

DOI: 10.3901/JME.2015.23.001

# SEM环境下3PRR并联平台奇异区域规避与逃逸控制策略\*

莫嘉嗣 张宪民 邱志成 魏骏杨

(华南理工大学广东省精密装备与制造技术重点实验室 广州 510641)

**摘要:** 微纳操作系统是精密操作、精密加工领域重要组成部分。微纳操作系统的载物平台负责放置样品和大行程搬运样品,需要大行程、高精度的定位。宏微结合的方法能弥补精密定位平台行程不足的缺点,而并联机构能实现高精度定位,因此采用3PRR(3自由度,每条支链包括一个移动副(P)驱动和两个转动副(R))并联平台作为扫描电子显微镜(Scanning electron microscopy, SEM)环境下的宏微结合精密平台中的宏动部分。为了实现大行程、高精度定位,需要分析机构工作空间与奇异性分布。通过推导3PRR运动学方程,求得机构雅可比矩阵,研究雅可比矩阵特性,求得3PRR并联平台非奇异工作空间分布,把机构雅可比矩阵特性与奇异分布引入控制范畴,提出两种奇异区域规避控制策略与一种奇异位型逃逸控制策略。对机构如何规避奇异区域与进入奇异位型后如何快速逃逸提供了理论指导,仿真分析表明,提出的策略对机构精密定位与可控性提供了保障。

**关键词:** 微纳操作; 3PRR; SEM; 并联平台; 奇异; 规避; 逃逸; 控制策略

**中图分类号:** TP242

## Control Strategy Research on Avoid and Escape the Singular Area of the 3PRR Parallel Platform Based on SEM Environment

MO Jiasi ZHANG Xianmin QIU Zhicheng WEI Junyang

(Guangdong Province Key Laboratory of Precision and Manufacturing Technology,  
South China University of Technology, Guangzhou 510641)

**Abstract:** Micro-nano operating system is an important part in the field of precision operation and machining. The sample stage of the micro-nano operating system is used to place and move samples at large-scale stroke; therefore the sample stage needs to possess the features of large stroke and high precision positioning. Macro-micro combination method can make up the stroke deficiency of the precision positioning platform, whereas parallel mechanism can realize high precision positioning. Hence, under the environment of the scanning electron microscopy (SEM), the 3PRR parallel positioning stage, which has 3 degrees of freedom and whose chains each consist of a prismatic joint and two revolute joints, is adopted to constitute the macro-movement part of the macro-micro combination precision positioning platform. In order to achieve the large stroke and high precision positioning, the workspace and singularity distribution of the 3PRR require to be analyzed. The Jacobi matrix is obtained by calculating the kinematics equation. And after the analysis of the characteristics of the Jacobi matrix, the nonsingular workspace distribution of the 3PRR stage is acquired. Then, based on the characteristics of the Jacobi matrix and the singular workspace distribution, two control strategies are presented for avoiding singular area, and one control strategy for escaping the singular position. The corresponding theory of the strategies is provided. The simulation and analytic results show that these strategies can ensure the precision positioning and controllability of the mechanism.

**Key words:** micro-nano operation; 3PRR; SEM; parallel platform; singularity; avoid; escape; control strategy

## 0 前言

微纳操作系统是当今精密制造与加工领域的

重要组成部分。微纳操作是指在微米、亚微米甚至纳米尺度下对物体进行夹取、放置、组装等操作<sup>[1]</sup>。通常微纳操作系统由微纳操作器、载物平台、观测器等组成。微纳操作器负责实现微观层面下的精密夹取和组装等操作;观测器用于实时观测,是沟通微观与宏观的桥梁;载物平台则是实现较大行程搬运和放置样品所必需的<sup>[2]</sup>。

\* 国家自然科学基金重大研究计划(91223201)、广东省自然科学基金团队(S2013030013355)和广东省科技计划(2014B090917001)资助项目。  
20141212 收到初稿, 20150902 收到修改稿

载物平台既要实现高精密定位,又要实现大行程搬运,很难在一个机构上实现<sup>[3]</sup>。因此,可采用宏微结合的方法,在宏动平台上搭载微动平台,利用宏动平台大行程特点,配合微动平台的高精度特点,互相补充,共同实现大行程和高精度的要求<sup>[4-5]</sup>。为了实现这样的互补,宏动平台的精度必须在微动平台的工作空间内,需要达到微米级别的定位。由于微纳操作系统是在微观层面下操作,需要观测器具具备高分辨率观测能力和灵敏的感知能力,扫描电子显微镜(Scanning electron microscopy, SEM)是较理想的观测器<sup>[6]</sup>;国内研究的宏微结合精密定位平台大部分采用串联方式<sup>[7-8]</sup>,驱动形式多采用电磁方式<sup>[8]</sup>。为了高精度的定位,有必要使用并联机构作为宏动平台。本文研究的基于 SEM 环境下的宏微结合精密定位平台中的宏动部分,采用平面三自由度并联机构作为宏动平台。

并联机构运动精度高,负载能力强,响应速度快,被广泛应用在需要高刚度和高精度的应用场合<sup>[9]</sup>。为了实现宏微结合精密定位平台中大行程宏动部分,本文研究一种平面三自由度并联定位平台,本平台每个支链包括一个移动副(P)作为驱动关节和两个转动副(R)作为从动关节,因此简称为平面 3PRR 并联平台<sup>[10]</sup>。

并联机构由于对称的构型,对热膨胀和关节间隙的影响有相互补偿的作用,又由于闭环运动链的存在,各个支链间的相互作用,能实现较高精度的定位。虽然并联机构有这样的优点,但其固有的缺点也不可忽略。并联机构相对串联机构而言,工作空间较小,机构奇异区域较大<sup>[9]</sup>。而并联机构的奇异现象是影响其定位精度和可控性的重要因素。尤其在 SEM 环境下,其腔体非常狭小,为了在有限的空间内控制 3PRR 并联平台,实现高精度定位,必须分析机构的奇异性分布。

国内外的学者对平面并联平台都有一定的研究, MERLET<sup>[11]</sup>的书中介绍了所有可行的平面三自由度并联平台的拓扑构型; MOHAMMADI 等<sup>[12]</sup>推导出平面 3RRR 机构的雅可比矩阵,并进行了工作空间和奇异性分析; GOSSELIN 等<sup>[13]</sup>推导出了平面 3RPR 机构的运动学正解方程,对工作空间和奇异性分析提供了另外一种手段; GOSSELIN 等<sup>[14]</sup>提出使用雅可比矩阵的条件数作为衡量误差传递的指标,并提出全局条件数(Global condition index, GCI)作为全局评价指标。NAGATSU 等<sup>[15]</sup>提出一种宏微结合的双边控制方法用于减少信号噪声和状态空间解耦。

并联机构的雅可比矩阵作为并联机构运动学中的重要组成部分,是评价机构奇异性的指标之一,学者对其研究由来已久,但其应用基本都停留在机构型综合、参数优化和工作空间分析等机构设计阶段。本文把机构的奇异性分析引入机构运动控制阶段,对机构的奇异工作空间分布进行研究,提出了 3PRR 并联定位平台的奇异区域规避控制策略与进入奇异位型后的快速逃逸控制策略,对机构的精密定位和可控性提供了保障。

## 1 系统描述

本平台基于 SEM 的操作环境下开发,尺寸和操作环境受到较大约束。在尺寸方面,由于在 SEM 腔体中工作,因此需要设计成紧凑、小巧的构型;定平台直径小于 0.365 m,高度小于 0.190 m。SEM 腔体要求无磁场和真空工作环境,所以不能使用传统的电磁式电动机,本平台使用德国 PI 公司的直线超声电动机作为驱动,超声电动机具有定位精度高,响应快,无电磁干扰等优点<sup>[16-17]</sup>,适用于本系统开发。在位置测量方面,使用英国雷尼绍公司的 UHV 系列高真空兼容直线光栅作为位置反馈器件,使用欧姆龙光电传感器作为行程保护开关。平面 3PRR 并联定位平台设计如图 1 所示。

