DOI: 10.3901/JME.2013.09.042

信号瞬时频率直接计算法与 Hilbert 变换及 Teager 能量法比较*

任达千^{1,2} 杨世锡¹ 吴昭同¹ 严拱标¹ 孟庆波²

(1. 浙江大学机械工程学系 杭州 310027;

2. 浙江机电职业技术学院 杭州 310053)

摘要: 针对 Hilbert 变换求取信号瞬时频率时会出现没有物理意义的负频率现象, 研究基于局域均值分解的瞬时频率直接计算方法。给出相位展开分段计算方法的详细计算步骤。直接法与直接正交法进行了比较, 直接法和直接正交法在数学上相等, 计算结果相同, 可以认为是同一种方法。直接法也与 Hilbert 变换、Teager 能量方法进行比较。仿真和试验结果表明, 直接法计算结果能很好地反映信号的相位调制现象, 没有明显的端点效应, 不会出现负频率现象。直接法应用于旋转机械振动信号的分析, 取得良好效果。

关键词: 瞬时频率 局域均值分解 直接法 故障诊断 Hilbert 变换 Teager 能量法

中图分类号: TH113 TB533

Comparison of Instantaneous Frequency Directed Computing Method and Hilbert Transform and Teager Energy Method

REN Daqian^{1,2} YANG Shixi¹ WU Zhaotong¹ YAN Gongbiao¹ MENG Qingbo²

(1. Department of Mechanical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027;

2. Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053)

Abstract: In order to resolve the no physical meaning negative frequency phenomena in Hilbert transform, the instantaneous frequency directed calculation method based on the local mean decomposition is researched. The steps of phase unwrap is presented. The direct method is compared with the direct quadrature. Because direct method and direct quadrature are equal in mathematics and have the same calculating result, direct method and direct quadrature can be thought as the same method. Direct method is also compared with the Hilbert transform, Teager energy method. Simulation and experimental results show that the direct method well reflects the signal phase modulation phenomenon, there is no obvious boundary distortion, and the instantaneous frequency is always positive. The direct method is applied in the analysis of rotating machinery vibration signals and a good result is achieved.

Key words: Instantaneous frequency Local mean decomposition Directed method Fault diagnosis Hilbert transform Teager energy method

0 前言

为了得到旋转机械的早期故障征兆, 经常需要提取其振动信号的时频特征, 其中振动信号的瞬时频率计算是时频特征提取的重要问题。近年来国内外研究者对此问题进行了深入研究, 李宏坤等^[1]介绍了一种新的相位建模求瞬时频率的方法, 可以用来估计多分量非平稳信号的瞬时频率, 对 Hilbert

时频谱起到较好的完善作用。赵晓平等^[2]针对旋转机械升降速阶段信号的特点, 提出了一种新的振动信号瞬时频率估计算法——STFT Viterbi 拟合法, 减少了噪声干扰对瞬时频率估计的影响。GHAZALI 等^[3]研究了分布式管道检漏系统的几种瞬时频率分析方法, 用 Hilbert 变换、归一化 Hilbert 变换、直接正交法、Teager 能量法和倒谱法, 其中归一化 Hilbert 变换和直接正交法可用于确定管道漏点的大致位置, 直接正交法的表现中等, 而倒谱的表现最差。

SMITH^[4]于 2005 年提出了局域均值分解(Local mean decomposition, LMD)方法, 它能自适应地将一个复杂的信号分解为若干个乘积函数(Product

* 国家高技术研究发展计划(863 计划, 2007AA04Z424)、浙江省自然科学基金(Y1110582)和浙江机电职业技术学院孵化基金(04090341)资助项目。20120627 收到初稿, 20130220 收到修改稿

function, PF)分量之和, 每一个 PF 分量是包络信号和纯调频信号的乘积, 而 PF 的瞬时频率可以由纯调频信号求得, SMITH 将纯调频信号用反余弦函数求得瞬时相位, 再将瞬时相位对时间求导, 即得到信号的瞬时频率, 这样不会出现无法解释物理意义的负频率。此方法简单而直接, 所以可称为直接法。作者对直接法进行研究, 并证明了直接法的适用条件, 信号的极大值必须为 1, 极小值必须为-1, 即必须为严格的纯调频信号^[5]。张亢等^[6]提出了基于分段波形的信号瞬时频率计算方法, 可以对近似的纯调频信号进行计算。HUANG 等^[7]针对 Hilbert 变换存在的负频率现象, 提出一种归一化 Hilbert 变换和直接正交法, 并认为归一化 Hilbert 变换和直接正交法可得到比 Hilbert 变换更好的结果。

