DOI: 10.3901/JME.2019.01.062

轴承零件几何误差对圆柱滚子轴承回转误差的影响：第一部分 计算方法*

余永健¹ 陈国定¹ 李济顺² 薛玉君^{2,3}

- (1. 西北工业大学机电学院 西安 710072;
2. 河南科技大学河南省机械设计及传动系统重点实验室 洛阳 471003;
3. 航空精密轴承国家重点实验室 洛阳 471003)

摘要：轴承旋转精度的高低取决于轴承回转误差的大小，而轴承回转误差又取决于轴承零件的几何精度。因此，研究轴承零件几何误差和轴承回转误差的关系对轴承零件加工公差合理分配及成品轴承精度预测有重要意义。为此，提出一种基于几何和载荷约束共同作用下圆柱滚子轴承回转误差计算方法。在几何约束模型中，考虑轴承内圈滚道、外圈滚道和滚子表面的尺寸误差和形状误差，同时还考虑由轴承零件几何误差引起的滚子-滚道接触位置变化。在载荷约束模型中，考虑由轴承零件几何误差引起的滚子-滚道接触力方向的变化。在此基础上，运用 Hertz 接触理论和静力学，推导轴承回转误差计算方法。提出可用于分析轴承零件几何误差、弹性变形和滚子个数三者的耦合效应对轴承内圈回转误差的影响规律的计算方法，为高精度滚动轴承的精度设计、公差分配及加工工艺参数的控制提供理论依据，从而有效提高滚动轴承旋转精度。

关键词：圆柱滚子轴承；旋转精度；回转误差；几何误差；精度设计

中图分类号：TH133

Effect of Geometric Errors of Bearing Components on Motion Error of Cylindrical Roller Bearings Part I: Calculation Method

YU Yongjian¹ CHEN Guoding¹ LI Jishun² XUE Yujun^{2,3}

- (1. School of Mechatronics and Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072;
2. Henan Key Laboratory for Machinery Design and Transmission System,
Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003;
3. State Key Laboratory of Aviation Precision Bearings, Luoyang 471003)

Abstract: The rotation accuracy of assembled bearing depends on motion error of the bearing, and the motion error of the bearing depends on geometric accuracy of bearing components. Therefore, it is crucial to establish the relationship between geometric error of bearing components and motion error of assembled bearing, which contributes to reasonable distribution of machining tolerance of bearing components and prediction for rotational accuracy of assembled bearing. For this reason, a calculation method for motion error of cylindrical roller bearings is proposed based on geometrical and load constraints model of cylindrical roller bearings. The geometrical constraint model considers dimension and form errors in the inner raceway, the outer raceway and rollers and the change of contact positions between the raceways and rollers that result from geometric errors of bearing components. The load constraint model considers the direction variation of the roller-raceway contact force that results from geometric errors of bearing components. On this basis, the calculation method for motion error of the bearing is derived based on Hertz contact theory and statics. The proposed calculation method could be used to analyze the coupling effect of the roller number, load and geometric errors of bearing components on the motion error of the inner ring, which is helpful to for the precision design and tolerance distribution and the control of machining process parameters of bearing components in order to improve efficiently the rotational accuracy of assembled bearing.

Key words: cylindrical roller bearing; rotational accuracy; motion error; geometric error; precision design

* 国家自然科学基金(51375148)、河南省自然科学基金(162300410064)、河南省高等学校重点科研项目(15A460022)和河南省高校科技创新团队支持计划(15IRTSTHN008)资助项目。20180122 收到初稿，20180412 收到修改稿

0 前言

滚动轴承是应用极为广泛的重要机械基础件, 广泛应用于高速铁路和城市轨道交通机械中, 如高速动车组轮毂轴承、地铁轴箱轴承等, 其旋转精度往往直接决定机械系统的精度^[1-3]。由于轴承零件在加工过程中, 不可避免地产生几何误差, 而轴承零件几何误差又是导致轴承回转误差的重要因素之一^[4]。因此, 开展轴承零件几何误差与轴承回转误差关系研究, 对提高成品轴承旋转精度具有极其重要的现实意义。