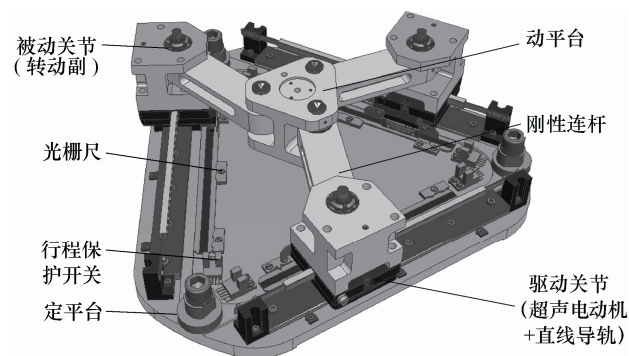


图 1 平面 3PRR 并联定位平台

对图 1 建立坐标系,如图 2 所示,定位平台系统由静平台( $\triangle A_1A_2A_3$ )和动平台( $\triangle C_1C_2C_3$ )通过对称支链连接而成,静平台和动平台均为对称的等边三角形,其外接圆半径分别为  $L_1=0.210$  m、 $L_3=0.092$  m。在静平台的边( $A_1A_2$ 、 $A_2A_3$ 、 $A_3A_1$ )上有滑块  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  形成滑动副驱动关节,驱动距离为  $d_1$ 、 $d_2$ 、 $d_3$ ,滑块  $B_i$  ( $i=1,2,3$ ) 和动平台节点  $C_i$  ( $i=1,2,3$ ) 对应使用连杆相连,连杆两端均使用转动副连接,连杆长度均相等,即  $B_1C_1=B_2C_2=B_3C_3=L_2=0.28$  m,  $B_i$ 、 $C_i$  的转动副为从动关节。点  $P$  为动平台几何中心,并定义为执行器末端。 $Oxy$

为全局固定直角坐标系,  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  为连杆  $B_1C_1$ 、 $B_2C_2$ 、 $B_3C_3$  与  $x$  轴正方向所形成的夹角,  $\theta_p$  为  $\triangle C_1C_2C_3$  的底边与  $x$  轴正方向所形成的夹角。

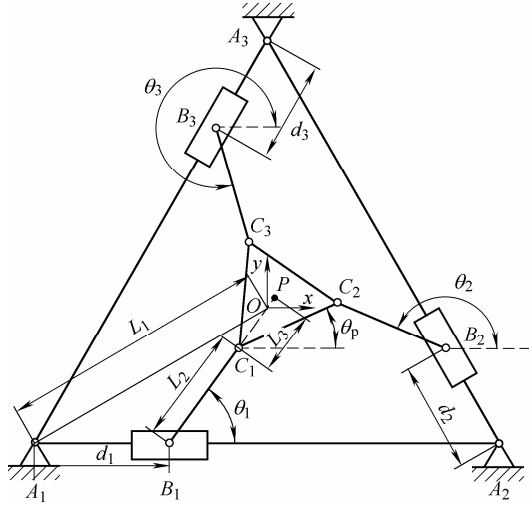


图 2 平面 3PRR 并联定位平台结构简图

通过 Gruebler 方程计算机机构自由度, 见式(1)

$$M = 3(L - 1) - 2J \quad (1)$$

式中  $M$  ——自由度;

$J$  ——低副数目;

$L$  ——构件数目。

通过图 1 可得,  $L=8$ ,  $J=9$ , 因此本并联平台的自由度为 3, 分别为  $O_{xy}$  平面的两个平动  $x_p$ 、 $y_p$  和  $Oxy$  平面的一个绕  $z$  轴的转动  $\theta_p$ , 因此平台需要三个驱动量, 分别为滑块  $B_i$  的运动距离  $d_i (i=1,2,3)$ 。

## 2 奇异区域分析

机构的工作空间大小限制了机构可运动的范围, 平面 3 自由度并联平台的工作空间可分为可达工作空间, 定姿态工作空间, 非奇异工作空间等。为了精确定位, 最关心的是机构的非奇异工作空间。机构的非奇异工作空间通过雅可比矩阵的行列式决定, 在此之前需要先求得机构的运动学逆解和雅可比矩阵。

### 2.1 雅可比矩阵计算

通过闭环矢量法对其中一条支链进行分析求解, 其运动学约束关系如下

$$A_i B_i + B_i C_i + C_i P + PO + OA_i = 0 \quad (2)$$

把矢量方程式(2)分离出  $x$  轴和  $y$  轴投影, 从而列出如下方程组

$$\begin{cases} Q_x = x_p - x_{Ai} - L_3 \cos(\pi/6 + a_i + \theta_p) \\ Q_y = y_p - y_{Ai} - L_3 \sin(\pi/6 + a_i + \theta_p) \end{cases} \quad (3)$$

$$i = 1, 2, 3$$

式中  $x_{Ai}$  ——点  $A_i$  横坐标;

$y_{Ai}$  ——点  $A_i$  纵坐标;

$$Q_x = d_i \cos \alpha_i + L_2 \cos \theta_i;$$

$$Q_y = d_i \sin \alpha_i + L_2 \sin \theta_i;$$

$$\alpha_i = 2\pi(i-1)/3。$$

式(3)两边同时平方后相加, 消去  $\theta_i$  并整理后得如下形式

$$a_i d_i^2 + b_i d_i + c_i = 0 \quad (4)$$

式中  $a_i = 1$ ;

$$b_i = -2Q_x \cos \alpha_i - 2Q_y \sin \alpha_i;$$

$$c_i = Q_x^2 + Q_y^2 - L_2^2。$$

因此, 可求得  $d_{i-1}$  和  $d_{i-2}$  为

$$\begin{cases} d_{i-1} = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \\ d_{i-2} = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \end{cases} \quad (5)$$

式(3)消去  $d_i$ , 并整理后得

$$a_2 \tan^2\left(\frac{\theta_i}{2}\right) + b_2 \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) + c_2 = 0 \quad (6)$$

式中  $a_2 = Q_x \sin \alpha_i - Q_y \cos \alpha_i + L_2 \sin \alpha_i$ ;

$$b_2 = 2L_2 \cos \alpha_i;$$

$$c_2 = Q_x \sin \alpha_i - Q_y \cos \alpha_i - L_2 \sin \alpha_i。$$

因此, 可求得  $\theta_{i-1}$  和  $\theta_{i-2}$  为

$$\begin{cases} \theta_{i-1} = 2 \arctan\left(\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}\right) \\ \theta_{i-2} = 2 \arctan\left(\frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}\right) \end{cases} \quad (7)$$

通过计算, 得到每条支链  $d_i, \theta_i$  共有四组解, 对应连杆  $L_2$  在静平台各边 ( $A_1A_2$ 、 $A_2A_3$ 、 $A_3A_1$ ) 上的以  $L_2$  为腰,  $C_i$  为顶点的等腰三角形 ( $\triangle C_i B_{i-1} B_{i-2}$ ) 的位置和角度, 如图 3 所示, 当  $(x_p, y_p, \theta_p)$  给定后, 每条支链有两种位置状态, 因此三条支链共有  $2^3 = 8$  组解, 这 8 组解中可行的组合只有两种, 如图 3 中实线与虚线所示, 可称为顺时针拓扑或逆时针拓扑。

式(3)对时间  $t$  求导, 然后消去  $\theta_i$ , 可得如下形式

$$L_2 [\cos \theta_i \dot{x}_p + \sin \theta_i \dot{y}_p + L_3 \cos(\pi/6 + a_i + \theta_p - \theta_i) \dot{\theta}_p] = L_2 \cos(\theta_i - a_i) \dot{d}_i \quad (8)$$

