

DOI: 10.3901/JME.2013.07.148

# 球面 2-DOF 冗余驱动并联机器人机构误差分析\*

张立杰 李永泉

(燕山大学河北省重型机械流体动力传输与控制实验室 秦皇岛 066004)

**摘要:** 将环路增量法应用于多环路并联机构的误差分析中, 并提出环路选取原则。基于 D-H 参数, 结合冗余驱动机构特点, 采用环路增量法, 建立兼顾位置和姿态两类误差的球面 2-DOF 冗余驱动并联机器人机构误差模型。该误差模型除包含机构的结构参数误差外, 同时还将由于加工和装配等原因出现的各转动副轴线和球心之间的偏差考虑进来, 更全面地反映了机构的工程实际情况。基于该误差模型进一步分析球面机构出现卡死现象的原因, 预估了机构误差, 为该机构样机的运动学标定研究奠定了理论基础。

**关键词:** 2 自由度 球面机构 冗余驱动 误差模型 D-H 变换矩阵

**中图分类号:** TH112

## Error Analysis of Spherical 2-DOF Parallel Manipulator with Actuation Redundancy

ZHANG Lijie LI Yongquan

(Hebei Provincial Key Laboratory of Heavy Machinery Fluid Power Transmission and Control,  
Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

**Abstract:** Loop circuit incremental method is applied to error analysis of multi-loop parallel mechanism, and presents the loop circuit selection principle. Based on D-H parameter and characteristics of mechanism with actuation redundancy, the error model of spherical 2-DOF parallel manipulator with actuation redundancy is established by virtue of loop circuit incremental method which includes both position error and posture error. In the error model, mechanical structural parameter error is considered, at the same time, considering the deviation between axis of each revolute joint and center of sphere from the reason of processing and assembling etc. These make the error model more close to actual project. Based on the error model, the reason of jammed phenomenon which spherical mechanism appears is further analyzed, and the mechanical error is estimated. This lays a theoretical foundation for kinematics calibration research of the prototype.

**Key words:** 2-DOF Spherical manipulator Actuation redundancy Error modeling D-H transformation matrix

## 0 前言

球面 2-DOF 冗余驱动并联机构可作为球面上点的定位机构、球面雕刻机以及卫星自动跟踪设备等<sup>[1-3]</sup>, 是一种很有应用前景的并联机构。其特点是各转动副轴线汇交于球心, 以保证机构末端执行器输出精度, 但由于机构相对复杂, 转动副较多, 各主要零部件加工、装配误差, 会导致球面机构各转动副轴线和球心之间产生偏差, 并且在实际加工装配中是不可避免的, 为此, 在样机加工装配时尽量

减小各转动副轴线和球心之间的偏差对保证该机构不失去球面机构特性至关重要。文献[4]运用空间矢量链分析法建立了一种球面并联数控回转台的误差模型和相应的精度分析概率模型, 研究了该机构的精度问题; 文献[5]利用微分法建立了一种球面 3 自由度并联结构拟人肩关节的几何误差模型; 但文献[4-5]中所采用的两种误差分析方法没有考虑球面机构各转动副轴线和球心之间的偏差, 只得到了球面并联机构的姿态误差模型。环路增量法<sup>[6]</sup>是根据机构的矢量形式的运动方程, 将原始误差看作变量, 通过微分, 并以增量形式代替微分, 利用矢量或矩阵的性质进行化简, 从而得到的一种形式颇为简洁的机构误差方程或称之为机构增量方程, 可求解机

\* 国家自然科学基金(51275438)和河北省自然科学基金(E2011203214)资助项目。20120523 收到初稿, 20130122 收到修改稿

构误差。本文基于 D-H 参数, 采用环路增量法对球面 2-DOF 冗余驱动并联机构进行了误差分析, 得到了基于兼顾位置和姿态两类误差的球面 2-DOF 冗余驱动并联机构的误差模型, 为该机构样机的标定、运动学补偿及应用提供了理论基础。

## 1 球面 2-DOF 冗余驱动并联机构

如图 1 所示, 其输出轴为  $P$ , 它通过 3 个 3R 串联分支  $PB_1A_1$ 、 $PB_2A_2$ 、 $PB_3A_3$  与固定三角形平台  $A_1A_2A_3$  相联接, 机构所有运动链的转动副轴线汇交于球心  $O$  点, 转动副  $A_i$  轴线与中垂线夹角为  $\beta$ , 此处采用 D-H 参数<sup>[7]</sup>表示球面 2-DOF 冗余驱动并联机构构件的结构参数, 与  $j$  连杆相邻的  $i$  连杆相关 D-H 参数即转角  $\theta_{ij}$ 、偏置  $d_{ij}$ 、扭角  $\alpha_i$ 、杆长  $a_i$ , 如图 2 所示。扭角  $\alpha_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 对应各转动副轴线间夹角 (即第  $i$  连杆圆心角), 转角  $\theta_{15}$ 、 $\theta_{21}$ 、 $\theta_{32}$ 、 $\theta_{36}$ 、 $\theta_{43}$ 、 $\theta_{54}$ 、 $\theta_{59}$ 、 $\theta_{67}$ 、 $\theta_{78}$ 、 $\theta_{85}$ 、 $\theta_{98}$  即对应相邻连杆所在平面间夹角, 连杆间夹角从转动副轴线向球心看去逆时针为正, 由球面机构的特点可知, 各转动副轴线皆汇交于球心  $O$  点, 即  $a_i=0$  ( $i=1 \sim 9$ ),  $d_{15}=d_{21}=d_{32}=d_{36}=d_{43}=d_{54}=d_{59}=d_{67}=d_{78}=d_{85}=d_{98}=0$ 。固联在第  $i$  连杆局部坐标系 (简称  $i$  系) 原点皆为球心  $O$  点,  $x_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 轴沿各转动副轴线方向 (其中  $x_2$  和  $x_6$  重合,  $x_9$  和  $x_4$  重合),  $y_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 轴位于  $i$  连杆所在平面上且在实体杆一侧,  $z_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 轴垂直于对应连杆所在平面, 构成右手直角坐标系。图 1 中仅示出环路 II 所包含各连杆局部坐标系, 并建立基坐标系  $Ox_0y_0z_0$  与  $Ox_5y_5z_5$  重合。基于 D-H 参数的相邻  $i$  与  $j$  连杆坐标系之间的变换矩阵