轴承零件几何误差对滚动轴承的性能影响较大, 国内外学者做了大量的研究工作。目前, 关于球轴承的研究主要集中在轴承非重复性跳动、轴心轨迹、动态性能等方面。NOGUCHI 等^[5-10]建立考虑外圈沟道圆度误差及钢球直径差的球轴承非重复性跳动计算模型, 分析轴承套圈沟道和钢球表面圆度误差、钢球个数和钢球直径差及排布对球轴承非重复性跳动的影响规律。留剑等^[11-13]建立球轴承非重复性跳动计算模型, 研究沟道和钢球波纹度及钢球个数对轴承非重复性跳动影响。JANG 等^[14]分析磁盘用的球轴承非重复性跳动产生的机理, 并研究轴承非重复性跳动传递到磁盘的路径。OKAMOTO 等^[15]建立基于外圈沟道圆度误差的球轴承轴心轨迹预测模型, 分析沟道形状误差、钢球个数和尺寸误差对轴心轨迹大小及形状的影响。WARDLE 等^[16-19]建立考虑轴承零件表面波纹度的球轴承振动力学模型, 研究钢球和套圈沟道的波纹度对轴承动态特性的影响。WANG 等^[20-21]建立考虑轴承零件波纹度的转子—轴承系统的非线性动力学模型, 分析轴承径向游隙、零件的波纹度、阻尼和不平衡力对轴承动态特性的影响。XU 等^[22-24]建立考虑轴承零件波纹度和局部缺陷的二维球轴承动力学模型, 分析轴承零件波纹度和局部微观缺陷对机械系统动态性能的影响规律。关于滚子轴承的研究主要集中在轴承动态性能、载荷分布和径向跳动等方面。SHAO 等^[25-27]建立考虑滚道局部缺陷的圆柱滚子轴承动态性能计算模型, 分析轴承套圈局部缺陷对轴承振动的影响。CHEN 等^[28-30]建立基于滚道圆度误差和滚子尺寸误差的径向跳动计算模型和基于滚子尺寸差的载荷分布静力学计算模型, 分析轴承套圈圆度误差和滚子尺寸误差对轴承旋转精度和载荷分布的影响。BHATEJA 等^[31]建立考虑滚子尺寸差的无保持架空心圆柱滚子旋转精度预测模型, 研究空心圆柱滚子内、外径尺寸误差及滚子圆周间隙对空心圆柱

滚子轴承旋转精度的影响规律。在本课题组前期研究工作中, 建立基于轴承内圈滚道圆度误差的轴承内圈径向跳动计算模型, 分析内圈滚道圆度误差、滚子个数及径向游隙对轴承旋转精度的影响^[32-33]; 建立考虑轴承外圈滚道圆度误差的轴承外圈径向跳动计算模型, 分析外圈滚道圆度误差和滚子个数对轴承外圈径向跳动的的影响, 并对外圈滚道圆度误差进行试验研究, 获得外圈径向跳动与外圈滚道谐波参数的函数关系^[34-36]。

目前, 关于轴承零件几何误差对轴承动态性能和非重复性跳动影响的研究, 国内外学者取得大量的研究成果, 但是关于轴承零件几何误差对轴承旋转精度影响的研究相对较少。在目前的轴承旋转精度研究中, 主要研究几何约束下轴承零件几何误差对轴承径向跳动的的影响, 但是在几何约束和载荷约束共同作用下轴承内圈滚道、外圈滚道和滚子几何误差与轴承径向跳动关系研究鲜见报告。为此, 提出一种基于几何约束和载荷约束的圆柱滚子轴承内圈径向跳动计算方法。在几何约束模型中, 考虑轴承内圈滚道、外圈滚道和滚子尺寸误差和形状误差, 同时还考虑因轴承零件形状误差引起的接触位置变化; 在载荷约束模型中, 考虑轴承零件形状误差引起的滚子-滚道接触力方向的变化。本方法可用于研究轴承零件几何误差、载荷和滚子个数三者的耦合效应对轴承内圈回转误差的影响规律, 为轴承零件的精度设计、公差分配和轴承零件加工工艺参数的控制提供理论基础。

1 基本假设

本文提出的轴承回转误差计算方法基于以下假设。

- (1) 滚子在圆周方向等间隔分布。
- (2) 滚子与套圈间为纯滚动。
- (3) 不考虑滚道和滚子表面轴向几何误差。

2 轴承几何约束模型

圆柱滚子轴承由内圈、外圈、滚动体和保持器组成。由于轴承零件几何误差的存在, 套圈滚道和滚动体轮廓均为非圆轮廓, 如图 1 所示。轴承的整体笛卡尔坐标系 XOY 固定于轴承中心; 第一个局部坐标系 $x_iO_iy_i$ 固定于内圈旋转中心, 且坐标系只随内圈平移; 第二个局部坐标系 $x_{ij}O_{ij}y_{ij}$ 固定于第 j 个滚子圆心处, 其坐标轴与整体坐标轴平行, 并且坐标系仅随滚子平移。假设轴承外圈固定, 内圈旋转。

由于载荷的作用, 轴承内圈向下运动, 并最终达到稳定状态。此时, 内圈圆心由 O 点移动至 o_i 点, 在 X 方向的位移为 X_i , 在 Y 方向的位移为 Y_i 。

图 1 轴承几何约束模型

当内圈逆时针转动 α 角度时, 滚子绕其轴线顺时针自转, 同时也绕轴承轴线公转, 其自转及公转的角度分别由式(1)和(2)计算, 第 j 个滚子的位置角由式(3)计算

$$\gamma_1 = \frac{d_m^2 - D_w^2}{2d_m D_w} \alpha \quad (1)$$

$$\gamma_2 = 0.5\alpha(1 - D_w / d_m) \quad (2)$$

$$\beta_j = 2\pi(j-1)/Z + \alpha(1 - D_w / d_m)/2 \quad (3)$$

式中, γ_1 和 γ_2 分别为滚子自转角度和公转角度; α 为内圈转动的角度; D_w 为滚子直径; d_m 为轴承节圆直径; β_j 为第 j 个滚子位置角; Z 为滚子个数。