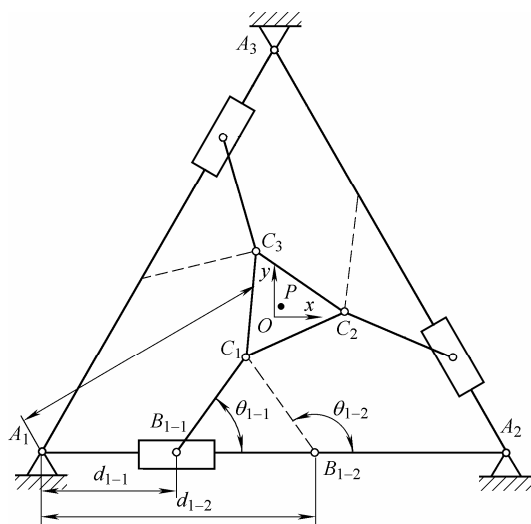


图 3 两组位置逆解(实线为解 1, 虚线为解 2)

式(8)写成矩阵的形式为

$$\begin{aligned} A\dot{X} &= B\dot{d} \quad (9) \\ A &= L_2 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & L_3\sin(\pi/6 - \theta_1 + \theta_p) \\ \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & L_3\sin(\pi/6 - \theta_2 + \theta_p) \\ \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & L_3\sin(\pi/6 - \theta_3 + \theta_p) \end{bmatrix} \\ B &= L_2 \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta_2 - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\theta_3 - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \\ \dot{X} &= (\dot{x}_p \ \dot{y}_p \ \dot{\theta}_p)^T \\ \dot{d} &= (\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3)^T \end{aligned}$$

式(9)中,  $A$  为输出雅可比矩阵,  $B$  为输入雅可比矩阵。若写成统一形式, 即

$$\dot{X} = J\dot{d} \quad (10)$$

式中  $J = A^{-1}B$ 。

## 2.2 工作空间分析

由于机构的两种不同拓扑构型(顺时针拓扑或逆时针拓扑)是对称的, 所以使用任何一个拓扑分析工作空间等价。工作空间分析可使用几何法和区域搜索法。

几何法是采用杆件的几何约束关系, 通过支链运动区域相交的方法求得工作空间; 而区域搜索法是使用运动学逆解方程是否有实数解为判断条件, 通过区域扫描, 把工作空间搜索出来。这两种方法在求 3PRR 工作空间的时候是等价的。

通过几何法, 可得 3PRR 工作空间是个倒置的正三角形, 如图 4 所示。

通过几何约束关系求得 3PRR 工作空间三角形内接圆半径满足式(11)

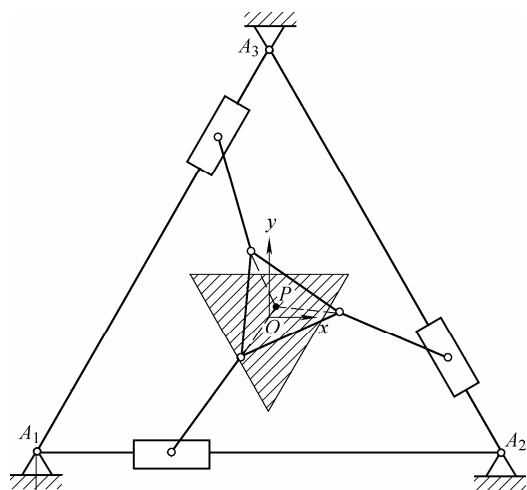


图 4 几何法求 3PRR 工作空间

$$R = L_2 + L_3 \sin\left(\theta_p - \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{L_1}{2} \quad (11)$$

工作空间三角形大小通过其内接圆半径  $R$  衡量,  $R$  是  $\theta_p$  的函数, 在本平台尺寸已定的条件下,  $R$  随着  $\theta_p$  变化, 通过式(11)可得到工作空间和姿态角的关系如图 5 所示。

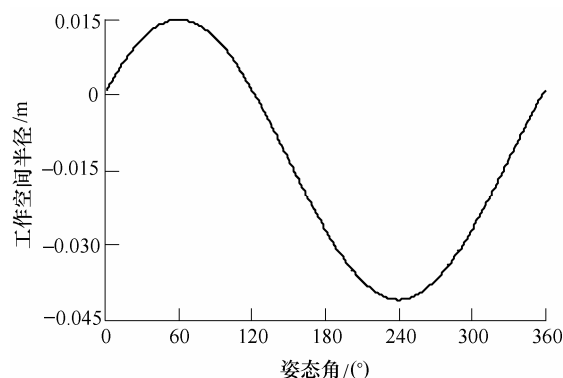
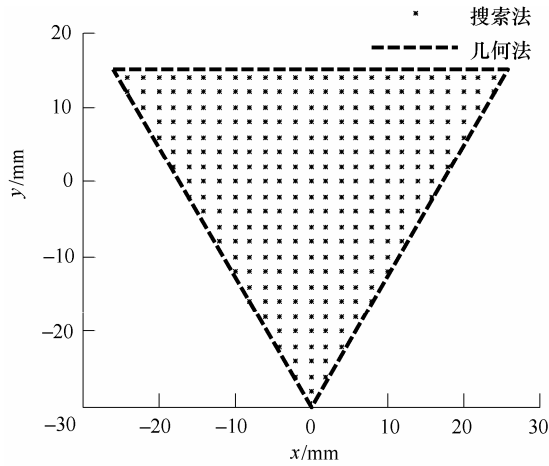


图 5 工作空间半径与姿态角关系

由于机构杆件之间有几何约束关系, 本平台尺寸下姿态角范围是  $32^\circ \sim 88^\circ$ , 通过图 5 可得最大可达工作空间三角形内接圆半径为 0.015 m, 也就是姿态角  $60^\circ$  的时候, 因此定姿态为  $60^\circ$  时达到最大可达工作空间。

式(5)或式(7)的二次函数若取得实数解, 那么驱动距离  $d_i$  和从动连杆角  $\theta_i$  便取得实数解, 对应使  $d_i$  和  $\theta_i$  取得实数解的位置区域就是 3PRR 并联定位平台的可达工作空间。因此, 可通过判别式  $\Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$  和  $\Delta_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 \geq 0$  绘制 3PRR 并联定位平台的可达工作空间。

计算  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  发现, 表达式  $\Delta_1 = \Delta_2$ , 也就是说单独使用  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  绘制工作空间和同时使用  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  绘制工作空间是等价的。图 6 使用搜索法求姿态角  $60^\circ$  的工作空间, 能看出所求结果与几何法所求结果重合。

图 6 搜索法求 3PRR 工作空间( $\theta_p = 60^\circ$ )

### 2.3 非奇异工作空间

GOSSELIN 等<sup>[18]</sup>在研究 3RRR 机构的时候提出了奇异性的分类。

第一类奇异: 矩阵  $B$  奇异的时候, 机构瞬间失去一个或者更多的自由度, 通过式(9)的计算, 本机构发生该奇异的情况是  $\theta_i$  的取值为  $\theta_i = \pi/2$  或  $\theta_2 = 7\pi/6$  或  $\theta_3 = 11\pi/6$ , 也就是至少一根连杆与导轨垂直的时候(图 7a), 若三根连杆同时与导轨垂直, 机构处于拓扑转换的临界点, 并不奇异。当至少一根、至多两根连杆与导轨垂直的时候, 机构末端到达工作空间边界, 属于边界奇异。

第二类奇异: 矩阵  $A$  奇异的时候, 即使驱动关节锁死, 机构末端仍具有自由度, 通过式(9)的计算, 本机构发生该奇异的情况分为三种。

(1) 三根连杆  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3$  中两两共线(伸展或折叠), 而另外一个连杆角满足  $\theta_i = \theta_p + \frac{\pi}{6} + \alpha_i \pm k\pi$  的情况(图 7b)。