$$T_{ij} = \text{Rot}(x, \theta_{ij}) \text{Trans}(d_{ij}, 0, 0) \text{Trans}(0, 0, a_i) \text{Rot}(z, \alpha_i)$$

$$i=1 \sim 3, 3 \sim 5, 5 \sim 9 \quad j=5, 1, 2, 6, 3, 4, 9, 7, 8, 5, 8$$

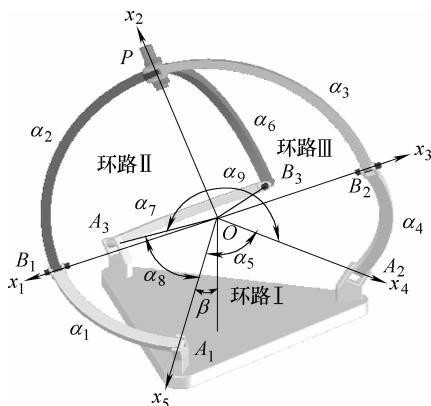


图 1 球面 2-DOF 冗余驱动并联机构

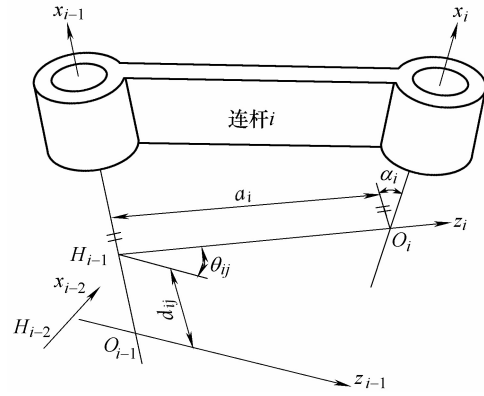


图 2 D-H 参数图

## 2 环路选取

针对球面 2-DOF 冗余驱动并联机构各转动副轴线均汇交于球心  $O$  点的机构特性, 采用环路增量法建立该机构的误差模型, 但为了保证所建误差模型便于分析, 现对环路选取提出以下两条原则。

(1) 为了保证所建误差模型便于统一坐标系, 各个环路应以基坐标系作为环路终点进行选取。

(2) 为了保证所建误差模型能够包含机构的全部结构参数及其几何误差源, 第一个环路可以选取机构最简单的封闭环, 从第二个环路选取开始, 必须包含新的结构参数, 直到保证所选环路包含机构全部结构参数为止, 选完全部  $n$  个环路。

依据上述环路选取原则, 球面 2-DOF 冗余驱动并联机构共选取如图 1 所示三个环路。其中环路 I 由连杆  $\alpha_8$ 、 $\alpha_9$ 、 $\alpha_5$  即基座三轴线形成封闭连接, 环路 II 由连杆  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 、 $\alpha_5$  封闭连接而成, 环路 III 由连杆  $\alpha_8$ 、 $\alpha_7$ 、 $\alpha_6$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 、 $\alpha_5$  封闭连接而成。

## 3 误差模型的建立

$d\alpha_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 表示机构连杆参数误差,  $d\theta_{15}$ 、 $d\theta_{21}$ 、 $d\theta_{32}$ 、 $d\theta_{36}$ 、 $d\theta_{43}$ 、 $d\theta_{54}$ 、 $d\theta_{59}$ 、 $d\theta_{67}$ 、 $d\theta_{78}$ 、 $d\theta_{85}$ 、 $d\theta_{98}$  表示相邻连杆所在平面间夹角误差, 虽然  $a_i$  与  $d_{ij}$  的名义尺寸为零, 但由于机构加工、装配误差的存在, 其误差不为零, 此处  $dd_{15}$ 、 $dd_{21}$ 、 $dd_{32}$ 、 $dd_{36}$ 、 $dd_{43}$ 、 $dd_{54}$ 、 $dd_{59}$ 、 $dd_{67}$ 、 $dd_{78}$ 、 $dd_{85}$ 、 $dd_{98}$  表示各转动副轴向间隙量,  $da_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 表示各转动副轴间距误差 (包括各转动副间隙误差), 则各转动副轴线和球心之间偏差由  $dd_{ij}$  和  $da_i$  共同体现。