在 $x_i o_i y_i$ 坐标系下内圈滚道轮廓半径 $R_i(\theta_i)$ 、在 XOY 坐标系下外圈滚道轮廓半径 $R_e(\theta_e)$ 及在 $x_{ij} o_{ij} y_{ij}$ 坐标系下第 j 个滚子轮廓半径 $R_{ij}(\theta_{ij})$ 的极坐标方程分别表示为

$$R_i(\theta_i) = d_i / 2 + \Delta D_i / 2 + \Delta R_i \quad (4)$$

$$R_e(\theta_e) = d_e / 2 + \Delta D_e / 2 + \Delta R_e \quad (5)$$

$$R_{ij}(\theta_{ij}) = D_w / 2 + \Delta D_{ij} / 2 + \Delta R_{ij} \quad (6)$$

式中, θ_i 为在 $x_i o_i y_i$ 坐标系下内圈轮廓上任一点的位置角; θ_e 为在 XOY 坐标系下外圈轮廓上任一点的位置角; θ_{ij} 为在 $x_{ij} o_{ij} y_{ij}$ 坐标系下滚子轮廓上任一点的位置角; d_i 、 d_e 和 D_w 分别为内圈滚道、外圈滚道和滚子基本直径; ΔD_i 、 ΔD_e 和 ΔD_{ij} 分别为内圈滚道、外圈滚道和第 j 个滚子直径尺寸误差; ΔR_i 、 ΔR_e 和 ΔR_{ij} 分别为内圈滚道圆度误差、外圈滚道圆度误差和第 j 个滚子轮廓圆度误差, 由式(7)~(9)计算

$$\Delta R_i(\theta_i) = \sum_{m=2}^{\infty} C_{im} \cos(m(\theta_i - \alpha) + \varphi_{im}) \quad (7)$$

$$\Delta R_e(\theta_e) = \sum_{m=2}^{\infty} C_{em} \cos(m\theta_e + \varphi_{em}) \quad (8)$$

$$\Delta R_{ij}(\theta_{ij}) = \sum_{m=2}^{\infty} C_{ijm} \cos(m(\theta_{ij} + \gamma_1) + \varphi_{ijm}) \quad (9)$$

式中, C_{im} 、 C_{em} 和 C_{ijm} 分别为内圈滚道、外圈滚道和第 j 个滚子表面轮廓第 m 阶谐波幅值; φ_{im} 、 φ_{em} 和 φ_{ijm} 分别为内圈滚道、外圈滚道和第 j 个滚子表面轮廓第 m 阶谐波初始相位角。

3 轴承内圈回转误差计算方法

当内圈转动某个角度时, 由于载荷作用及轴承零件的几何约束, 轴承内圈沿水平和竖直方向运动, 最终与轴承下方部分滚子接触而达到一个稳定位置。此稳定位置具有唯一性。

由于轴承零件为非圆轮廓, 进而使轴承内圈滚道、滚子表面和外圈滚道之间的接触状态随着内圈转动而变化, 从而导致内圈产生回转误差。为此, 本文提出一种轴承内圈回转误差计算方法, 求解步骤如下所述。首先, 内圈转动一个步长角度, 每个滚子纯滚动至新的位置; 第二步, 计算滚子圆心坐标。轴承下方每个滚子沿径向移动至与外圈滚道接触位置, 计算此时轴承下方每个滚子的圆心坐标; 第三步, 确定轴承下方的承载滚子及其接触点。给定一个内圈位移初值, 计算轴承下方每个滚子与内圈滚道的最小距离, 从而找出与内圈滚道接触的滚子及其接触点; 第四步, 计算内圈滚道支反力的方向。根据内圈滚道与滚子的接触点坐标, 计算出每个承载滚子对内圈的作用力方向, 即内圈滚道支反力方向; 第五步, 计算轴承内圈位移。根据轴承下方的承载滚子, 计算轴承内圈滚道支反力的方向及每个承载滚子表面与内圈滚道的初始最小游隙, 列出内圈在水平和竖直方向上的力平衡方程; 根据给定的内圈位移初值, 通过牛顿法求解非线性方程组, 若第一次求解的内圈位移不满足收敛条件, 将此解作为新的内圈位移初值, 返回第三步重新计算, 直到求解出的新内圈位移满足收敛条件, 从而获得内圈转动任意角度时在水平和竖直方向上的内圈位移。内圈继续转动一个步长角度, 重复以上计算, 内圈旋转若干周, 获得每个转动角度下内圈的水平和竖直位移, 其矢量和为内圈径向位移。其中, 最大径向位移与最小径向位移之差为内圈在径向平面内的跳动量。轴承内圈回转误差计算方法的流程图如图 2 所示。

图2 轴承内圈回转误差计算方法流程图

3.1 滚子圆心坐标的计算

假设轴承下方一个滚子按设定的步长沿径向移动, 直至与外圈滚道接触, 从而获得此时滚子圆心到外圈圆心的距离, 根据几何关系计算出滚子圆心坐标。其中的关键问题是判断滚子与外圈滚道是否接触。为此, 提出滚子表面到外圈滚道最短距离计算方法, 通过此最短距离来判断滚子是否与外圈滚道接触。

当内圈转动任意 α 角度时, 第 j 个滚子滚动至某位置时, 滚子与外圈滚道几何关系如图3所示。由几何关系可知, 外圈滚道上任一点 A 与滚子表面

上任一点 B 的距离为

$$AB = Ao_{ij} - Bo_{ij} \quad (10)$$

$$Ao_{ij} = \sqrt{AO^2 + Oo_{ij}^2 - 2AO \times Oo_{ij} \cos(\Delta\theta_e)} \quad (11)$$