(2) 三根连杆  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3$  都平行的情况, 本机构尺寸下不可能出现这种情况。

(3) 三个连杆角同时满足  $\theta_i = \theta_p + \frac{\pi}{6} + \alpha_i \pm k\pi$  的情况, 也即三根连杆延长线汇交于一点的情况(图 7c)。

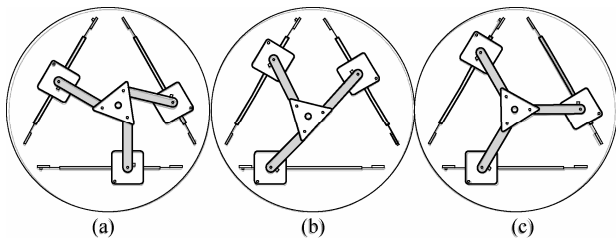
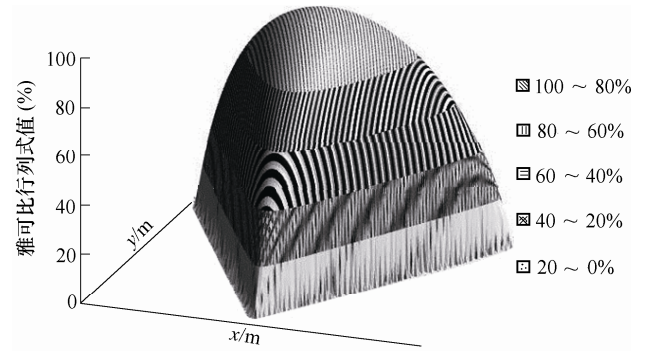


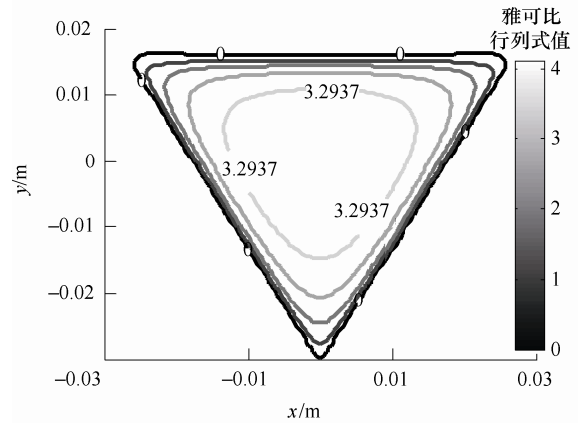
图 7 3PRR 并联平台奇异位型

第三类奇异: 当机构同时发生第一类与第二类奇异的情况, 也就是当矩阵  $J$  奇异的时候, 通过区域搜索法, 可以把雅可比矩阵  $J$  行列式的分布情况

绘制出来, 得到机构非奇异工作空间的分布, 如图 8 所示。



(a) 雅可比行列式值三维分布



(b) 雅可比行列式值等值线图

图 8 3PRR 非奇异工作空间( $\theta_p = 60^\circ$ )

定姿态工作空间的大小是姿态角的函数, 姿态角变化的时候, 工作空间变化规律如图 5 所示。把定姿态工作空间与非奇异工作空间绘制在一张图上, 姿态角取不同的值的时候, 能看出非奇异工作空间与定姿态工作空间重合(图 9), 因此, 当工作空间大小非零, 且姿态角不在极限位置的时候, 3PRR 并联平台没有内部奇异点。

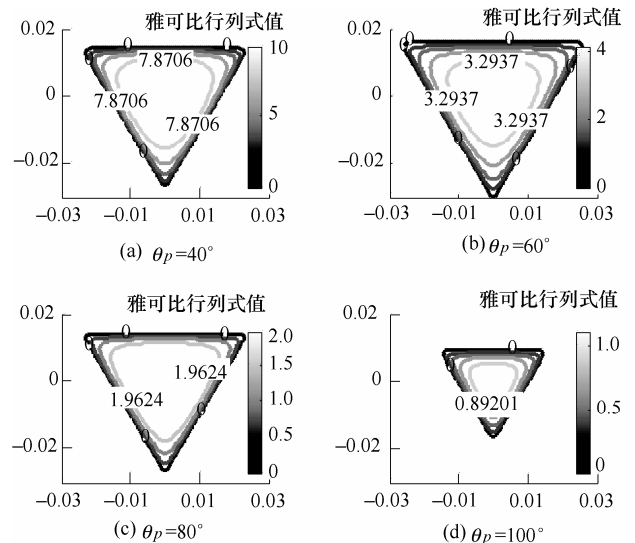


图 9 非奇异工作空间与可达工作空间重合



通过图 8 能看出, 3PRR 并联平台在姿态角非极限位置的时候, 雅可比行列式的分布规律为中间高, 四周低, 奇异边界( $\|J\|=0$ )与工作空间边界重合。因此, 在工作空间内, 越远离工作空间边界的点奇异程度越低, 在原点(0, 0)的雅可比行列式值取得极大值。若把雅可比行列式的值按五等分的百分比分布, 得到图 8a。雅可比行列式值的百分比分布, 反映了机构工作空间的奇异程度, 即使机构雅可比行列式不为 0, 但接近 0, 实际上性能已经恶化严重, 因此本文将雅可比行列式值低于阈值  $tol$  的区域认为是奇异区域。阈值  $tol$  满足

$$tol = 0.2 \max(\|J\|) \quad (12)$$

由于雅可比行列式值分布具有极大值, 因此可使用其极大值作为指标, 衡量不同姿态角下工作空间的奇异分布情况。雅可比行列式的值并不是越大越好, 当雅可比行列式的值很大, 则其逆矩阵的行列式值就很小( $\|J\|=1/\|J^{-1}\|$ ), 其逆矩阵奇异程度增加。针对这种情况, 可使用雅可比矩阵的条件数  $\text{cond}(J) = \|J\| \cdot \|J^{-1}\|$  作为衡量奇异程度的标准, 雅可比矩阵条件数越大, 矩阵越病态, 越奇异。绘制不同姿态角下的雅可比矩阵条件数曲线如图 10 所示。

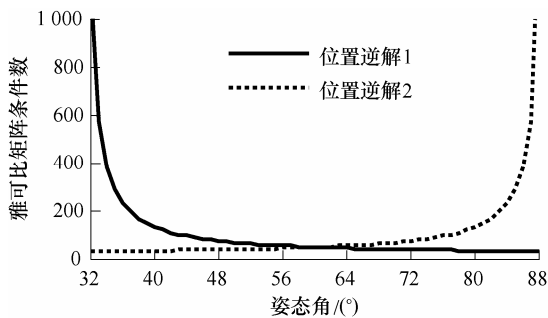


图 10 3PRR 姿态角与雅可比矩阵条件数变化曲线

图 10 的实线对应运动学逆解位置 1, 虚线对应逆解位置 2(图 3), 两个解对应的雅可比矩阵条件数是对称分布的, 位置 1 在姿态角越小的时候越奇异, 位置 2 反之, 这种趋势产生原因是由于逆解位置 1 姿态角越小, 三根连杆延长线越容易交于一点, 越容易产生图 7c 的奇异, 反之逆解位置 2 在姿态角越大的时候越容易发生同样的奇异。两条曲线在姿态角  $\theta_p = 60^\circ$  的时候相交, 说明定姿态  $60^\circ$  的时候两种逆解位置使得机构有同样的性能, 而  $\theta_p = 60^\circ$  也使得工作空间最大, 应优先考虑定姿态  $\theta_p = 60^\circ$  作为起始姿态角。

当 3PRR 并联平台在运动过程中改变姿态角的同时, 定姿态工作空间大小也随之改变, 因此非奇异边界( $\|J\|=0$ )也随之移动, 出现奇异的位置, 都

在工作空间边界, 也就是杆件的一些极限位置, 杆件受尺寸约束, 不可达而产生奇异。

### 3 奇异区域规避控制策略

3PRR 并联平台的奇异区域分布求得后, 可采取奇异区域的规避控制策略。在运动前, 通过运动轨迹规划, 避开奇异位型; 在运动中, 通过规避控制策略, 迫使机构始终在非奇异工作空间内运行。