### 3.1 基于环路增量法各环路误差模型的建立

对于环路 I, 各连杆对应的圆心角分别为  $\alpha_8$ 、

$\alpha_9$ 、 $\alpha_5$ 。相邻各连杆所在平面间夹角分别为 $\theta_{85}$ 、 $\theta_{98}$ 、 $\theta_{59}$ 。基于环路增量法,得到环路 I 的封闭环方程为

$$T_{85}T_{98}T_{59} = I \quad (1)$$

通过对式(1)进行时间变量微分可以得到

$$(dT_{85})T_{98}T_{59} + T_{85}(dT_{98})T_{59} + T_{85}T_{98}(dT_{59}) = 0 \quad (2)$$

$$dT_{ij} = T_{ij}A_i \quad j = 5, 8, 9 \quad (3)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} S(\delta_i) & d_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad i = 8, 9, 5 \quad (4)$$

式中, $A_i$ 为 $i$ 连杆在 $i$ 系中的位姿误差<sup>[6]</sup>, $S(\delta_i)$ 为 $\delta_i$ 的反对称矩阵<sup>[7]</sup>, $\delta_i$ 为第 $i$ 连杆相对于自身坐标系的微分转动, $d_i$ 为第 $i$ 连杆相对于自身坐标系的微分平动。以下定义方法相同。

联立式(1)~(3)并整理可以得到

$$T_{85}A_8T_{98}T_{59} + T_{85}T_{98}A_9T_{59} + A_5 = 0 \quad (5)$$

在式(5)中各项对应元素之和为零,即等价于下列两个矢量方程

$$\begin{cases} {}^5\delta_8 + {}^5\delta_9 + {}^5\delta_5 = 0 \\ {}^5d_8 + {}^5d_9 + {}^5d_5 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

式(6)即为环路 I 误差模型,其中,各项元素均对应基坐标系下的位置误差和姿态误差,右下标对应 $i$ 连杆,左上标对应基坐标系 $Ox_5y_5z_5$ 。

对于环路 II,各连杆对应的圆心角分别为 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 、 $\alpha_5$ 。相邻各连杆所在平面间夹角分别为 $\theta_{15}$ 、 $\theta_{21}$ 、 $\theta_{32}$ 、 $\theta_{43}$ 、 $\theta_{54}$ ,其中, $\theta_{15}$ 、 $\theta_{54}$ 为驱动关节运动参量, $\theta_{21}$ 、 $\theta_{32}$ 、 $\theta_{43}$ 为从动关节运动参量。由此可以得到环路 II 的封闭环方程为

$$T_{15}T_{21}T_{32}T_{43}T_{54} = I \quad (7)$$

通过对式(7)进行时间变量微分可以得到

$$\begin{aligned} (dT_{15})T_{21}T_{32}T_{43}T_{54} + T_{15}(dT_{21})T_{32}T_{43}T_{54} + \\ T_{15}T_{21}(dT_{32})T_{43}T_{54} + T_{15}T_{21}T_{32}(dT_{43})T_{54} + \\ T_{15}T_{21}T_{32}T_{43}(dT_{54}) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{cases} dT_{ij} = T_{ij}A_i & i = 1, 2, 4, 5 \quad j = 5, 1, 3, 4 \\ dT_{32} = T_{32}A_{32} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} A_i = \begin{pmatrix} S(\delta_i) & d_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & i = 1, 2, 4, 5 \\ A_{32} = \begin{pmatrix} S(\delta_{32}) & d_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

式中, $A_{32}$ 为环路 II 中 3 连杆在 3 系中的位姿误差<sup>[6]</sup>,

$S(\delta_{32})$ 为 $\delta_{32}$ 的反对称矩阵<sup>[7]</sup>, $\delta_{32}$ 为第 3 连杆相对于自身坐标系的微分转动, $d_{32}$ 为第 3 连杆相对于自身坐标系的微分平动。

联立式(7)~(9)并整理得到

$$\begin{aligned} T_{15}A_1T_{15}^{-1} + T_{15}T_{21}A_2T_{21}^{-1}T_{15}^{-1} + T_{54}^{-1}T_{43}^{-1}A_{32}T_{43}T_{54} + \\ T_{54}^{-1}A_4T_{54} + A_5 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

在式(11)中各项对应元素之和为零,即等价于下列两个矢量方程

$$\begin{cases} {}^5\delta_1 + {}^5\delta_2 + {}^5\delta_{32} + {}^5\delta_4 + {}^5\delta_5 = 0 \\ {}^5d_1 + {}^5d_2 + {}^5d_{32} + {}^5d_4 + {}^5d_5 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

式(12)即为环路 II 误差模型,其中,各项元素均对应基坐标系下的位置误差和姿态误差,右下标对应 $i$ 连杆,左上标对应基坐标系 $Ox_5y_5z_5$ 。