本文给出直接法详细的计算步骤, 并与 Hilbert 变换、Teager 能量方法求取信号瞬时频率的方法进行比较。仿真和试验结果表明, 直接法计算信号的瞬时频率, 能反映信号的相位调制现象。

1 局域均值分解及直接求取瞬时频率方法

对信号进行局域均值分解时, 首先确定原始信号 $x(t)$ 所有的极值点, 然后在此基础上定义局域均值函数和局域包络函数。经过一系列的迭代计算过程, 即得到第一个乘积函数。乘积函数由包络信号 $a(t)$ 和纯调频信号 $s(t)$ 相乘得到

$$PF_1(t) = a_1(t)s_1(t) \quad (1)$$

将 $PF_1(t)$ 从原始信号 $x(t)$ 中分离出来, 继续重复以上步骤, 这样便可以将 $x(t)$ 分解为 k 个 PF 分量和残余项 u_k 之和

$$x(t) = \sum_{p=1}^k PF_p(t) + u_k(t) \quad (2)$$

SMITH^[4]给出了瞬时频率的计算方法, 对于纯调频信号 $s(t)$, 如果满足 $-1 \leq s(t) \leq 1$, 即可先计算相位

$$\varphi(t) = \arccos(s(t)) \quad (3)$$

接着将 $\varphi(t)$ 展开, 然后求导即可得到瞬时频率

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (4)$$

在 LMD 的分解过程中, 不能得到严格的纯调频信号, 因此一种分段调整算法已经开发出来, 即每半个周期的信号, 除以这半个周期的幅值, 得到严格的纯调频信号^[6], 如图 1 所示。然后实施直接法计算瞬时频率。

图 1 信号幅值调整

以调频信号为例, 说明直接法的计算步骤, 原信号如图 2 所示, 表达式为式(5)

$$x(t) = \cos(16\pi t + 12\pi t^2) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5)$$

图 2 调频信号

直接法的计算步骤如下。

(1) 应用反余弦函数求相位。按式(3)计算纯调频信号的相位, 计算结果如图 3 所示, 相位的范围是 $[0, \pi]$, 呈锯齿形。

图 3 反余弦函数求得相位

(2) 相位展开得到单调递增函数。相位展开主要利用三角函数的性质, 可以有不同展开步骤, 也可能得到多种结果。因此有必要对展开的结果进行一些约束。相位按式(4)求导得到瞬时频率, 作者认为瞬时频率应该是正的, 而且是连续的。根据函数求导的基本规律, 相位应该是单调递增的。

本文提出的相位展开方法, 应用以下的三角公式^[8]

$$\begin{cases} \cos \varphi(t) = \cos(\varphi(t) + 2m\pi) \\ \cos \varphi(t) = \cos(-\varphi(t) + 2n\pi) \end{cases} \quad (6)$$

式中, m, n 为任意整数。

相位展开采用分段展开方法, 首先找到相位的极值点, 并对极值点从左到右依次编号, 如图 4 所示。

图 4 对相位的极值点编号

对于第 1 个极值点是极大值的情况, 如果 i 为

奇数, 第 i 极值点与第 $i+1$ 极值点之间的相位重新定义为 $(i+1)\pi - \varphi(t)$ 。如果 i 为偶数, 第 i 与 $i+1$ 个极值点之间的相位重新定义为 $i\pi + \varphi(t)$, 见式(7)

$$\Phi(t) = \begin{cases} (i+1)\pi - \varphi(t) & i \text{ 为奇数} \\ i\pi + \varphi(t) & i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (7)$$

式中, $\Phi(t)$ 为展开后的相位。

对于第 1 个极值点是极小值的情况, 如果 i 为奇数, 第 i 极值点与第 $i+1$ 极值点之间的相位重新定义为 $(i-1)\pi + \varphi(t)$ 。如果 i 为偶数, 第 i 极值点与第 $i+1$ 极值点之间的相位重新定义为 $i\pi - \varphi(t)$, 见式(8)

$$\Phi(t) = \begin{cases} (i-1)\pi + \varphi(t) & i \text{ 为奇数} \\ i\pi - \varphi(t) & i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (8)$$

相位展开的结果如图 5 所示, 得到连续的、单调递增的相位。

图 5 展开后相位

(3) 展开后相位对时间求导。对展开的相位求导, 得到瞬时频率, 见图 6。为了方便应用, 瞬时频率以 Hz 为单位, 即 $f(t) = \omega(t)/(2\pi)$ 。