在姿态角非极限位置的情况下, 3PRR 并联平台奇异区域只存在于工作空间边界外, 因此, 在运动前, 只需要把所运行轨迹规划在倒三角工作空间内(工作空间内切圆半径满足式(11))即可避免奇异。

若运动前的轨迹规划失误, 或运动中因扰动, 使机构有可能在运动过程中进入奇异区域, 则需要加入奇异区域规避控制策略, 使机构实时运行过程中, 实时调整姿态或重规划路径, 使机构运行中规避奇异区域, 并使机构在规避奇异区域之后, 能按原给定轨迹继续运行。

#### 3.1 变姿态规避奇异控制策略

若 3PRR 并联定位平台在非最大工作空间状态下运行, 也即是  $\theta_p \neq 60^\circ$  的时候运行, 若轨迹规划失误, 或因扰动使得轨迹有一部分超出当前姿态角下的工作空间边界( $\|J\|=0$ ), 则机构在运行过程将穿越奇异边界。这时, 由于当前工作空间非最大, 则可在到达奇异边界之前, 调整下一时刻的姿态角, 使工作空间迅速增大, 使机构能在原轨迹不变的情况下变姿态角运行, 穿越原奇异边界, 规避奇异后再按原姿态角继续运行。

轨迹姿态角  $\theta_p$  需要实时调整, 从而增大工作空间, 可通过雅可比行列式  $\|J\|$  判断是否到达工作空间边界, 若  $\|J\|$  小于等于  $tol$ , 则需要调整  $\theta_p$ 。变姿态规避奇异控制策略可用式(13)表示

$$\begin{cases} \theta_p[(k+1)T] = \begin{cases} \theta_p(kT) & \|J\| \geq tol \\ \theta_p(kT) \pm \phi & \|J\| < tol \end{cases} \\ d_i[(k+1)T] = f_{inv}(x_p, y_p, \theta_p) \end{cases} \quad (13)$$

式中  $T$  ——采样时间;

$k$  ——采样时间点序号;

$tol$  ——判断奇异阈值;

$\phi$  ——姿态角调整量;

$f_{inv}$  ——运动学逆解函数。

式(13)的变姿态规避奇异策略, 若使用流程图表示, 则如图 11 所示, 结果见图 12。

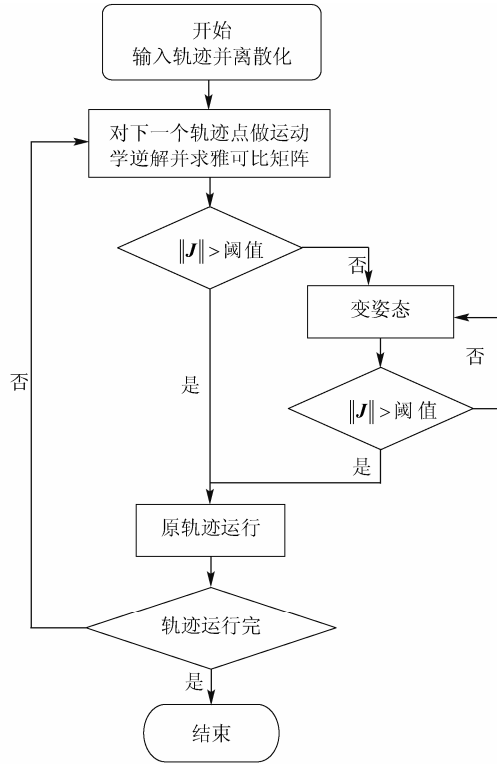


图 11 变姿态规避奇异控制策略流程

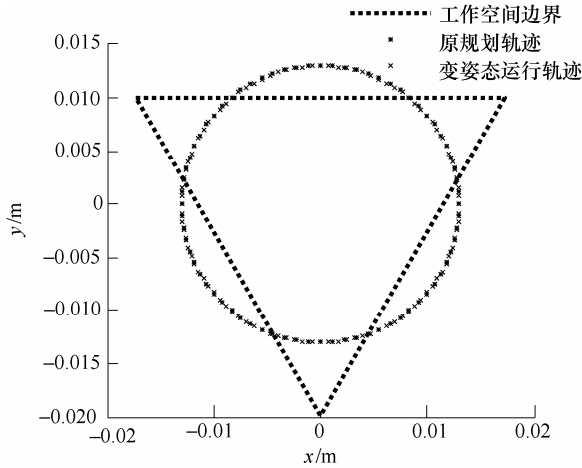


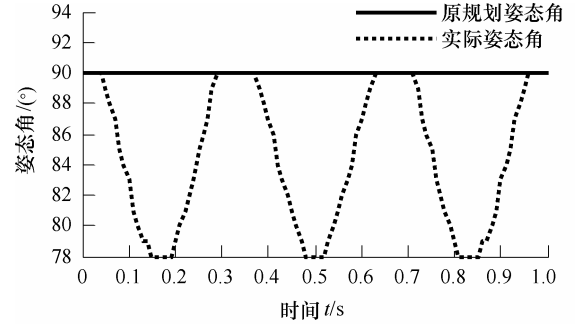
图 12 变姿态规避奇异控制策略仿真结果

算例：运行轨迹式(14)，在姿态角  $\theta_p = 90^\circ$  的时候，原工作空间内切圆半径只有 0.011 25 m，轨迹式(14)是半径为 0.013 m 的圆轨迹，则在运行过程中，轨迹有 3 段超出当前姿态角所求得工作空间的边界，因此，需要调整姿态角，使机构能穿越原奇异边界。

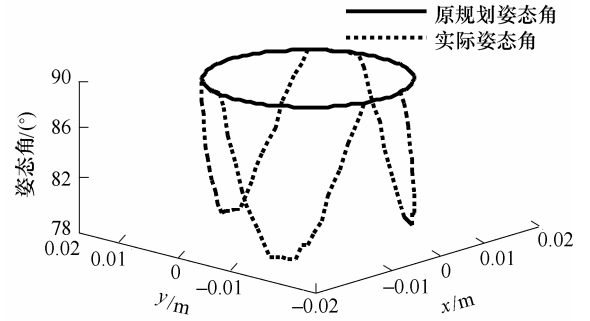
$$\begin{cases} x_p = 0.013 \sin(2\pi t) \\ y_p = -0.013 \cos(2\pi t) \\ \theta_p = 90^\circ \end{cases} \quad (14)$$

通过图 13 能看出，轨迹式(14)运行过程中，若轨迹在非奇异工作空间内，则姿态角维持  $90^\circ$  不变，若轨迹超出奇异边界，进入奇异区域，则改变姿态

角，使雅可比行列式值迅速增大(图 14)，机构顺利穿越原奇异边界。当轨迹再次进入原非奇异工作空间内，则姿态角恢复  $90^\circ$ ，保持原轨迹运行。变姿态规避奇异控制策略运行过程中，实际上雅可比矩阵的行列式也在改变，改变规律如图 14 所示。



(a) 姿态角变化曲线(二维)



(b) 姿态角变化曲线(三维)