对于环路 III,各连杆对应的圆心角分别为 $\alpha_8$ 、 $\alpha_7$ 、 $\alpha_6$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 、 $\alpha_5$ 。相邻各连杆所在平面间夹角分别为 $\theta_{85}$ 、 $\theta_{78}$ 、 $\theta_{67}$ 、 $\theta_{36}$ 、 $\theta_{43}$ 、 $\theta_{54}$ ,其中, $\theta_{78}$ 、 $\theta_{54}$ 为驱动关节运动参量, $\theta_{67}$ 、 $\theta_{36}$ 、 $\theta_{43}$ 为从动关节运动参量, $\theta_{85}$ 为连杆间夹角参量。基于环路增量法,可以得到环路 III 的封闭环方程为

$$T_{85}T_{78}T_{67}T_{36}T_{43}T_{54} = I \quad (13)$$

通过对式(13)进行时间变量微分可以得到

$$\begin{aligned} (dT_{85})T_{78}T_{67}T_{36}T_{43}T_{54} + T_{85}(dT_{78})T_{67}T_{36}T_{43}T_{54} + \\ T_{85}T_{78}(dT_{67})T_{36}T_{43}T_{54} + T_{85}T_{78}T_{67}(dT_{36})T_{43} \times \\ T_{54} + T_{85}T_{78}T_{67}T_{36}(dT_{43})T_{54} + T_{85}T_{78}T_{67}T_{36}T_{43} \times \\ (dT_{54}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{cases} dT_{ij} = T_{ij}A_i & i = 8, 7, 6, 4, 5 \quad j = 5, 8, 7, 3, 4 \\ dT_{36} = T_{36}A_{36} \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} A_i = \begin{pmatrix} S(\delta_i) & d_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & i = 8, 7, 6, 4, 5 \\ A_{36} = \begin{pmatrix} S(\delta_{36}) & d_{36} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (16)$$

式中, $A_{36}$ 为环路 III 中 3 连杆在 3 系中的位姿误差<sup>[6]</sup>, $S(\delta_{36})$ 为 $\delta_{36}$ 的反对称矩阵<sup>[7]</sup>, $\delta_{36}$ 为第 3 连杆相对于自身坐标系的微分转动, $d_{36}$ 为第 3 连杆相对于自身坐标系的微分平动。

联立式(13)~(15)并整理得到

$$\begin{aligned} T_{85}A_8T_{85}^{-1} + T_{85}T_{78}A_7T_{78}^{-1}T_{85}^{-1} + T_{85}T_{78}T_{67}A_6T_{67}^{-1}T_{78}^{-1}T_{85}^{-1} + \\ T_{54}^{-1}T_{43}^{-1}A_{36}T_{43}T_{54} + T_{54}^{-1}A_4T_{54} + A_5 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

在式(17)中各项对应元素之和为零,即等价于下列两个矢量方程

$$\begin{cases} {}^5\delta_8 + {}^5\delta_7 + {}^5\delta_6 + {}^5\delta_{36} + {}^5\delta_4 + {}^5\delta_5 = 0 \\ {}^5d_8 + {}^5d_7 + {}^5d_6 + {}^5d_{36} + {}^5d_4 + {}^5d_5 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

式(18)即为环路III误差模型, 其中, 各项元素均对应基坐标系下的位置误差和姿态误差, 右下标对应  $i$  连杆, 左上标对应基坐标系  $Ox_5y_5z_5$ 。

### 3.2 机构误差模型的建立

根据球面 2-DOF 冗余驱动并联机构结构特点可知, 从动关节运动参量误差共有 6 个, 考虑到连杆  $\alpha_2$  所在平面与连杆  $\alpha_3$  所在平面以及连杆  $\alpha_6$  所在平面之间的 3 个夹角不独立, 之和为  $360^\circ$ , 故 3 个夹角误差也不独立, 之和为零, 因此 3 个从动关节运动参量误差中只考虑两个独立的从动关节运动参量误差  $d\theta_{32}$  和  $d\theta_{36}$ , 共有 5 个独立的从动关节运动参量误差  $d\theta_{21}$ 、 $d\theta_{32}$ 、 $d\theta_{36}$ 、 $d\theta_{43}$ 、 $d\theta_{67}$ ; 同时被动副轴向间隙量  $dd_{32}$  和  $dd_{36}$  确定后, 连杆  $\alpha_2$  和连杆  $\alpha_6$  轴向间隙量也就随之确定, 故只考虑被动副轴向间隙量  $dd_{32}$  和  $dd_{36}$ , 因此共有 5 个独立的被动副轴向间隙量  $dd_{21}$ 、 $dd_{32}$ 、 $dd_{36}$ 、 $dd_{43}$ 、 $dd_{67}$ 。

通过上述分析, 该机构具有的已知原始误差源包括: 驱动关节运动参量误差  $d\theta_{15}$ 、 $d\theta_{54}$ 、 $d\theta_{78}$ , 驱动副轴向间隙量  $dd_{15}$ 、 $dd_{54}$ 、 $dd_{78}$ , 连杆参数误差  $d\alpha_i$  ( $i=1 \sim 9$ ), 基座连杆间夹角误差  $d\theta_{85}$ 、 $d\theta_{98}$ 、 $d\theta_{59}$ , 基座连杆间轴向间隙量  $dd_{85}$ 、 $dd_{98}$ 、 $dd_{59}$ , 各转动副轴间距误差  $da_i$  ( $i=1 \sim 9$ ); 包含 10 个未知误差: 从动关节运动参量误差  $d\theta_{21}$ 、 $d\theta_{32}$ 、 $d\theta_{36}$ 、 $d\theta_{43}$ 、 $d\theta_{67}$ , 被动副轴向间隙量  $dd_{21}$ 、 $dd_{32}$ 、 $dd_{36}$ 、 $dd_{43}$ 、 $dd_{67}$ 。