从图 6 中可以看到, 瞬时频率均为正值。瞬时频率出现了一些畸点, 这是由于在纯调频信号的极值点处, 计算误差被放大造成的^[5]。

图 6 瞬时频率

(4) 对瞬时频率平滑处理。为了去除计算中出现的畸点, 可以对瞬时频率做平滑或滤波。本文采用的是滑动平均法, 每一个瞬时频率的计算结果, 都是 10 个采样点的平均值。而信号总的采样点数是 1 000 点。平滑处理之后的瞬时频率如图 7 所示。

图 7 瞬时频率平滑结果

2 直接法与直接正交法的比较

2.1 直接正交法的计算步骤

文献[7]给出了直接正交法的计算方法, 对于单分量信号, 如果满足 Bedrosian 和 Nuttall 的乘积定理^[9-10], 可以分解为调幅和纯调频信号, 即

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (9)$$

从信号的纯调频信号定义正交函数

$$\sin \varphi(t) = \sqrt{1 - F^2(t)} \quad (10)$$

这里 $F(t)$ 为严格的调频信号, 即 $F(t) = \cos \varphi(t)$ 。因此, 信号 $x(t)$ 的相位可以从式(11)求出

$$\varphi(t) = \arctan \frac{F(t)}{\sqrt{1 - F^2(t)}} \quad (11)$$

直接法和直接正交法在数学上是完全相等的, 只是采用的三角函数有所不同, 计算步骤和计算结果也是相同的。在 $F(t) = \pm 1$ 时, 会出现被零除的错误。

以文献[7]提到的 Duffing 振子产生的衰减调频波为例, 表达式为式(12)和式(13), 波形如图 8 所示

$$x(t) = \exp\left(-\frac{t}{256}\right) \cos\left(\frac{\pi}{64}\left(\frac{t^2}{512} + 32\right)\right) + 0.3 \sin\left(\frac{\pi}{32}\left(\frac{t^2}{512} + 32\right)\right) \quad t \in [0, 1024] \text{ s} \quad (12)$$

其调频部分为

$$F(t) = \cos\left(\frac{\pi}{64}\left(\frac{t^2}{512} + 32\right)\right) + 0.3 \sin\left(\frac{\pi}{32}\left(\frac{t^2}{512} + 32\right)\right) \quad t \in [0, 1024] \text{ s} \quad (13)$$

(a) 原信号

(b) 调频部分

图 8 Duffing 衰减调频波

在实际计算时, 直接正交法和直接法同样得到

锯齿形的相位, 两者的区别是直接法的相位范围为 $[0, \pi]$, 直接正交法的相位范围为 $[-\pi/2, \pi/2]$, 变化趋势刚好相反, 如图 9 所示。

图 9 直接正交法和直接法求取的相位

直接正交法的相位展开步骤, 与直接法基本相同, 只需要将式(7)改为

$$\Phi(t) = \begin{cases} i\pi - \varphi(t) & i \text{ 为奇数} \\ i\pi + \varphi(t) & i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (14)$$

式(8)改为

$$\Phi(t) = \begin{cases} i\pi + \varphi(t) & i \text{ 为奇数} \\ i\pi - \varphi(t) & i \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (15)$$

相位展开后, 对相位求导得到瞬时频率, 瞬时频率进行平滑处理, 即得到计算结果, 如图 10 所示。直接法与直接正交法求得的瞬时频率完全相同, 均能很好地反映原信号的频率随时间变化情况。

图 10 直接法和直接正交法求取瞬时频率

2.2 直接正交法的适用条件

根据文献[5], 直接法的适用条件是信号极大值必须为 1, 信号的极小值必须为 -1。这是得到正的瞬时频率所必须的。对于直接正交法来说, 也同样需要满足此条件。如果不满足适用条件, 将会出现

荒谬的现象。同样以 Duffing 衰减调频波为例, 如果将式(13)的信号幅值减小到原来的 0.5 倍, 即

$$F_1(t) = 0.5 \cos \left(\frac{\pi}{64} \left(\frac{t^2}{512} + 32 \right) \right) + 0.3 \sin \left(\frac{\pi}{32} \left(\frac{t^2}{512} + 32 \right) \right) \quad t \in [0, 1024]s \quad (16)$$

根据 Bedrosian 定理^[9], $F(t)$ 和 $F_1(t)$ 只是幅值不同, 瞬时频率是一样的。但是, 应用直接正交法将得到不同结果。

瞬时频率的计算结果如图 11 所示, 点画线表示原信号, 实线为计算结果 $F(t)$ 求得的瞬时频率, 虚线则是 $F_1(t)$ 求得的瞬时频率, 可以看到两者完全不同。从 $F(t)$ 求得的瞬时频率, 能很好地反映原信号的频率随时间变化情况, 从 $F_1(t)$ 求得的瞬时频率, 则严重变形, 与实际的瞬时频率相去甚远。