图 13 变姿态规避奇异控制策略姿态角变化曲线

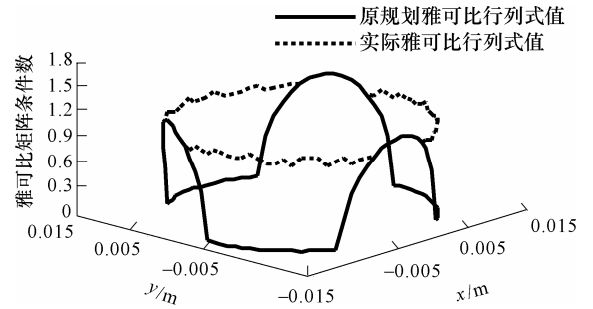


图 14 运行过程中雅可比行列式变化规律

仿真结果表明，变姿态规避奇异控制策略在给定的工作空间大小和轨迹半径均小于最大非奇异工作空间内切圆半径( $\theta_p = 60^\circ$  时,  $R=0.015$  m)的时候适用，该策略能使轨迹保持原给定轨迹运行，但运动过程中姿态角会根据雅可比行列式的值实时调整。

### 3.2 奇异边界规避控制策略

若 3PRR 处于最大工作空间状态下运行，即  $\theta_p = 60^\circ$ ，则不可能通过变姿态使机构规避奇异，这时，需要使用奇异边界规避控制策略，使机构始终在非奇异工作空间内运行。

奇异边界规避控制策略的核心思想是实时判断

下一时刻的雅可比行列式  $\|J\|$  是否大于阈值  $tol$ ，若大于等于  $tol$ ，则按原轨迹运行，若小于  $tol$ ，则需要在线改变轨迹，使轨迹在工作空间边界上运行而不进入奇异区域。

设轨迹点的位置矢量为  $OP$ ， $OP$  是  $(x_p, y_p, \theta_p)$  的函数，本策略可使用式(15)表示

$$\begin{cases} OP[(k+1)T] = \begin{cases} OP(kT) & \|J\| \geq tol \\ OP(kT) - \delta_R & \|J\| < tol \end{cases} \\ d_i[(k+1)T] = f_{inv}(x_p, y_p, \theta_p) \end{cases} \quad (15)$$

式中  $\delta_R$  ——位矢调整量。

式(15)的奇异边界规避控制策略，若使用流程图表示，则如图 15 所示。

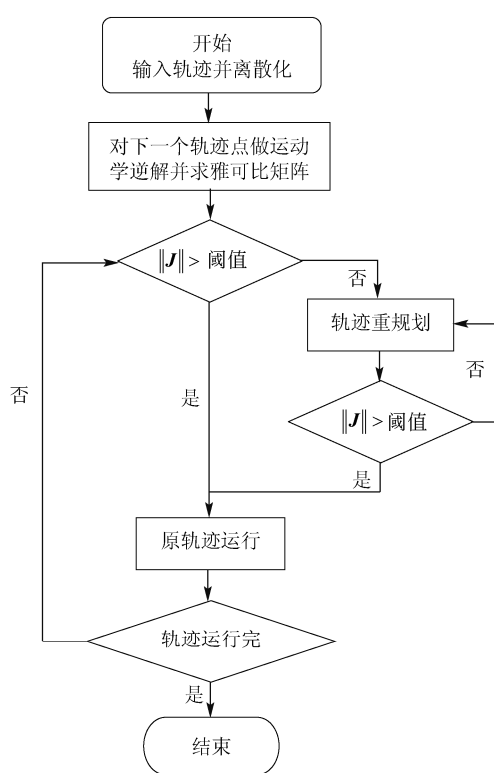


图 15 奇异边界规避控制策略流程

算例：运行轨迹式(16)，由于该轨迹部分在非奇异工作空间内，部分在非奇异工作空间外，且姿态角为  $\theta_p = 60^\circ$ ，因此，需要采用奇异边界规避控制策略，使机构始终在非奇异工作空间内运行

$$\begin{cases} x_p = 0.017\sin(2\pi t) - 0.005 \\ y_p = -0.017\cos(2\pi t) + 0.005 \\ \theta_p = 60^\circ \end{cases} \quad (16)$$

通过仿真，该策略能使机构实时在线规避奇异。如图 16 所示，轨迹在非奇异工作空间内按原轨迹运

行，在接近奇异边界的时候，不断修正路径，使路径沿非奇异工作空间边界内运行，直到再次运行到非奇异工作空间内，继续沿原轨迹运行。

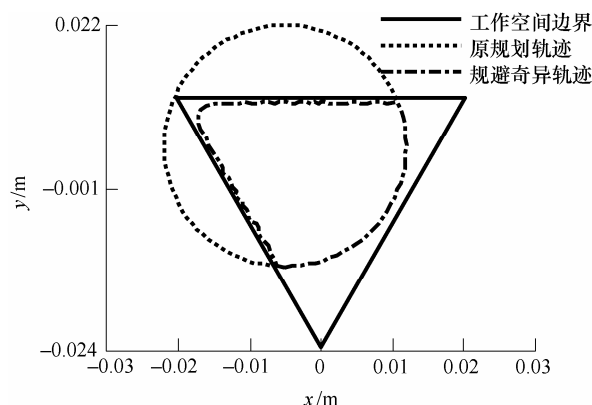


图 16 奇异区域规避策略仿真结果

本策略能使本来进入奇异区域的轨迹自动修正，使机构平滑过渡奇异区域，增强了机构对不同轨迹的适应性。

## 4 奇异位型逃逸控制策略

图 7 列出了 3PRR 并联平台在本文尺寸下可能出现的三种奇异构型，其中图 7a、7b 属于工作空间边界奇异，也就是受杆长约束，不可达而导致的奇异，可采用前述两种奇异规避策略，实现奇异区域的穿越或过渡。图 7c 是本文尺寸下 3PRR 并联平台唯一处在在工作空间内的奇异位型，该奇异位型是姿态角到达极限位置 ( $32^\circ$  或  $88^\circ$ )，末端坐标在坐标原点，三根连杆汇交于一点的情况下发生。

若机构在运行过程中出现扰动使机构到达了奇异位型，或者机构初始位型在奇异位型，则奇异规避控制策略将失效，机构在该位型性能恶化，必须尽快逃逸该位型，因此，本文提出了奇异位型逃逸控制策略，可使机构快速逃逸该三种奇异位型。下文称图 7 的三种奇异位型为奇异位型 a、奇异位型 b、奇异位型 c。虽然机构在这些位型出现奇异，但雅可比行列式的值只是接近 0 而不完全为 0，因此，仍可通过关节的不同运动组合，逃逸这些奇异位型。

下面将分析不同奇异位型逃逸过程中雅可比矩阵条件数和行列式值的变化，通过这两个评价标准，判断是否成功逃逸。由于机构是对称分布的，下文的奇异位型逃逸控制策略可通过机构的对称旋转实现其他对称位型的逃逸。



#### 4.1 奇异位型 a 逃逸

奇异位型 a 是至少一根, 至多两根连杆与导轨成  $90^\circ$  的时候发生。最常见的是单根连杆与导轨成  $90^\circ$ , 针对这种情况, 可采取如图 17 所示的逃逸步骤, 三个关节驱动量如图 18 变化, 则运行过程中的雅可比行列式的值将如图 19 所示, 从 0 开始迅速增大, 而雅可比矩阵的条件数将如图 20 迅速减少, 雅可比矩阵从病态矩阵变为良态矩阵, 机构从奇异中成功逃逸。