式中, Ao_{ij} 为第 j 个滚子圆心到外圈滚道上 A 点的距离, 由式(11)计算, 式中, AO 为外圈滚道上 A 点的轮廓半径, 由式(5)计算, Oo_{ij} 为给定的外圈圆心到第 j 个滚子中心的距离; $\Delta\theta_e$ 为外圈滚道上 A 点与第 j 个滚子圆心在圆周方向上的夹角, $-\arcsin(D_w/d_e) \leq \Delta\theta_e \leq \arcsin(D_w/d_e)$; Bo_{ij} 为第 j 个滚子自转 γ_1 角度后 B 点轮廓半径, 由式(6)计算, 式中, 滚子表面上 B 点的位置角 θ_B , 与滚子和 B 点所处位置有关。

(a) A 点在直线 Oo_{ij} 上方 (b) A 点在直线 Oo_{ij} 下方

图3 滚子与外圈滚道几何关系

当滚子处于第三象限, 并且外圈滚道上任一点 A 在直线 Oo_{ij} 上方时, 滚子与外圈滚道的几何关系

如图 3a 所示, 根据几何关系, 可推导出此时 B 点的位置角 $\theta_B = \phi_{ej} + \beta_j - \pi$, 式中, $\phi_{ej} = \arccos((Ao_{ij}^2 + Oo_{ij}^2 - AO^2)/(2Ao_{ij} \times Oo_{ij}))$, β_j 为第 j 个滚子的位置角; 当滚子处于第三象限且外圈滚道上任一点 B 在直线 Oo_{ij} 下方时, 滚子与外圈滚道的几何关系如图 3b 所示, 此时 B 点的位置角为 $\theta_B = \pi - \phi_{ej} + \beta_j$ 。同理, 当滚子处于第四象限且外圈滚道上任一点 A 在直线 Oo_{ij} 上方时, 可推导出此时 B 点的位置角 $\theta_B = \beta_j - \pi - \phi_{ej}$; 当滚子处于第四象限且外圈滚道上任一点 A 在直线 Oo_{ij} 下方时, 可推导出此时 B 点的位置角为 $\theta_B = \beta_j - \pi + \phi_{ej}$ 。

在式(10)中, 当 $\Delta\theta_e$ 在其范围内变化时, 在外圈滚道上存在一个 A 点, 滚子表面上存在一个 B 点, 使 A 点到 B 点的距离 AB 最短, 即为滚子表面到外圈滚道的最短距离。

当滚子表面到外圈滚道的最短距离大于收敛误差时, 滚子与外圈滚道接触未接触, 继续移动滚子, 直至最短距离绝对值小于收敛误差, 则认为滚子与外圈滚道接触, 从而获得此时滚子圆心到外圈圆心的距离。通过此距离可计算出滚子的圆心坐标, 如式(12)所示。以此类推, 计算出轴承下方每个滚子与外圈滚道接触时的圆心坐标。

$$\begin{cases} X_{ij} = Oo_{ij} \cos(\beta_j) \\ Y_{ij} = Oo_{ij} \sin(\beta_j) \end{cases} \quad (12)$$

3.2 滚子表面与内圈滚道最短距离的计算

对于给定的内圈位置, 由于轴承内圈滚道和滚子表面存在几何误差, 轴承下方只有部分滚子与内圈滚道接触。为确定轴承下方的承载滚子, 提出了一种滚子表面与内圈滚道最短距离计算方法。通过此最短距离判断轴承下方滚子是否与内圈滚道接触。

当内圈转动任意 α 角度, 且内圈处于某位置时, 滚子与滚道的几何关系如图 4 所示。内圈滚道上任一点 C 与滚子表面上任一点 D 的距离

$$CD = Co_{ij} - Do_{ij} \quad (13)$$

$$Co_{ij} = \sqrt{Co_i^2 + o_i o_{ij}^2 - 2Co_i \times o_i o_{ij} \cos(\Delta\theta_i)} \quad (14)$$

式中, Co_{ij} 为第 j 个滚子圆心到内圈滚道 C 点的距离, 由式(14)计算, 其中, Co_i 为内圈滚道上 C 点的轮廓半径, 由式(4)计算; $o_i o_{ij}$ 为内圈圆心到第 j 个滚子圆心的距离; $\Delta\theta_i$ 为内圈滚道上 C 点与第 j 个滚子圆心在圆周方向上的夹角, $-\arcsin(D_w/d_i) \leq \Delta\theta_i \leq \arcsin(D_w/d_i)$; Do_{ij} 为第 j 个滚子自转 γ_1 角度后 D 点的轮廓半径, 由式(6)计算, 式中, 滚子表面上 D 点的位置角 θ_D , 与滚子所