式(6)、(12)、(18)对应相加, 可得到

$$\begin{cases} {}^5\delta_1 + {}^5\delta_2 + {}^5\delta_{32} + {}^5\delta_{36} + 2{}^5\delta_4 + 3{}^5\delta_5 + \\ {}^5\delta_6 + {}^5\delta_7 + 2{}^5\delta_8 + {}^5\delta_9 = 0 \\ {}^5d_1 + {}^5d_2 + {}^5d_{32} + {}^5d_{36} + 2{}^5d_4 + 3{}^5d_5 + \\ {}^5d_6 + {}^5d_7 + 2{}^5d_8 + {}^5d_9 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

根据冗余驱动机构特点,  $x_2$  和  $x_6$  轴重合, 这决定了式(12)、(18)中存在如下关系

$$\begin{cases} {}^5\delta_2 = {}^5\delta_6 \\ {}^5d_2 = {}^5d_6 \end{cases} \quad (20)$$

由于  $x_2$  和  $x_6$  轴在基坐标系  $Ox_5y_5z_5$  中重合, 故式(20)中位置和姿态决定的 6 个方程中, 只有 4 个方程是独立的, 可以求解  $d\theta_{21}$ 、 $dd_{21}$ 、 $d\theta_{67}$  和  $dd_{67}$  这 4 个变量。

结合式(19)、(20)共包含 10 个独立方程, 可以求解 10 个未知量。此即构成了球面 2-DOF 冗余驱动并联机构的误差模型。

在实际的球面 2-DOF 冗余驱动并联机构中, 由于加工装配误差的存在, 要严格保证 7 条转动副轴线精确地汇交于球心是不可能的, 即各转动副应配有适当的轴向间隙量, 现将  $dd_{21}$ 、 $dd_{32}$ 、 $dd_{36}$ 、 $dd_{43}$ 、 $dd_{67}$  的显式函数关系式导出, 即

$$dd_{21} = -(s\theta_{43}dd_{54} + s\alpha_5s\theta_{15}s\theta_{43}da_1 + da_3 + s\alpha_5s\theta_{15}c\theta_{21}s\theta_{43}da_2 + s\theta_{54}s\alpha_5c\theta_{43} \times s\theta_{21}da_2 + c\theta_{15}c\theta_{54}c\theta_{43}da_1 + s\theta_{54}s\alpha_5c\theta_{43} \times dd_1 + c\theta_{54}c\theta_{43}s\theta_{43}da_5 - s\theta_{54}s\theta_{15}c\theta_{43}c\alpha_5 \times da_1 + c\theta_{21}c\theta_{15}c\theta_{54}c\theta_{43}da_2 + c\alpha_5s\theta_{43}s\theta_{21} \times da_2) / (c\theta_{15}s\theta_{54}c\theta_{43}c\alpha_5 - c\theta_{15}s\theta_{43}s\alpha_{54} + s\theta_{15}c\theta_{54}c\theta_{43}) \quad (21)$$

$$dd_{43} = -(s\alpha_5s\theta_{15}c\theta_{43}dd_{15} - c\theta_{15}c\alpha_5c\theta_{54} \times da_3 + s\theta_{15}c\theta_{43}s\theta_{54}da_4 - c\theta_{43}c\alpha_5c\theta_{21}da_2 - c\theta_{43}c\alpha_5c\theta_{15}da_5 - c\theta_{15}s\theta_{43}c\theta_{54}s\theta_{21}da_2 - c\theta_{15}s\theta_{43}c\theta_{54}dd_{15} + s\alpha_5s\theta_{54}s\theta_{43}da_1 + s\theta_{15}s\theta_{54}da_3 - c\theta_{43}c\alpha_5da_1 + s\alpha_5s\theta_{15}c\theta_{43} \times s\theta_{21}da_2 - c\theta_{43}c\alpha_5c\theta_{15}c\theta_{54}da_4 - c\alpha_5c\theta_{15} \times s\theta_{43}c\theta_{54}dd_{54} + s\alpha_5c\theta_{15}s\theta_{54}s\theta_{43}da_5 + s\alpha_5 \times c\theta_{21}s\theta_{54}s\theta_{43}da_2 + s\theta_{15}da_2s\theta_{54}s\theta_{43} + s\theta_{15}s\theta_{54}c\alpha_5s\theta_{43}s\theta_{21}da_2 + s\theta_{15}s\theta_{54}c\alpha_5s\theta_{43} \times dd_{15}) / (-c\theta_{15}s\theta_{54}c\theta_{43}c\alpha_5 + c\theta_{15}s\theta_{43}s\alpha_5 - s\theta_{15}c\theta_{54}c\theta_{43}) \quad (22)$$

$$dd_{67} = (-s\alpha_8s\alpha_5s\theta_{67}c\theta_{36}dd_{54} - c\theta_{36}c\alpha_5 \times c\alpha_8s\theta_{67}dd_{54} - c\theta_{36}c\theta_{67}da_7 - c\theta_{36}s\theta_{67}dd_{78} - c\theta_{43}da_4 - da_3 - c\theta_{36}da_6 + c\theta_{36}s\theta_{78}c\alpha_8 \times c\theta_{67}s\alpha_5dd_{54} - c\theta_{36}s\theta_{78}c\alpha_5s\alpha_8c\theta_{67}da_5 + s\theta_{36}c\theta_{78}c\alpha_5s\alpha_8c\theta_{67}da_5 - s\theta_{36}c\theta_{78}s\alpha_5c\alpha_8 \times c\theta_{67}da_5) / s\theta_{36} \quad (23)$$

