F}_{ij}^{VK}$ 与弹性位移 δ_{ij}^V 有

$$\mathbf{F}_{ij}^{VK} = k_{ij}^V \delta_{ij}^V \quad i=1,2 \quad j=1,2 \quad V=X,Y,Z \quad (22)$$

对具体回转副轴承结构而言, k_{ij}^V 具有确定的函数关系, 一般是非线性函数。在弹性冗余机构中, 有 10 个从动件, 因而引入了 10 个方程, 与位移方程联立成为变形协调方程, 但没有引入新的变量。

对于弹性冗余机构的旋转轴, 两端凸轮为几何等效的刚性轮廓, 而回转轴本体属于弹性体, 两端凸轮刚性轮廓之间还会产生弹性线位移和角位移, 如图 13 所示, 而这些弹性变形与旋转轴零件结构、材料和载荷相关, 依据弹性理论^[18], 用简化公式计算, 对于两凸轮轮廓有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = (\varepsilon_{12}^{SX}, \varepsilon_{12}^{SY}, \varepsilon_{12}^{SZ}, \varepsilon_{12}^{\theta X}, \varepsilon_{12}^{\theta Y}, \varepsilon_{12}^{\theta Z})^T = \sum_n \mathbf{C}_{Sn} \mathbf{P}_n \quad (23)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}_{12}$ 为两端凸轮相对位移, $\mathbf{C}_{Sn}$ 为凸轮连接轴等效柔度, 由回转副旋转轴的弹性决定, 可用有限元法计算, 并与轴上的等效载荷 $\mathbf{P}_n$ 一一对应, 其中 $\mathbf{P}_n = (\mathbf{F}_{Pn}, \mathbf{M}_{Pn})^T$ 。

图 13 回转轴本体的弹性变形

式(23)展开共 6 个物性方程, 描述了两凸轮轮廓及连接轴的相对弹性变形与载荷关系, 可求解两端凸轮间的相对位置变化, 即两端凸轮之间的六个增量参数 ε_{12}^{SX} 、 ε_{12}^{SY} 、 ε_{12}^{SZ} 、 $\varepsilon_{12}^{\theta X}$ 、 $\varepsilon_{12}^{\theta Y}$ 、 $\varepsilon_{12}^{\theta Z}$, 其中前三个为线位移, 后三个为角位移, 凸轮轮廓等效几何曲面方程式(10)中 $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{12}$ 。在实际回转副中, 也可由物性方程式(23)反推出两端轴承及轴的安装制造误差引起的附加载荷与变形, 从而由弹性冗余机构模型得出该误差对回转副精度特性的影响。

3.5 基本方程求解

联立弹性冗余空间机构的位移方程式(16)~(18)、静力平衡方程式(20)、(21)、物性方程式(22)、

(23), 称为弹性冗余机构的基本方程, 展开共 32 个方程和 32 个独立待求变量, 可以求解出等效弹性冗余空间机构的从动件位移参数与力参数; 在实际回转副中, 当以回转轴转角作为输入时, θ_{z1} 为自变量, 而力矩平衡方程 $\Sigma \mathbf{M}_z = 0$ 变成外力矩与摩擦力矩的平衡, 与上述独立变量无关, 即有效方程数与独立待求变量数均减少为 31 个。

上述位移方程中的 $\mathbf{r}_{ij}^V$ 与凸轮轮廓形状及凸轮在机架坐标系下的位置相关, 一般无显示表达式, 而变形协调方程中的 k_{ij}^V 为非线性, 上述基本方程需要通过数值方法联立求解, 求解步骤如下。

(1) 假定等效凸轮中心初始位置 $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i0}$, 由凸轮轮廓方程式(10)与从动件移动导轨轴线方程式(11)~(13), 求解凸轮与从动件的接触点 p_{ij}^{Vt} 坐标。

(2) 由接触点 p_{ij}^{Vt} 坐标与凸轮中心位置 $\mathbf{R}_i$ 计算矢量 $\mathbf{r}_{ij}^V$ 、 $\mathbf{r}_i$, 再由位移方程式(16)~(18)求解从动件位移 δ_{ij}^V 。

(3) 由物性方程(22)求从动件载荷 $\mathbf{F}_{ij}^{VK}$, 由方程式(14)、(15)求解接触点法矢量与接触角, 代入式(19)计算凸轮载荷 $\mathbf{F}_{ij}^V$ 。

(4) 由物性方程式(23)计算两端凸轮位移增量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{12}$, 由平衡方程式(20)、(21)左端计算当前位置下的载荷不平衡量, 得到由位移增量及载荷不平衡引起的凸轮位置变化量, 确定新的凸轮位置 $\mathbf{R}_i$, 并返回第(1)步, 当载荷不平衡量满足精度要求时停止迭代, 最后一次计算结果即为上述方程的求解结果。