处象限及 D 点的位置有关。

(a) A 点在直线 $o_i o_{ij}$ 上方

(b) A 点在直线 $o_i o_{ij}$ 下方

图 4 滚子与滚道几何关系

当第 j 个滚子处于第三象限, 且滚子表面上任一点 D 在直线 $o_i o_{ij}$ 上方时, 滚子与内圈滚道的几何关系如图 3a 所示, $\theta_D = \varphi_j + \phi_{ij}$, 式中, $\phi_{ij} = \arccos((Co_{ij}^2 + o_i o_{ij}^2 - Co_i^2)/(2Co_{ij} \times o_i o_{ij}))$, $\varphi_j = \arctan(|Y_i - Y_{ij}|/|X_i - X_{ij}|)$, X_i, Y_i 为内圈圆心坐标。当滚子处于第三象限, 且滚子表面上任一点 D 在直线 $o_i o_{ij}$ 下方时, 滚子与内圈滚道的几何关系如图 3b 所示, $\theta_D = \varphi_j + 2\pi - \phi_{ij}$ 。同理, 当滚子处于第四象限, 且滚子表面上任一点 D 在直线 $o_i o_{ij}$ 上方时, $\theta_D = \pi - \varphi_j - \phi_{ij}$ 。当滚子处于第四象限, 且滚子表面上任一点 D 在直线 $o_i o_{ij}$ 下方时, $\theta_D = \pi - \varphi_j + \phi_{ij}$ 。

在式(13)中, 对于给定的内圈位置, 当 $\Delta\theta_i$ 在其范围内变化时, 在内圈滚道上存在一个 C 点, 滚子表面上存在一个 D 点, 使 CD 的值最小。当 CD 的最小值大于收敛误差时, 第 j 个滚子与内圈滚道不接触, 即第 j 个滚子不承受载荷; 反之, 第 j 个滚子与内圈滚道接触, 即第 j 个滚子承受载荷, 且 C 点为第 j 个滚子与内圈滚道的接触点。

3.3 内圈滚道支反力方向的计算

由于内圈滚道上形状误差的存在, 轴承内圈滚

道为非圆轮廓。因此, 内圈滚道承受的支反力方向不再沿径向方向, 而是沿滚子-内圈滚道接触点处法线方向。根据几何关系, 已知滚子-内圈滚道接触点坐标, 可计算出内圈滚道接触点处的法线方向, 从而得到内圈滚道承受的支反力方向。

当内圈转动 α 角度时, 对于给定的轴承内圈初始位置, 第 j 个滚子与内圈滚道接触点为 G , 如图5所示。则内圈滚道上任意一点的坐标为

$$\begin{cases} X = R_i(\theta_i) \cos(\theta_i) + X_i \\ Y = R_i(\theta_i) \sin(\theta_i) + Y_i \end{cases} \quad (15)$$

式中, X 和 Y 为内圈滚道上任意一点的坐标; $R_i(\theta_i)$ 为内圈滚道上任一点的轮廓半径; X_i 和 Y_i 为内圈的圆心坐标。

图5 内圈滚道支反力方向

由式(15)可推导出内圈滚道上任意一点处的切线斜率 k_1 的表达式, 如式(16)所示。由式(16)可推导出内圈任意一点处法线斜率 k_2 的表达式, 如式(17)所示

$$k_1 = \frac{dY}{dX} = \frac{Y'(\theta_i)}{X'(\theta_i)} = \frac{R_i'(\theta_i) \sin \theta_i + R_i(\theta_i) \cos \theta_i}{R_i'(\theta_i) \cos \theta_i - R_i(\theta_i) \sin \theta_i} \quad (16)$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{R_i(\theta_i) \sin \theta_i - R_i'(\theta_i) \cos \theta_i}{R_i'(\theta_i) \sin \theta_i + R_i(\theta_i) \cos \theta_i} \quad (17)$$

由式(19)可得内圈滚道上任意一点处法线方向与 x_i 正半轴夹角, 如式(20)所示

$$\begin{cases} \theta_j' = \pi + \arctan(k_2) & k_2 > 0 \\ \theta_j' = 2\pi + \arctan(k_2) & k_2 < 0 \end{cases} \quad (18)$$

已知第 j 个滚子与内圈滚道接触点 G 的坐标, 代入式(17)~(18)中, 可获得内圈滚道上 G 点处的法线与 x_i 正半轴夹角 θ_j' , 从而获得内圈滚道接触点处支反力方向。

3.4 内圈位移的计算

为获得内圈转动任意角度时不同载荷下轴承

的内圈位移, 以内圈为研究对象, 通过滚子与内圈滚道最小距离计算方法确定轴承下方的承载滚子, 从而列出内圈在 X 和 Y 方向上的力平衡方程, 最终获得轴承在不同载荷和内圈任意转动角度下的内圈位移。

已知内圈转动 α 角度, 轴承内圈承受的载荷为 F_x 和 F_y 。内圈滚道的支反力为 F_1 、 F_2 、 $\dots$ 、 F_j , 如图6所示。第 j 个滚子与内圈滚道接触点处的弹性变形量

$$\delta_{ij} = (X_i \cos \theta_j' + Y_i \sin \theta_j' - u_{kj}) / 2 \quad (19)$$

式中, u_{kj} 为第 j 个滚子与内圈滚道初始最小游隙, 当内圈圆心与外圈圆心重合时, 根据第3.2节的计算方法, 可获得第 j 个滚子表面与内圈滚道的最小距离, 即为滚子与内圈滚道初始最小游隙。