$$dd_{36} = -(s\alpha_5c\alpha_8s\theta_{67}s\theta_{78}dd_{54} - s\theta_{67}s\alpha_8 \times c\alpha_5s\theta_{78}dd_5 + c\alpha_8c\alpha_5c\theta_{67}dd_5 + c\theta_{67}s\alpha_5 \times s\alpha_8dd_{54} + c\theta_{67}dd_{78} - s\theta_{43}da_4 - s\theta_{67}da_7) \quad (24)$$

$$dd_{32} = -(-c\theta_{15}s\theta_{54}dd_{15} - s\alpha_5c\theta_{54}da_1 - c\theta_{15}s\alpha_5da_4 - s\theta_{15}c\theta_{54}dd_{54} - c\theta_{15}s\theta_{54}s\theta_{21} \times da_2 - s\theta_{15}c\alpha_5c\theta_{54}s\theta_{21}da_2 - s\alpha_5c\theta_{54}c\theta_{15} - da_5 - c\theta_{15}s\alpha_5c\theta_{43}da_2 - c\theta_{15}s\theta_{54}c\alpha_5dd_{54} - s\theta_{15}c\alpha_5c\theta_{54}dd_{15} - s\alpha_5c\theta_{54}c\theta_{21}da_2 - s\theta_{15}c\theta_{54}s\theta_{43}da_3 - c\theta_{15}s\theta_{54}s\theta_{43}c\alpha_5da_3) / (c\theta_{15}s\theta_{54}c\theta_{43}c\alpha_5 - c\theta_{15}s\theta_{43}s\alpha_5 + s\theta_{15}c\theta_{54}c\theta_{43}) \quad (25)$$

式中,  $s\theta_i = \sin \theta_i$ ,  $c\theta_i = \cos \theta_i$ ,  $s\alpha_i = \sin \alpha_i$ ,  $c\alpha_i = \cos \alpha_i$ 。

为保证球面 2-DOF 冗余驱动并联机构平稳运行, 要求轴向间隙量  $dd_{ij}$  和轴间距误差  $da_{ij}$  之间应满足式(21)~(25)。否则, 存在过小的轴向间隙量将会导致机构出现卡死现象, 而存在过大的轴向间隙量又会导致机构精确度降低。

### 3.3 末端执行器位姿误差计算模型

在图 1 中, 2 系  $x_2$  轴和 6 系  $x_6$  轴重合, 此处将输出点  $P$  固联于第 2 连杆, 位于 2 系  $x_2$  轴上, 则第 2 连杆在 2 系中的原始位姿误差和第 2 连杆在基坐标系  $Ox_5y_5z_5$  中的位姿误差之间关系为

$$A = T_{15}T_{21}A_2T_{32}T_{43}T_{54} \quad (26)$$

式中,  $A_2$  为第 2 连杆在 2 系中原始位姿误差, 由式(10)定义;  $A$  为第 2 连杆在基坐标系  $Ox_5y_5z_5$  中位姿误差, 即

$$A = \begin{pmatrix} S({}^5\delta_2) & {}^5d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

式中,  ${}^5d_2$ ,  ${}^5\delta_2$  为第 2 连杆相对于基坐标系  $Ox_5y_5z_5$  的微分平动和微分转动, 对应机构末端执行器的位置误差和姿态误差。

## 4 误差分析

图 1 所示球面 2-DOF 冗余驱动并联机构, 取结构参数为  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_7 = 90^\circ$ ,  $\alpha_5 = \alpha_8 = \alpha_9 = 120^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ 。令  $OP$  与  $z_5$  轴夹角为  $\phi$ ,  $OP$  在  $Ox_5y_5$  平面上的投影与  $x_5$  轴正向的夹角为  $\varphi$ 。取运动特性<sup>[8-9]</sup>较好的工作空间  $0^\circ \leq \phi \leq 30^\circ$ ,  $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ 。

位置误差: 由式(19)、(20)可知, 机构末端执行器的位置误差仅与轴间距误差  $da_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 和驱动副轴向间隙量  $dd_{15}$ 、 $dd_{54}$ 、 $dd_{78}$  以及基座连杆间轴向间隙量  $dd_{85}$ 、 $dd_{98}$ 、 $dd_{59}$  有关。此处, 驱动副(即电动机轴)位于基座上, 其驱动副轴向间隙量  $dd_{15}$ 、 $dd_{54}$ 、 $dd_{78}$  以及基座连杆间轴向间隙量  $dd_{85}$ 、 $dd_{98}$ 、 $dd_{59}$ , 由镗床加工精度保证, 可忽略不计。