4 回转副滚动轴承结构精度特性示例

4.1 回转副滚动轴承结构与参数

以图 14 所示的两端采用深沟球轴承支承的典型回转副结构为例, 两端轴承型号均为 P0 级 6312 轴承, 回转副及轴承的基本参数如表 1 所示, 截面 O_{P1} 为输出截面(位移测试截面), 截面 O_{P2} 为输入截面(加载截面), L_1 、 L_2 分别为截面 O_{P1} 、截面 O_{P2} 与截面 O_1 的距离, L_3 为轴承支承跨距。本例以数据说明弹性冗余空间机构的建模过程及其对回转副精度特性的影响, 详细参数确定与求解另文论述。

图 14 中回转副的等效弹性冗余空间机构模型如图 9a 所示, 根据回转副及轴承的结构参数, 对应机构结构参数有 $L_{Di}=117.225$ mm、 $L_{Bi}=15.50$ mm、 $L_S=210$ mm、 $|\mathbf{L}_{ij}^X| = |\mathbf{L}_{ij}^Y| = 22.225$ mm、 $|\mathbf{L}_{ij}^Z| = 15.50$ mm。

条件下的等效凸轮轮廓。在此绘出从动件 k_{11}^X 与 k_{11}^Y 所对应凸轮的中心截面形状, 分别如图 15a、15b 所示, 图 15 中凸轮轮廓波动放大 2 000 倍显示, 凸轮轮廓存在跳动是由于实际轴承中滚珠分布不连续, 其他 8 个从动件对应的凸轮数据不再一一列出。

图 15 k_{11}^X 与 k_{11}^Y 对应等效凸轮中心截面几何轮廓曲线

4.4 回转副精度特性计算示例

4.4.1 弹性冗余机构基本方程的特定位置解

旋转轴转角固定 ($\theta_{z1} = 0$), 输入截面 O_{P2} 施加载荷 $F_{P2} = (1\ 100\text{N}, 0, 0)$, 计算得两端凸轮在机架坐标系下的位置参数 $R_i = (x_i, y_i, z_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi})$, 其中 $R_1 = (10.6, 7.7, -41\ 000, 7.5 \times 10^{-5}, -2.3 \times 10^{-4}, 0)$ 、 $R_2 = (14.4, -4.4, -251\ 000, 7.5 \times 10^{-5}, 1.9 \times 10^{-4}, 0)$, 在此约定 R_i 中位移量单位取 μm , 角度量单位取 rad ; 各从动件的静力与位移结果如表 4 所示。

表 4 从动件静力与位移求解结果

从动件	k_{11}^X	k_{12}^X	k_{11}^Y	k_{12}^Y	k_{12}^Z	k_{21}^X	k_{22}^X	k_{21}^Y	k_{22}^Y	k_{21}^Z
载荷/N	0	550	-35	0	1	0	550	-21	0	-1
位移/ μm	0	6.3	-1.5	0	0.6	0	6.3	-1.1	0	-0.6

4.4.2 定常载荷下回转副任意转角的精度特性计算

旋转轴转角 θ_{z1} 从 0° 变化到 360° , 仅施加轴承轴向预紧载荷 500 N, 回转轴输出截面 O_{P1} 的形心轨迹与法线偏角如图 16a、16b 所示, 其形心在 X 方向位移分量随旋转轴转角变化曲线如图 17 所示。

图 17 中形心轨迹不连续是由于回转副滚动轴承中滚珠分布不连续, 即经轴承联接面映射得到内圈运动轨迹存在跳动, 进而导致等效凸轮轮廓不连续。

4.4.3 变载荷下回转副特定转角精度特性计算

旋转轴转角固定 ($\theta_{z1} = 320^\circ$), 输入截面 O_{P2} 施加沿 X 方向梯度变化载荷 ($0 \sim 3\ 000\text{N}$), 以弹性冗余空间机构模型分别计算在单一参数(其他参数均为理想值)及各参数综合作用下的回转副精度变化曲线, 如图 18 所示, 其中: ① 当仅考虑零件几何误差因

图 16 回转副输出截面形心轨迹与法线偏角变化曲线

图 17 定常载荷下回转副位置 X 方向变化曲线

素并以等效凸轮轮廓形状体现时, 令轴刚度和从动件弹簧刚度为无穷大, 计算结果为曲线 a_1 ; ② 当仅考虑轴承刚度因素并由从动件弹簧刚度表示时, 轴刚度取无穷大, 而等效凸轮形状分别为理想圆 r_0 和理想平面 z_0 , 结果为曲线 a_2 ; ③ 当仅考虑轴刚度因素时, 从动件弹簧刚度取无穷大, 等效凸轮形状为理想圆 r_0 和理想平面 z_0 , 计算结果为曲线 a_3 ; ④ 几何误差、轴承刚度、轴刚度三种因素均取实际参数, 综合结果为曲线 a_4 。