图6 内圈受力分析

由Hertz弹性接触理论可得内圈滚道与第 j 个滚子接触点处的支反力

$$F_j = K_l \delta_{ij}^{10/9} \quad (20)$$

式中, K_l 为接触变形常数, $K_l = 0.71 l^{8/9} / \eta$; l 为滚子有效长度; η 为等效弹性模量。

已知轴承下方的承载滚子, 可列出内圈力平衡方程如下

$$\sum_{j=1}^{Z_0} K_l \delta_{ij}^{10/9} \cos \theta_j' = F_x \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^{Z_0} K_l \delta_{ij}^{10/9} \sin \theta_j' = F_y \quad (22)$$

式中, Z_0 为承载滚子个数。

式(21)和(22)为非线性方程式, 式中, 未知数为 X_i 和 Y_i 。可采用数值方法求解, 如牛顿法, 从而获得内圈在水平和竖直方向上的位移 X_i 和 Y_i 。

3.5 轴承内圈回转误差计算方法的验证

为验证轴承内圈回转误差计算方法的正确性,

针对轴承内圈滚道轮廓为理想圆, 不同径向载荷作用下的计算结果与采用拟静力学方法计算的结果进行了对比, 如图 7 所示。所选 NU204 型轴承主要参数如表 1 所示。

图 7 结果比较

表 1 圆柱滚子轴承参数

参数	数值
轴承内滚道直径/mm	26.471
轴承外滚道直径/mm	41.51
滚子直径/mm	7.499
径向游隙/mm	0.041
滚子数	12

在不同的径向载荷作用下, 轴承内圈径向位移计算结果与拟静力学计算结果均吻合较好, 相对误差均小于 0.8%。

4 算例

以 NU204 型圆柱滚子轴承为例, 主要参数如表 1 所示。为了验证本文件所提计算方法的普适性, 给出不同圆度误差参数及载荷下内圈旋转若干角度时轴承内圈径向位移历程。

图 8 轴承零件廓形为理想圆时不同载荷下轴承内圈径向位移历程。当轴承承受 3 000 N 径向载荷时, 轴承内圈旋转 924° 所对应的内圈径向位移历程如图 7a 所示。其中, 最大、最小的径向位移分别为 0.030 94 mm 和 0.030 46 mm, 轴承内圈径向位移跳动量为 $0.48 \mu\text{m}$ 。当轴承承受 7 000 N 径向载荷时, 轴承内圈旋转 924° 所对应的内圈径向位移历程如图 7b 所示。其中, 最大、最小的径向位移分别为 0.039 71 mm 和 0.039 24 mm, 轴承内圈径向位移跳动量为 $0.47 \mu\text{m}$ 。随着轴承径向载荷的增大, 内圈径向位移增大, 但轴承内圈径向位移跳动量减小。这是由于径向载荷使轴承零件间产生弹性变形, 从而使内圈径向位移增大。由图 8 可知, 当轴承零件不

存在几何误差时, 轴承内圈径向位移变化很小, 内圈跳动量均在 $0.5 \mu\text{m}$ 以下。

图 8 轴承零件为理想圆时内圈径向位移历程

图 9 轴承零件为非圆廓形时不同载荷下轴承内圈径向位移, 其中, 内圈滚道、外圈滚道和滚子圆度误差幅值分别为 $0.8 \mu\text{m}$ 、 $1.0 \mu\text{m}$ 和 $0.5 \mu\text{m}$, 内圈滚道、外圈滚道和滚子圆度误差阶次分别为 6、8 和 13, 内圈滚道、外圈滚道和滚子直径尺寸误差分别为 $1.0 \mu\text{m}$ 、 $0.5 \mu\text{m}$ 和 $1.0 \mu\text{m}$ 。当轴承承受 3 000 N 径向载荷时, 轴承内圈旋转 924° 所对应的内圈径向位移历程如图 8a 所示。其中, 最大、最小的径向位移分别为 0.031 39 mm 和 0.028 85 mm, 轴承内圈径向位移跳动量为 $2.54 \mu\text{m}$ 。当轴承承受 7 000 N 径向载荷时, 轴承内圈旋转 924° 所对应的内圈径向位移历程如图 8b 所示。其中, 最大、最小的径向位移分别为 0.040 01 mm 和 0.037 6 mm, 轴承内圈径向位移跳动量为 $2.41 \mu\text{m}$ 。随着轴承径向载荷的增大, 内圈径向位移增大, 但轴承内圈径向位移跳动量减小。这是由于径向载荷使轴承零