图 11 瞬时频率计算结果比较

3 与 Hilbert 变换法和 Teager 能量方法的比较

3.1 Hilbert 变换法

Hilbert 变换是求取信号瞬时频率的经典方法^[11], 信号 $x(t)$ 的 Hilbert 变换定义如式(17)所示

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (17)$$

也就是信号和时间倒数的卷积。实信号和它的 Hilbert 变换可以组成一解析信号

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = a(t)\exp(\varphi(t)) \quad (18)$$

式中, $a(t)$ 为解析信号的幅值, $\varphi(t)$ 为解析信号的相位。

信号的相位 $\varphi(t)$ 可从式(19)计算得到

$$\varphi(t) = \arctan \frac{\hat{x}(t)}{x(t)} \quad (19)$$

可进一步计算信号的瞬时频率

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} \quad (20)$$

3.2 Teager 能量法

20 世纪 80 年代, TEAGER 等在研究语音信号时提出了一种能量算子(Teager energy operator, TEO)。TEO 计算量小, 适合于实时计算^[12]。

对于正弦信号 $x(t)$, 先定义 TEO

$$\psi(x) = [\dot{x}(t)]^2 - x(t)\ddot{x}(t) \quad (21)$$

TEO 是一种非线性算子, 可以理解为信号的能量。可以从 TEO 求得信号的瞬时频率和瞬时幅值

$$\omega(t) = \frac{\sqrt{\psi[\dot{x}(t)]}}{\sqrt{\psi[x(t)]}} \quad (22)$$

$$|A(t)| = \frac{\psi[x(t)]}{\sqrt{\psi[\dot{x}(t)]}} \quad (23)$$

TEO 是定义在局部信号上的, 对于调频-调幅信号只要频率和幅值不是变化太剧烈, 也能求出瞬时频率、瞬时幅值和包络线。

3.3 三种瞬时频率求解法比较

旋转机械发生故障时会出现各种非线性现象。比如裂纹转子转动时, 裂纹会出现周期性开放和闭合, 会出现明显的相位调制现象^[13]。下面以相位调制信号为例, 比较上述三种瞬时频率计算方法。

仿真信号表达式为

$$x(t) = \cos(30\pi t + 0.5\sin(30\pi t)) \quad 0 \leq t \leq 0.5 \text{ s} \quad (24)$$

相位调制现象在频谱图上表现为高次谐波, 如图 12 所示, 出现了明显的二倍频和三倍频谐波。图 13~15 分别为直接法、Hilbert 变换法和 Teager 能量法求得的瞬时频率。直接法、Hilbert 变换法和 Teager 能量法求得的瞬时频率, 均能反映相位调制现象。但是 Hilbert 变换求得的瞬时频率, 在左右两端附近变得比较模糊, 明显受到端点效应的影响。而 Teager 能量法求得的瞬时频率, 有明显变形。

(a) 相位调制信号

(b) 信号频谱

图 12 相位调制信号和频谱

图 13 直接法求取时频谱

图 14 Hilbert 变换求取时频谱

图 15 Teager 能量法求取时频谱

4 振动信号实例研究

为了进一步研究瞬时频率在机械故障特征提取中的应用, 以旋转机械振动信号为例, 对比直接法、Hilbert 变换法和 Teager 能量法的分析结果。

信号采集自美国 Bently 转子试验台, 采样频率为 6 400 Hz, 这是转子平稳运行阶段的信号, 转速 7 076 r/min, 信号如图 16 所示。

图 16 转子振动信号和频谱

图 17 为信号 LMD 分解结果, 总共为 4 个乘积函数和 1 个残余项, PF_1 的幅值最大, 集中了大部分的能量, 其余几个 PF 的幅值均比较小。求取 PF_1 的瞬时频率, 图 18 为直接法求取的瞬时频率, 相位调制现象清晰可见。图 19 为 Hilbert 变换得到瞬时频率, Hilbert 变换得到的瞬时频率在端点附近有振荡现象, 这主要因为 Hilbert 变换是以快速傅里叶变换为基础计算的, 对于非整周期采样的数据有频谱泄漏现象, 端点附近则更加明显。直接法计算的瞬时频率则基本没有端点效应。在信号远离端点的部分, 直接法和 Hilbert 变换所得瞬时频率没有很大的区别, 只是直接法求得的频率曲线显得比较光滑。图 20 为 Teager 能量方法求得的瞬时频率, 受噪声影响比较大, 数值很分散。