定义该机构末端执行器位置误差

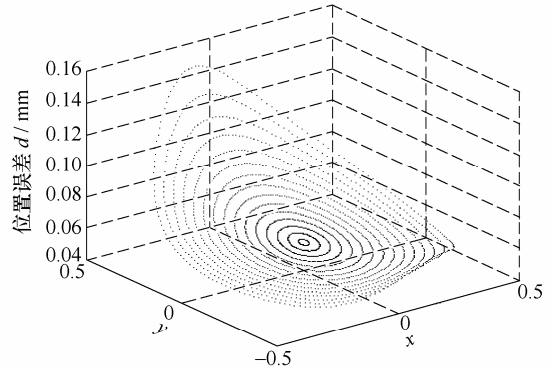
$$d = \|{}^5d_2\| \quad (28)$$

采用三维坐标测量机测量球面 2-DOF 冗余驱动并联机构样机实际尺寸, 根据测量结果, 选取轴间距误差  $da_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 绝对值均为 0.1 mm, 通过对其进行正负组合, 得到共存在  $2^9$  种情况, 并在所选工作空间内, 通过 Matlab 软件, 借助式(28), 计算了所有情况下机构末端执行器位置误差, 得到了末端执行器位置误差分布规律, 通过比较可知, 表 1

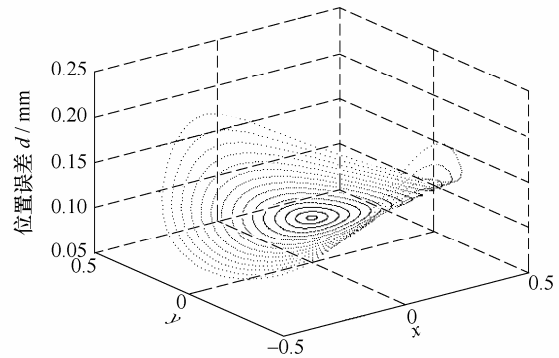
所示第 1 组误差值引起末端执行器位置误差最小。本文只以表 1 所示两组误差值为例, 分别绘制在所选取工作空间区域内末端执行器位置误差分布规律, 如图 3a、3b 所示。可以得出结论, 装配样机时, 轴间距误差  $da_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 按表 1 中第 1 组误差情况进行分配最合理。

表 1 机构各转动副轴间距误差 mm

序号	参数	理论值	误差值	
			第 1 组	第 2 组
1	$\alpha_1$	0	0.1	0.1
2	$\alpha_2$	0	0.1	-0.1
3	$\alpha_3$	0	0.1	0.1
4	$\alpha_4$	0	0.1	-0.1
5	$\alpha_5$	0	0.1	0.1
6	$\alpha_6$	0	0.1	-0.1
7	$\alpha_7$	0	0.1	0.1
8	$\alpha_8$	0	0.1	-0.1
9	$\alpha_9$	0	0.1	0.1



(a) 第1组



(b) 第2组

图 3 末端执行器位置误差分布规律

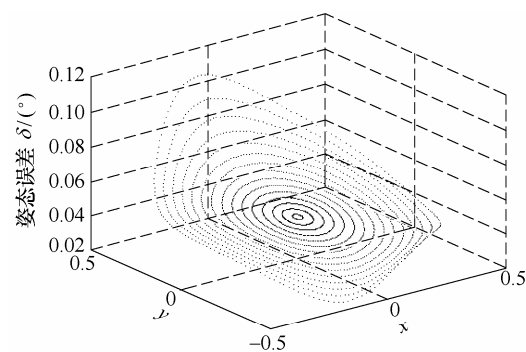
姿态误差: 由式(19)、(20)可知, 机构末端执行器的姿态误差仅与连杆参数误差  $da_i$  ( $i=1 \sim 9$ ) 和驱动关节运动参量误差  $d\theta_{15}$ 、 $d\theta_{54}$  和  $d\theta_{78}$  (由控制方法保证, 此处忽略) 以及基座连杆间夹角误差  $d\theta_{85}$ 、 $d\theta_{98}$  和  $d\theta_{59}$  (由镗床加工精度保证, 此处忽略) 有关。根据文献[10-11]定义该机构末端执行器姿态误差

$$\delta = \|{}^5\delta_2\| \quad (29)$$

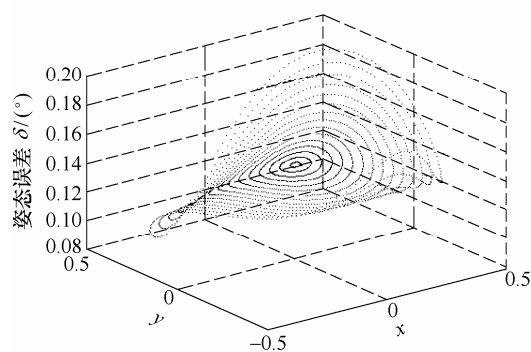
采用三维坐标测量机测量球面 2-DOF 冗余驱动并联机构样机实际尺寸, 根据测量结果, 选取连杆参数误差  $d\alpha_i$  ( $i=1\sim 9$ ) 绝对值均为  $0.1^\circ$ , 通过对其进行正负组合, 得到共存在  $2^9$  种情况, 并在所选工作空间内, 通过 Matlab 软件, 借助式(29), 计算了所有情况下机构末端执行器姿态误差, 得到了末端执行器姿态误差分布规律, 通过比较可知, 表 2 所示第 1 组误差值引起末端执行器姿态误差最小。本文只以表 2 所示两组误差值为例, 分别绘制在所选取工作空间区域内末端执行器姿态误差分布规律, 如图 4a、4b 所示。可以得出结论, 装配样机时, 连杆参数误差  $d\alpha_i$  ( $i=1\sim 9$ ) 按表 2 中第 1 组误差情况进行分配最合理。