件间产生弹性变形, 从而使内圈位移增大; 同时, 轴承径向载荷又将承载区轴承零件表面圆度误差波峰压扁, 从而削弱了轴承零件表面圆度误差对轴承内圈跳动量的影响。

图 9 轴承零件为非圆轮廓时内圈径向位移历程

图 10 轴承零件为非圆轮廓形时不同载荷下轴承内圈径向位移历程, 其中, 内圈滚道、外圈滚道和滚子圆度误差幅值分别为 $1.0\ \mu\text{m}$ 、 $1.5\ \mu\text{m}$ 和 $0.3\ \mu\text{m}$, 内圈滚道、外圈滚道和滚子圆度误差阶次分别为 16、5 和 6, 内圈滚道、外圈滚道和滚子直径尺寸误差分别为 $2.0\ \mu\text{m}$ 、 $0.6\ \mu\text{m}$ 和 $2.0\ \mu\text{m}$ 。当轴承承受 3 000 N 径向载荷时, 轴承内圈旋转 924° 所对应的内圈径向位移历程如图 10a 所示。其中, 最大、最小的径向位移分别为 $0.030\ 87\ \text{mm}$ 和 $0.030\ 24\ \text{mm}$, 轴承内圈径向位移跳动量为 $0.63\ \mu\text{m}$ 。当轴承承受 7 000 N 径向载荷时, 轴承内圈旋转 924° 所对应的内圈径向位移历程如图 10b 所示。其中, 最大、最小的径向位移分别为 $0.039\ 67\ \text{mm}$ 和 $0.039\ 17\ \text{mm}$, 轴承内圈跳动量为 $0.5\ \mu\text{m}$ 。对比图 9 和图 10 可以看出, 轴承零件工作表面谐波幅值的增大并不一定使轴承内圈径向位移及其跳动量增大, 这表明轴承零件工作表面谐波阶次显著影响谐波幅值对内圈位移及其跳动量映射程度。

图 10 轴承零件为非圆轮廓时内圈径向位移历程

5 结论

本文建立几何和载荷共同约束下圆柱滚子轴承回转误差的计算方法。本计算方法考虑轴承内圈滚道、外圈滚道和滚子尺寸误差和形状误差, 同时还考虑由轴承零件形状误差引起的滚子-滚道接触点及接触力方向的变化, 并验证该计算方法的正确性。本文提出的轴承回转误差计算方法以轴承结构参数、轴承零件的尺寸误差、形状误差和轴承载荷为输入参数。任意给定轴承零件的尺寸误差、形状误差和轴承载荷等参数的数值算例验证所提出的轴承回转误差计算方法的普适性。本方法可用于研究轴承零件几何误差、载荷和滚子个数三者的耦合效应对轴承内圈跳动量的影响规律, 为滚动轴承精度设计、公差分配及加工工艺参数的控制提供理论依据。

参 考 文 献

- [1] TAKABII J, KHONSARI M M. On the dynamic performance of roller bearings operating under low

- rotational speeds with consideration of surface roughness[J]. Tribology International, 2015(86): 62-71.
- [2] EBERT F. Fundamentals of design and technology of rolling element bearings[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2010, 23(1): 123-136.
- [3] EBERT F. An overview of performance characteristics, experiences and trends of aerospace engine bearings technologies[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2007, 20(4): 378-384.
- [4] SAYLES R S, POON S Y. Surface topography and rolling element vibration[J]. Precision Engineering, 1981, 3(6): 137-144.
- [5] NOGUCHI S, ONO K. Reduction of NRRO in ball bearings for HDD spindle motors[J]. Precision Engineering, 2004, 28(4): 409-418.
- [6] NOGUCHI S, HIRUMA K, KAWA H. The influence of location of balls and ball diameter difference in rolling bearings on the non-repetitive runout (NRRO) of retainer revolution[J]. Precision Engineering, 2005, 29(1): 11-18.
- [7] NOGUCHI S, HIRUMA K. Theoretical analysis of the NRRO of the components of retainer rotation in consideration of diameter difference and disposition of balls in a ball bearing[J]. Japanese Journal of Tribology, 2003, 48(2): 167-176.
- [8] NOGUCHI S, OBINATA S. Influence of the unequal orbital intervals of balls on the NRRO of rotational frequency of the cage in a ball bearing[J]. Japanese Journal of Tribology, 2005, 50(1): 77-85.
- [9] NOGUCHI S, TANAKA K. Theoretical analysis of a ball bearing used in HDD spindle motors for reduction of NRRO[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1999, 35(2): 845-850.
- [10] 李传顺, 毛范海. 深沟球轴承元件几何误差对非重复性跳动影响[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2013(11): 9-13.
LI Chuanshun, MAO Fanhai. The impact of geometrical errors of deep-groove ball bearings on non-repetitive run-out[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2013(1): 9-13.
- [11] 留剑, 洪军, 杨朝晖, 等. 高速精密角接触球轴承旋转精度创成机理研究[J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(11): 72-78.
LIU Jian, HONG Jun, YANG Zhaohui, et al. Running accuracy of high speed precision angular contact ball bearings[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(11): 72-78.
- [12] 袁幸, 朱永生, 洪军, 等. 精密球轴承不可重复跳动影响主轴动特性的预测[J]. 吉林大学学报, 2012(2): 382-387.
- YUAN Xing, ZHU Yongsheng, HONG Jun, et al. Prediction model of spindle dynamic characteristics affected by non-repetitive run-out of precision ball bearing and its application[J]. Journal of Jilin University, 2012(2): 382-387.
- [13] TADA S. Three-dimensional analysis of non-repeatable runout(NRRO) in ball bearing[J]. KOYO Engineering Journal English Edition, 2002(161): 31-37.
- [14] JANG G H, KIM D K, HAN J H. Characterization of NRRO in a HDD spindle system due to ball bearing excitation[J]. IEEE Transaction on Magnetics, 2001, 37(2): 815-819.
- [15] OKAMOTO J, OHMORI T, KITAHARA T. Study on run-out of ball bearings-relation between unroundness of race and locus of shaft in rotation[J]. Japanese Journal of Tribology, 2001, 46(7): 578-584.
- [16] WARDLE F P. Vibration forces produced by waviness of the rolling surfaces of thrust loaded ball bearings Part 1: Theory[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1988, 202(5): 305-312.
- [17] WARDLE F P. Vibration forces produced by waviness of the rolling surfaces of thrust loaded ball bearings Part 2: Experimental validation[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 1988, 202(5): 313-319.
- [18] ONO K, TAKAHASI K. Theoretical analysis of shaft vibration supported by a ball bearing with small sinusoidal waviness[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1996, 32(3): 1709-1714.
- [19] ONO K, OKADA Y. Analysis of ball bearing vibrations caused by outer race waviness[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1998, 120 (4): 901-908.
- [20] WANG Liqin, CUI Li, ZHENG Dezhi, et al. Nonlinear dynamics behaviors of a rotor roller bearing system with radial clearances and waviness considered[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008(21): 86-96.
- [21] JANG G, JEONG S W. Vibration analysis of a rotating system due to the effect of ball bearing waviness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004(269): 709-726.
- [22] XU Lixin, LI Yonggang. Modeling of a deep-groove ball bearing with waviness defects in planar multibody system[J]. Multibody System Dynamics, 2015, 33(3): 229-258.
- [23] XU Lixin, YANG Yuhu. Modeling a non-ideal rolling ball bearing joint with localized defects in planar multibody systems[J]. Multibody System Dynamics, 2015, 35(4): 409-426.
- [24] KANKAR P K, SHARMA S C, HARSHA S P. Vibration