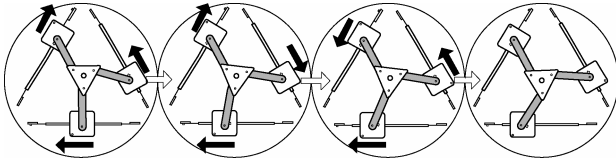


图 17 逃逸步骤

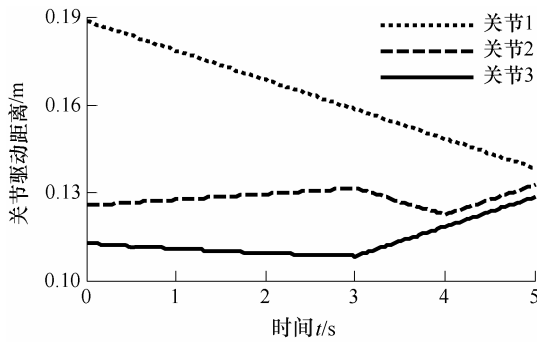


图 18 逃逸过程关节运动规律

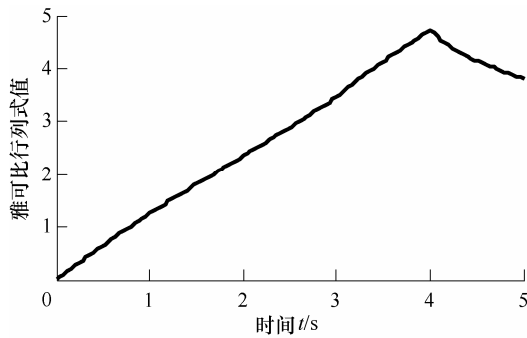


图 19 逃逸过程雅可比行列式变化曲线

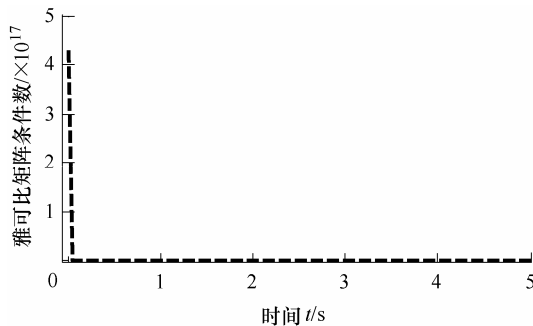


图 20 逃逸过程雅可比矩阵条件数变化曲线

#### 4.2 奇异位型 b 逃逸

奇异位型 b 是两根连杆平行的时候发生, 这种情况会使得机构拓扑不符合图 3 两种解的情况, 应尽量避免。当这种情况发生的时候, 逃逸过程除了需要逃逸奇异, 还需要把机构拓扑纠正, 因此在运行过程中涉及拓扑的转换, 在转换过程中, 会引入奇异位型 a 的情况, 如图 21 所示, 连杆 1 和连杆 2 共线, 导致关节 2 的拓扑不正确, 因此需要把关节 2 纠正为正确的拓扑。

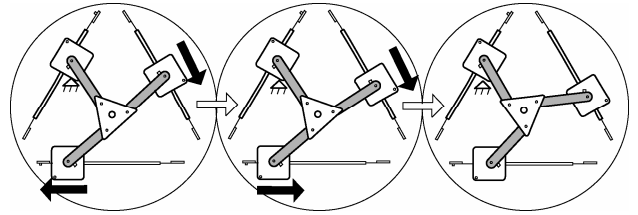


图 21 逃逸步骤

采取如图 21 所示的逃逸步骤, 首先把关节 3 固定, 由于使用了超声电动机驱动, 在没有驱动信号的时候, 超声电动机具有自锁特性, 因此可认为关节 3 已固定, 另外的关节驱动量如图 22 变化, 则运行过程中的雅可比行列式的值将如图 23 所示, 从 0 开始迅速增大, 当连杆 2 与导轨垂直, 也就是拓扑转换的临界点的时候, 雅可比行列式迅速增大, 当过了临界点, 雅可比行列式趋于一个大于 0 的稳值, 而雅可比矩阵的条件数将如图 24 迅速减少, 雅可比矩阵从病态矩阵变为良态矩阵, 机构从奇异中成功逃逸。

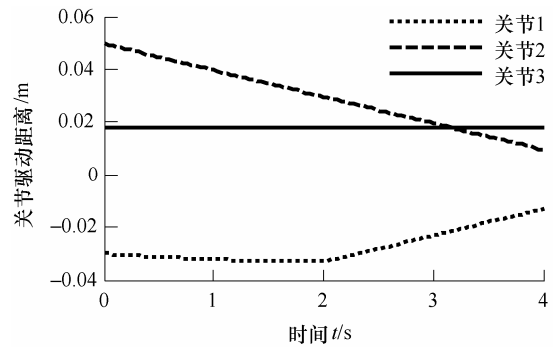


图 22 逃逸过程关节运动规律

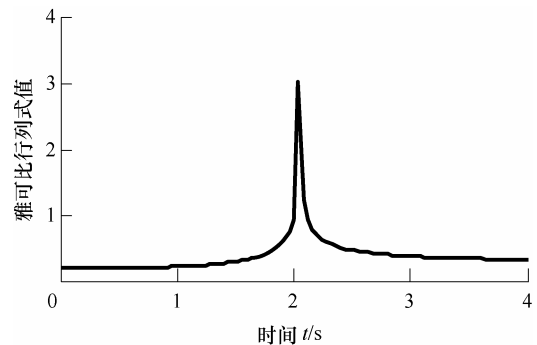


图 23 逃逸过程雅可比行列式变化曲线

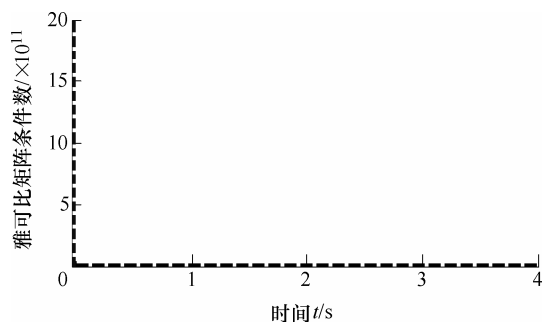


图 24 逃逸过程雅可比矩阵条件数变化曲线

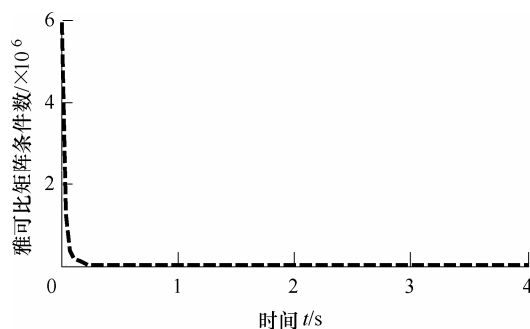


图 28 逃逸过程雅可比矩阵条件数变化曲线

### 4.3 奇异位型 c 逃逸

奇异位型 c 是唯一存在于工作空间内的奇异位型，由于三根连杆延长线交于一点，若三个关节一起运动，则机构受力平衡，末端自由度为 0。针对这种情况，需要把关节 2 固定，按照图 25 的逃逸步骤，三个关节的驱动量如图 26 所示，则机构的雅可比行列式将先稍微减少后迅速增大(图 27)，而雅可比矩阵的条件数也迅速减小(图 28)，雅可比矩阵从病态矩阵变为良态矩阵，机构从奇异中成功逃逸。

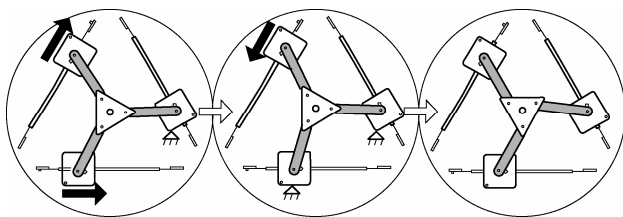


图 25 逃逸步骤

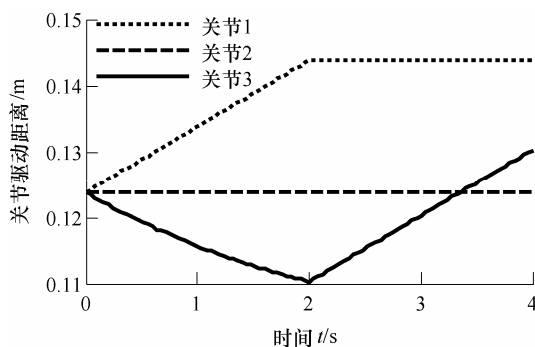


图 26 逃逸过程关节运动规律

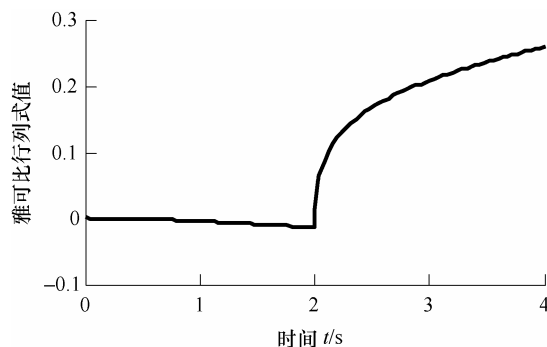


图 27 逃逸过程雅可比行列式变化曲线

## 5 结论

本文研究的 3PRR 并联定位平台是工作于 SEM 腔体中的宏微结合精密定位平台中的宏动部分，由于 SEM 腔体狭小，若机构运行到奇异位型，不仅很难人为干预使得机构从奇异位型中恢复正常，而且使得定位精度损失，可控性急剧恶化，不利于机构的控制与精密定位，因此本文研究的奇异规避与逃逸控制策略对机构的精密定位与可控性有重要指导意义。