图 17 LMD 分解结果

图 18 直接法求取 PF_1 的瞬时频率

图 19 Hilbert 变换求取 PF_1 的瞬时频率

图 20 Teager 能量方法求取 PF_1 的瞬时频率

图 21 为直接法求得的时频谱, 同样可以看到清晰的相位调制现象。图 22 为 Hilbert 变换法得到的时频谱, 在端点附近变得比较模糊。图 23 为 Teager 能量方法得到的时频谱图, 只是一些分散的点, 难以反映频率随时间变化情况。

图 21 直接法求得时频谱

5 结论

(1) 直接正交法与直接法在数学上相等, 有同样的适用条件, 计算步骤基本相同, 计算结果也相同, 可以认为是同一种方法。

(2) 直接法计算结果能较好地反映信号的相位调制现象。

(3) 因直接法计算瞬时频率的局部性质, 没有明显的端点效应。

图22 Hilbert变换求得时频谱

图23 Teager能量法求得时频谱

(4) 应用局域均值分解方法及其直接法分析旋转机械振动信号,可以得到正的、有物理意义的瞬时频率。

参 考 文 献

- [1] 李宏坤, 赵利华, 周帅, 等. 基于高阶模糊度函数的内蕴模式分量瞬时频率计算[J]. 机械工程学报, 2011, 47(15): 70-75.
LI Hongkun, ZHAO Lihua, ZHOU Shuai, et al. Instantaneous frequency calculation for intrinsic mode functions based on high-order ambiguity function[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(15): 70-75.
- [2] 赵晓平, 赵秀莉, 侯荣涛, 等. 一种新的旋转机械升降速阶段振动信号的瞬时频率估计算法[J]. 机械工程学报, 2011, 47(7): 103-108.
ZHAO Xiaoping, ZHAO Xiuli, HOU Rongtao, et al. A new method for instantaneous frequency estimation of run-up or run-down vibration signal for rotating machinery[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(7): 103-108.
- [3] GHAZALI M F, BECK S B M, SHUCKSMITH J D, et al. Comparative study of instantaneous frequency based methods for leak detection in pipeline networks[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 29: 187-200.
- [4] SMITH J S. The local mean decomposition and its application to EEG perception data[J]. Journal of the Royal Society Interface, 2005, 2(5): 443-454.
- [5] 任达千, 杨世锡, 吴昭同, 等. 基于LMD的信号瞬时频率求取方法及实验[J]. 浙江大学学报, 2009, 43(3): 523-528.
REN Daqian, YANG Shixi, WU Zhaotong, et al. Instantaneous frequency extraction method and experiment based LMD[J]. Journal of Zhejiang University, 2009, 43(3): 523-528.
- [6] 张亢, 程军圣, 杨宇, 等. 基于分段波形的信号瞬时频率计算方法[J]. 湖南大学学报, 2011, 38(11): 54-59.
ZHANG Kang, CHENG Junsheng, YANG Yu, et al. A piece-wise based signal instantaneous frequency computing method[J]. Journal of Hunan University, 2011, 38(11): 54-59.
- [7] HUANG N E, WU Zhaohua, LONG S R, et al. On instantaneous frequency[J]. Advances in Adaptive Data Analysis, 2009, 1(2): 177-229.
- [8] 叶其孝, 沈永欢. 实用数学手册[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
YE Qixiao, SHEN Yonghuan. Practical mathematical handbook[M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [9] BEDROSIAN E. A product theorem for Hilbert transforms[J]. Proceedings of the IEEE, 1963, 51: 868-869.
- [10] NUTTALL A H. On the quadrature approximation to the Hilbert transform of modulated signals[J]. Proceedings of the IEEE, 1966, 54: 1458-1459.
- [11] RASHID A. IIR discrete-time Hilbert transformers[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1987, 35(8): 1116-1119.
- [12] MARAGOS P, KAISER J F, QUATIERI T F. Energy separation in signal modulations with application to speech analysis[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(10): 3024-3051.
- [13] 胡劲松, 杨世锡. 基于HHT的转子横向裂纹故障诊断[J]. 动力工程, 2004, 24(2): 218-221.
HU Jinsong, YANG Shixi. Fault diagnosis method of transverse crack for rotor based on HHT[J]. Power Engineering, 2004, 24(2): 218-221.

作者简介: 任达千, 男, 1974年出生, 讲师。主要研究方向为智能检测技术、设备故障诊断。
E-mail: rendq74@126.com
杨世锡(通信作者), 男, 1968年生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为智能检测与信号处理、先进制造技术。
E-mail: yangsx@zju.edu.cn