- based performance prediction of ball bearings caused by localized defects[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(3): 847-875.
- [25] SHAO Yimi, LIU Jing, YE Jun. A new method to model a localized surface defect in a cylindrical roller bearing dynamic simulation[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2014, 228(2): 140-159.
- [26] PATEL U A, UPADHYAY S H. Theoretical model to predict the effect of localized defect on dynamic behavior of cylindrical roller bearing at inner race and outer race[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 2014, 228(2): 152-171.
- [27] WANG Fengtao, JING Mingqing, YI Jun, et al. Dynamic modelling for vibration analysis of a cylindrical roller bearing due to localized defects on raceways[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 2015, 229(1): 39-64.
- [28] CHEN Guanci, WANG Baokun, MAO Fanhai. Effects of raceway roundness and roller diameter errors on clearance and runout of a cylindrical roller bearing[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2013, 227(3): 275-285.
- [29] CHEN Guanci, WANG Baokun, MAO Fanhai. Effects of off-sized cylindrical rollers on the static load distribution in a cylinder roller bearing[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 2012, 226(8): 687-696.
- [30] 王宝坤. 圆柱滚子轴承元件几何误差对轴承性能的影响[D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- WANG Baokun. Effect of geometric error of elements on mechanical performance in cylindrical roller bearing[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013.
- [31] BHATEJA C P, PINE R D. The rotational accuracy characteristics of the preloaded hollow roller[J]. *Journal of Lubrication Technology*, 1981, 103(1): 6-12.
- [32] 余永健, 李济顺, 陈国定, 等. 基于内圈滚道廓形的圆柱滚子轴承旋转精度[J]. *航空动力学报*, 2017, 32(1): 155-161.
- YU Yongjian, LI Jishun, CHEN Guoding, et al. Rotational accuracy of the cylindrical roller bearing based on inner raceway profile[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2017, 32(1): 155-161.
- [33] 宋飞, 李济顺, 刘永刚. 圆柱滚子轴承滚道圆度误差对旋转精度的影响[J]. *轴承*, 2011(5): 1-4.
- SONG Fei, LI Jishun, LIU Yonggang. Influence of raceway roundness error on running accuracy of cylindrical roller bearings[J]. *Bearing*, 2011(5): 1-4.
- [34] 余永健, 李济顺, 陈国定, 等. 圆柱滚子轴承旋转精度数值计算及试验研究[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(15): 65-72.
- YU Yongjian, LI Jishun, CHEN Guoding, et al. Numerical calculation and experimental research of rotational accuracy on cylindrical roller bearing[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(15): 65-72.
- [35] LIU Yonggang, LI Jishun, SHI Wenxiang, et al. An algorithm to prediction the radial runout of cylindrical roller bearings[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2011(80-81): 551-555.
- [36] 史文祥, 李济顺, 刘永刚. 圆柱滚子轴承旋转精度的预测仿真[J]. *机械科学与技术*, 2012, 31(4): 612-615.
- SHI Wenxiang, LI Jishun, LIU Yonggang. Forecast and simulation of rotational accuracy of cylindrical roller bearing[J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2012, 31(4): 612-615.

作者简介: 余永健(通信作者), 男, 1979 年出生, 博士研究生。主要研究方向为滚动轴承性能分析及理论。

E-mail: yuyongjian2008@126.com

陈国定, 男, 1956 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为润滑与密封技术、机电系统热分析和现代机械设计理论与方法。

E-mail: gdchen@nwpu.edu.cn

李济顺, 男, 1963 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为精密测量理论与技术、机械产品性能测试、数据采集与信号分析。

E-mail: li_jishun@163.com