图 18 变载荷回转副特定转角精度特性曲线

4.4.4 变载荷下回转副任意转角精度特性计算

旋转轴转角 θ_{z1} 从 0 变化到 360° , 输入截面 O_{P2} 施加沿 X 方向的正弦变化载荷 $1\ 100 + 400 \sin \theta$ (N), 同样以弹性冗余空间机构模型求解在单一参数(其他参数均为理想值)及各参数综合作用下的回转副精度特性, 计算结果如图 19 所示, 其中曲线 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 计算条件同上。

图19 变载荷下回转副任意位置的精度变化特性曲线

由上述计算结果可见载荷、位置不同时, 各个参数对回转副精度的影响程度并不相同。本算例中, 在载荷较小时, 回转副精度主要受轴承等零件的几何精度影响; 载荷较大时, 轴承支承结构的弹性变形以及轴的变形占主要部分, 且轴的变形比例增大, 本节算例与下节试验设计有意将旋转轴刚度设计偏小, 显示出回转副精度的薄弱环节。当采用不同的回转副结构与刚度参数时其影响程度也不相同, 可利用该模型计算, 为回转副的精度特性分析与精度设计提供依据。

4.5 回转副精度模型的试验测试

本文设计了回转副轴承结构精度模型的简易试验测试装置, 如图20所示, 径向施加载荷, 轴向施加预紧, 并采用力传感器(直线度 ± 0.02 , 量程20 kN)测量记录, 回转轴角位移采用光栅编码器(每转脉冲数1 024, 相对角度误差不大于 0.07°), 弹性变形及线位移采用光栅位移传感器(示值误差不大于 $0.3 \mu\text{m}$)测量。试验记录旋转轴上输出截面径向跳动, 采用三点法^[19]测试并处理数据, 去除测试轴表面形状误差对结果的影响。对应上述的计算分析内容, 分别进行试验测试, 计算数据与试验数据结果如图21~24所示, b_1 为弹性冗余空间机构的计算结果, b_2 为试验测试曲线, b_3 为 b_2 的拟合曲线。图21为旋转轴在 $\theta_{z1}=320^\circ$ 时, 径向载荷变化(0~3 000 N)时输出截面 O_{P1} 形心点X方向位移。

图20 回转副精度模型的试验测试装置

在轴向预紧力500 N下, 无径向载荷时输出截面 O_{P1} 形心点X方向位移如图22所示。

径向载荷恒定为 $F_{P2}=(1\ 100, 0, 0)\text{N}$ 时输出截面 O_{P1} 形心点X方向位移如图23所示。

图21 变载荷下固定位置时回转副精度计算与试验结果

图22 预紧力500 N时回转副任意角度精度计算与试验结果

图23 定常载荷下回转副任意角度的精度计算与试验结果

图24 变载荷下回转副任意角度精度计算与试验结果

径向载荷按正弦规律变化 $1\ 100 + 400\sin\theta$ (N)时输出截面 O_{P1} 形心点X方向位移如图24所示。

上述计算与试验数据初步表明, 实际回转副的精度受载荷、几何、物理等因素的耦合作用, 试验与计算结果的位移变化趋势相近, 波动范围基本一致, 说明利用本文中的机构模型可较真实反映实际回转副精度以及变化特性, 而试验数据曲线与计算曲线形状差别是由于相位计算情况与试验装置中两端轴承内外圈之间实际相位不吻合所致, 同时试验条件未能较好避免振动等环境干扰因素影响。

5 结论

(1) 提出了弹性冗余空间机构模型, 建立了回

转副精度与其轴承零件结构、几何特征、材料与结构弹性的内在联系,弹性冗余空间机构的位移方程、静力平衡方程和物性方程体现几何误差特征与弹性变形的相互转化与耦合作用,较好地表述回转副的精度及其特性。

(2) 回转副精度模型所对应的弹性冗余空间机构是一种新型机构,具有弹性和冗余运动自由度。

(3) 回转副轴承结构的材料弹性约束与预紧可用直动从动件弹簧刚度及初始位置描述;回转副轴承结构及零件间的安装与配合误差可用凸轮从动件支承销在机架上位置反映;回转副轴承零件结构的几何误差特征以等效刚性凸轮轮廓曲面体现。