本文通过研究 3PRR 并联定位平台的非奇异工作空间分布，求得本文尺寸下 3PRR 所有奇异位型，并分析所有奇异位型的特性，针对不同的奇异情况，设计了两种奇异区域规避策略和一种奇异位型逃逸策略。

(1) 若 3PRR 并联定位平台在姿态角  $\theta_p \neq 60^\circ$ ，也即非最大可达工作空间情况下运行，可通过实时判断雅可比行列式的值，采取变姿态规避奇异控制策略，实现奇异边界的过渡。

(2) 若 3PRR 并联定位平台在姿态角  $\theta_p = 60^\circ$ ，也即最大可达工作空间情况下运行，则不能通过变姿态实现奇异边界过渡，这时可采用奇异边界规避控制策略，实时判断雅可比行列式的值，实现奇异边界的规避。

(3) 若 3PRR 并联定位平台处于奇异位型，则需要先判断奇异位型的分类(奇异位型 a、b、c)，针对不同的奇异位型，实施奇异位型逃逸控制策略，使机构雅可比行列式的值迅速增大，迅速逃逸奇异位型。

通过理论计算和仿真验证，两种奇异区域规避控制策略和奇异位型逃逸控制策略都有较强的实用性。本文的方法可扩展应用到各种构型的平面并联定位平台上，有较强的适用性。

## 参考文献

- [1] 李勇滔, 韩立, 殷伯华, 等. 基于 SEM 的压电式微纳操纵系统[J]. 压电与声光, 2010(5): 782-785.

- LI Yongtao, HAN Li, YIN Bohua, et al. Piezoelectric micro-nano manipulating system based on SEM[J]. *Piezoelectrics and Acoustooptics*, 2010(5): 782-785.
- [2] 袁帅, 王越超, 席宁, 等. 机器人化微纳操作研究进展[J]. *科学通报*, 2013(S2): 28-39.
- YUAN Shuai, WANG Yuechao, XI Ning, et al. Research progress of robotics based micro/nano-manipulation[J]. *Chinese Science Bulletin*, 2013(S2): 28-39.
- [3] 邢航, 张铁民, 杨秀丽, 等. 大行程高精度驱动系统的研究[J]. *机械科学与技术*, 2013(6): 888-894.
- XING Hang, ZHANG Tiemin, YANG Xiuli, et al. Advances in large-stroke and high-resolution drive system[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2013(6): 888-894.
- [4] SHARON A, HARDT D. Enhancement of robot accuracy using endpoint feedback and a macro-micro manipulator system[C]// *American Control Conference*, June 6-8, 1984, California, San Diego. Washington, DC: IEEE International Conference on IEEE, 1984: 1836-1845.
- [5] SHARON A, HOGAN N, HARDT D. High bandwidth force regulation and inertia reduction using a macro/micro manipulator system[C]// *Robotics and Automation*, 1988. *Proceedings*, April 24-29, 1988, Philadelphia, Pennsylvania. Washington DC: IEEE, 1988: 126-132.
- [6] 王嵩宇, 刘剑, 宁润涛. SEM 在半导体工艺研究中的应用实例[J]. *电子与封装*, 2012(12): 40-43.
- WANG Songyu, LIU Jian, NING Runtao. SEM application examples in semiconductor technology research[J]. *Electronics and Packaging*, 2012(12): 40-43.
- [7] 朱玉龙. 基于双压电驱动宏微结合的纳米定位台研究[D]. 苏州: 苏州大学, 2013.
- ZHU Yulong. Researching on coarse fine nano positioning stage based on dual piezoelectric drive[D]. Suzhou: Soochow University, 2013.
- [8] 胡兵. 基于直线电机宏微双重驱动大行程精密定位台的研究[D]. 广州: 广东工业大学, 2013.
- HU Bing. Research on macro/micro dual drive precision positioning stage based on linear motor[D]. Guangzhou: Guangdong University of Technology, 2013.
- [9] 黄真. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- HUANG Zhen. *Parallel robot mechanism theory and control*[M]. Beijing: China Machine Press, 1997.
- [10] SHIRKHODAIE A H, SONI A H. Forward and inverse synthesis for a robot with three degrees of freedom[C]// *Summer Computer Simulation Conference*, July 27-30, 1987, The Queen Elizabeth Hotel Montreal, Quebec, Canada. San Diego: Society for Computer Simulation International, 1987: 851-856.
- [11] MERLET J P. *Parallel robot*[M]. 2nd ed. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] MOHAMMADI D H R, ZSOMBOR-MURRAY P J, ANGELES J. Singularity analysis of planar parallel manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1995, 30(5): 665-678.
- [13] GOSSELIN C M, SEFRIQUI J. Polynomial solutions for the direct kinematic problem of planar three degree of freedom parallel manipulators[C]// *Advanced Robotics*, 1991. 'Robots in Unstructured Environments', 91 ICAR., Fifth International Conference on IEEE, Pisa, Italy Washington, DC: IEEE International Conference on IEEE, 1991: 1124-1129.
- [14] GOSSELIN C, ANGELES J. A global performance index for the kinematic optimization of robotic manipulators[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1991, 113(3): 220-226.
- [15] NAGATSU Y, KATSURA S. Macro-micro bilateral control using Kalman filter based state observer for noise reduction and decoupling of modal space[C]// *Industrial Electronics Society, IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE*, November 10-13, 2013, Vienna, Austria. Washington DC: IEEE, 2013: 4192-4197.
- [16] 赵淳生. 超声电机技术与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- ZHAO Chunsheng. *Ultrasonic motor technologies and applications*[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [17] 赵淳生, 朱华. 超声电机技术的发展和应[J]. *机械制造与自动化*, 2008(3): 1-9.
- ZHAO Chunsheng, ZHU Hua. Development and application of ultrasonic motors technologies[J]. *Machinery Manufacturing and Automation*, 2008(3): 1-9.
- [18] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. *Robotics and Automation*, IEEE Transactions on, 1990, 6(3): 281-290.

作者简介: 莫嘉嗣, 男, 1987 年出生, 博士研究生。主要研究方向为精密并联机器人控制。

E-mail: mojiashi@mail.scut.edu.cn

张宪民(通信作者), 男, 1964 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为精密定位与精密操作、精密电子装备与现代控制技术、精密并联机器人系统、机电系统的振动与噪声控制等。

E-mail: zhangxm@scut.edu.cn

邱志成, 男, 1973 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机器人学及机器人控制, 空间柔性结构的建模及振动主动控制, 挠性结构的建模与控制。

E-mail: zhchqiu@scut.edu.cn

魏骏杨, 男, 1990 年出生。主要研究方向为精密定位机构与精密驱动方式。

E-mail: wei.jy01@mail.scut.edu.cn