表 2 机构结构参数理论值与误差值 ( $^\circ$ )

序号	参数	理论值	误差值	
			第 1 组	第 2 组
1	$\alpha_1$	90	0.1	0.1
2	$\alpha_2$	90	0.1	-0.1
3	$\alpha_3$	90	0.1	0.1
4	$\alpha_4$	90	0.1	-0.1
5	$\alpha_5$	120	0.1	0.1
6	$\alpha_6$	90	0.1	-0.1
7	$\alpha_7$	90	0.1	0.1
8	$\alpha_8$	120	0.1	-0.1
9	$\alpha_9$	120	0.1	0.1



(a) 第1组



(b) 第2组

图 4 末端执行器姿态误差分布规律

## 5 结论

(1) 将环路增量法应用于多环路并联机构的误差分析中, 并提出了环路选取原则。

(2) 基于 D-H 参数, 采用环路增量法, 建立了基于兼顾位置和姿态两类误差的球面 2-DOF 冗余驱动并联机构误差模型。

(3) 通过误差分析可知, 球面 2-DOF 冗余驱动并联机构末端执行器位置误差仅与驱动副轴向间隙量和轴间距误差有关, 末端执行器姿态误差仅与结构参数误差和驱动关节运动参量误差有关。

(4) 当被动副轴向间隙量满足式(21)~(25)时, 可以确保球面 2-DOF 冗余驱动并联机构样机平稳运行, 避免出现卡死现象。

## 参 考 文 献

- [1] OUERFELLI M, KUMAR V. Optimization of a spherical five-bar parallel drive linkage[J]. Transactions of the Asme, Journal of Mechanical Design, 1994, 116: 166-173.
- [2] GOSSELIN C M, CLOUTIER C, RANCOURT D. Kinematic analysis of spherical two-degree-of-freedom parallel manipulators[C]// Proceedings of the 1994 ASME Design Technical Conferences, September 11-14, 1994, Minneapolis, MN, USA. New York: ASME, 1994: 255-262.
- [3] 张立杰. 两自由度并联机器人的性能分析及尺寸优化[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2006.  
ZHANG Lijie. The optimum design and performance criteria of 2-DOF parallel manipulators[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2006.
- [4] 曾宪菁, 黄田, 曾子平. 3-RRR 型数控回转台的精度分析[J]. 机械工程学报, 2001, 37(11): 42-45.  
ZENG Xianjing, HUANG Tian, ZENG Ziping. Accuracy analysis of the 3-RRR NC swivel worktable[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(11): 42-45.
- [5] 李研彪, 金振林, 计时鸣, 等. 一种并联机构拟人肩关节的误差分析[J]. 应用基础与工程科学学报, 2009, 17(3): 446-451.  
LI Yanbiao, JIN Zhenlin, JI Shiming, et al. Error analysis of a parallel anthropomorphic shoulder[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2009, 17(3): 446-451.
- [6] 石则昌, 刘深厚. 机构精确度[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995.

- SHI Zechang, LIU Shenhui. Mechanical definition precision[M]. Beijing: Higher Education Press, 1995.
- [7] 熊有伦. 机器人技术基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003.
- XIONG Youlun. Fundamentals of robot techniques[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2003.
- [8] 张立杰, 牛跃伟, 李永泉. 球面二自由度冗余驱动并联机器人可达工作空间的分析[J]. 中国机械工程, 2009, 20(24): 2974-2978.
- ZHANG Lijie, NIU Yuewei, LI Yongquan. Research on workspace of a spherical 2-DOF parallel manipulator with actuation redundancy[J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(24): 2974-2978.
- [9] 张立杰, 黄真. 一种球面冗余并联机器人机构设计的基础研究[J]. 中国机械工程, 2006, 17(7): 681-684.
- ZHANG Lijie, HUANG Zhen. Fundamental study on the mechanism design of a spherical parallel manipulator with redundancy[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(7): 681-684.
- [10] 李思维, 黄田. 一种含平行四边形支链的 3 自由度并联机构姿态精度综合与装配工艺设计[J]. 机械工程学报, 2003, 39(7): 38-42.
- LI Siwei, HUANG Tian. Orientation accuracy synthesis and assembly process design of a 3-DOF parallel kinematic machine with parallelogram struts[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(7): 38-42.
- [11] 黄田, 李亚, 李思维, 等. 一种三自由度并联机构几何误差建模、灵敏度分析及装配工艺设计[J]. 中国科学(E 辑), 2002, 32(5): 628-635.
- HUANG Tian, LI Ya, LI Siwei, et al. Geometrical error modeling, sensitivity analysis and assembly process design of a 3-DOF parallel manipulator[J]. Science in China (Series E), 2002, 32(5): 628-635.

---

作者简介: 张立杰(通信作者), 男, 1969 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机构及机器人技术。发表论文 40 余篇。

E-mail: ljzhang@ysu.edu.cn

李永泉, 男, 1979 年出生, 博士研究生。主要研究方向为并联机构及机器人技术。发表论文 15 篇。

E-mail: lijia197879@sina.com