参 考 文 献

- [1] KOTHALKAR S A, YAJNIK K S. The effect of play in the joints of a function generating mechanism[J]. *Journal of Mechanisms*, 1970, 5(4): 521-532.
- [2] 徐卫良, 张启先. 空间机构运动误差的概率分析和蒙特卡罗模拟[J]. *东南大学学报*, 1988, 18(6): 1-8.
XU Weiliang, ZHANG Qixian. Probability analysis and Monte Carlo simulation of the kinematic errors in a spatial linkage[J]. *Journal of Southeast University*, 1988, 18(6): 1-8.
- [3] SERKOW N A. Primary deviations of mechanism links with sliding and revolute pairs[J]. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2011, 40(2): 107-112.
- [4] LEE S J, GILMORE B J. The determination of the probabilistic properties of velocities and accelerations in kinematic chains with uncertainty[J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1991, 113(1): 84-90.
- [5] JOSKOWICZ L, SACKS E, SRINIVASAN V. Kinematic tolerance analysis[J]. *Computer-Aided Design*, 1997, 29(2): 147-157.
- [6] ZHANG Guojun, CHENG Qiang, SHAO Xinyu, et al. Accuracy analysis for planar linkage with multiple clearances at turning pairs[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 21(2): 36-41.
- [7] 许立新, 李永刚, 李充宁, 等. 轴承间隙及柔性特征对机构动态误差的影响分析[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(7): 30-36.
XU Lixin, LI Yonggang, LI Chongning, et al. Effects of bearing clearance and flexibility on the dynamic errors of mechanisms[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(7): 30-36.
- [8] 吴玉光, 张根源, 李春光. 夹具定位误差分析自动建模方法[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(5): 171-179.
WU Yuguang, ZHANG Genyuan, LI Chunguang. Approach to automated modeling of fixture location errors analysis[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(5): 171-179.
- [9] 李哲. 含间隙弹性平面连杆机构动力分析[J]. *机械工程学报*, 1994, 30(增): 134-139.
LI Zhe. Dynamic analysis of elastic planar linkages with clearances[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1994, 30(Suppl.): 134-139.
- [10] 焦国太, 余跃庆, 梁浩. 机器人位姿误差的结构矩阵分析方法[J]. *应用基础与工程科学学报*, 2001, 9(2-3): 259-265.
JIAO Guotai, YU Yueqing, LIANG Hao. The application of matrix-structural method to the error analysis of robots[J]. *Journal of Basic Science and Engineering*, 2001, 9(2-3): 259-265.
- [11] KIRIDENA V, FERREIRA P M. Mapping the effects of positioning errors on the volumetric accuracy of five-axis CNC machine tools[J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 1993, 33(3): 417-437.
- [12] 杨建国. 加工中心的几何误差和热误差综合补偿模型[J]. *计量学报*, 2001, 22(2): 90-94.
YANG Jianguo. Geometric and thermal error synthesis model for machining centers[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2001, 22(2): 90-94.
- [13] SUN Tao, SONG Yimin, LI Yonggang, et al. Separation of comprehensive geometrical errors of a 3-DOF parallel manipulator based on Jacobian matrix and its sensitivity analysis with Monte-Carlo method[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 24(3): 406-413.
- [14] 刘显军, 洪军, 朱永生, 等. 多支承轴系轴承受力与刚度的有限元迭代计算方法[J]. *西安交通大学学报*, 2010, 44(11): 41-45.
LIU Xianjun, HONG Jun, ZHU Yongsheng, et al. Iterative method to solve bearing's force and stiffness for a multi-support spindle system based on finite analysis[J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2010, 44(11): 41-45.
- [15] 万长森. 滚动轴承的分析方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1987.
WAN Changsen. Analysis of rolling bearings[M]. Beijing: China Machine Press, 1987.
- [16] 王硕桂, 夏源明. 过盈配合量和预紧力对高速角接触球轴承刚度的影响[J]. *中国科学技术大学学报*, 2006, 36(12): 1315-1320.
WANG Shuogui, XIA Yuanming. Effect of the

- interference fit and axial preload in the stiffness of the high-speed angular contact ball bearing[J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2006, 36(12): 1315-1320.
- [17] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford: Oxford University Press, 1978.
- [18] 陈忠安, 王静. 材料力学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2009.
- CHEN Zhongan, WANG Jing. Strength of material[M]. Beijing: Peking University Press, 2009.
- [19] 魏源迁, 庞学慧, 白恩远. 三点法误差分离技术理论分析[J]. 计量学报, 1991, 12(3): 199-205.
- WEI Yuanqian, PANG Xuehui, BAI Enyuan. Theoretical analyses of error separation techniques[J]. Acta Metrologica Sinica, 1991, 12(3): 199-205.
-
- 作者简介:** 王德伦, 男, 1958 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要从事机构学及机械装备数字化设计方法研究。
- E-mail: dlunwang@dlut.edu.cn