DOI: 10.3901/JME.2019.13.023

航空发动机叶片脱落的非线性瞬态动力学研究*

刘阳 李诚 李富才 李鸿光

(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室 上海 200240)

摘要: 航空发动机叶片脱落(Fan blade out, FBO)的研究是在整机结构可靠性及安全性设计阶段必须解决的重要问题。涡扇叶片由于疲劳断裂或外物撞击而断裂,转子系统在巨大不平衡力作用下产生较大涡动,进而使得叶片的尖端与机匣发生碰撞及摩擦等。保留涡扇叶片进行瞬态动力学分析是创新点,具体思路是将FBO问题分成三部分进行分析,首先是研究多支撑变截面转轴的临界转速和瞬态不平衡响应,接下来是研究叶片尖端受到冲击载荷时叶片的瞬态响应及其根部载荷的变化,最后是将转轴与涡扇叶片连接在一起进行瞬态动力学分析,得到转子系统任意一点的瞬态响应及其减速曲线。通过对参数的修改可以针对不同型号的航空发动机和燃气轮机进行瞬态响应分析,最终形成通用的分析叶片与机匣碰摩的理论模型。

关键词: FBO; 非线性瞬态动力学; 叶片尖端与机匣碰摩

中图分类号: V231; V231

Non-linear Transient Rotor-dynamics Analysis of Fan Blade Out

LIU Yang LI Cheng LI Fucui LI Hongguang

(State Key Lab of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240)

Abstract: The research of fan blade out is a significant issue on the phase of structural reliability and safety design. A FBO event may be caused by fatigue break or impact damage by foreign objects. Low-pressure rotor system would vibrate severely with huge unbalance force. Because of that, the tip of blades would rub with the containment. Innovative point of the research is to calculate transient response remaining fan blades. The analysis procedure is divided into three parts. Firstly, critical speed and transient unbalance response analysis of various cross-section shaft with multi-supports have been done. Secondly, non-linear dynamical equations of fan blades' tip subjected impact and load at root of blade are obtained. Finally, combine dynamical equations of shaft with fan blades subjected impact to analyze transient response and rotate speed after FBO. Transient response of different aero-engines and gas turbines can be analyzed by modifying parameters. Finally, general theoretical model of analyzing the rubbing between blades and case can be obtained.

Key words: FBO; non-linear transient rotor-dynamics; contact-impact and rubbing

0 前言

航空发动机在全生命周期内处于高温、高强度和复杂振动的环境中,长期的交变载荷易使应力集中的部位产生塑性变形并断裂,或者较大尺寸的外物撞击使得叶片发生部分断裂等。脱落的叶片不断撞击高速旋转的叶片或机匣等重要部件,使得整个发动机失效,甚至酿成严重的空难,所以国际上基于安全适航的考虑,对叶片脱落(Fan blade out, FBO)问题提出了明确的要求^[1],例如不发生任何非包容性故障等。

FBO的研究主要分为两个阶段,第一阶段是叶片脱落的瞬间,脱落的叶片与相邻叶片和机匣的撞击过程。目前国际上只有少数几家发动机制造商Rolls-Royce、GE完成了航空发动机叶片脱落整机试验^[2]。而国内的研究机构中,文献[3-4]进行了大量的叶片脱落的包容性试验,并在实验中采用预埋炸药的方法实现叶片脱落。第二阶段是叶片脱落后,整个转子系统振动特性分析。在第二阶段,转子系统在不平衡力的作用下产生较大涡动,致使剩余的叶片与机匣碰撞及摩擦等。针对FBO的第二阶段,传统的分析方法是采用盘轴模型,将叶片简化成圆盘,将叶片的脱落过程等效成突加一个巨大的不平衡力,最终求得转子的瞬态响应^[5]。然而上述简化模型并不能真实地反映航空发动机的动力学特点,所以需要保留涡扇叶片进行动力学分析。文献[6]基

* 国家科技支撑计划(2015BAF07B03)和上海市基础研究重点(15JC1402600)资助项目。20180715收到初稿,20181213收到修改稿

于 Euler-Bernoulli 梁理论分析了转子系统与机匣的碰摩过程。文献[7-10]基于 Timoshenko 梁理论分析了叶片尖端受到周期性冲击的瞬态响应, 文献[11]分析了叶片尖端与机匣的碰摩过程对非对称转子的影响。文献[12]基于 MD Natran 有限元平台采用隐式-显示-隐式结合的算法对 FBO 的瞬态碰撞过程进行了求解。

FBO 求解的难点是叶片与机匣的碰摩过程具有整体耦合性和高度的非线性, 叶片及转子系统受到的冲击载荷复杂多变, 并且尚无成熟的方法可循。

本文主要研究 FBO 的第二阶段, 保留涡扇叶片建立数学模型, 并基于连续性 Timoshenko 梁理论推导了变截面转轴的横向振动的动力学方程和叶片尖端受冲击的非线性动力学方程, 进而采用 Galerkin 方法和 Runge-Kutta 方法计算得到发动机转子任意一点的瞬态响应和转速的变化曲线。最终形成一套可参数化分析 FBO 问题的理论模型。

1 变截面转子的瞬态响应分析

由于需要计算转子系统在 FBO 事件中的瞬态响应, 采用 Galerkin 方法计算瞬态响应时, 需要知道结构的振型表达式。所以首先求解变截面转子的振型表达式, 再求解瞬态不平衡响应, 并与 ANSYS 的计算结果进行对比, 以验证方法的正确性。

由于目前已有等截面转轴振型函数表达式, 所以在分析变截面转轴时, 将其划分成有限段阶梯轴, 再通过连接条件将多段等截面轴连在一起构成转子系统。具体的等效思路如图 1 所示。

图 1 变截面轴的等效模型

基于连续体 Timoshenko 梁理论推导等截面转轴的动力学方程, 其中考虑了陀螺力矩、结构阻尼、和非对称轴承支撑刚度等。通过位移协调条件和力平衡条件将多段等截面轴连接成转子系统, 最终形成包含了所有边界条件的多维矩阵。进而求解得到变截面转轴的临界转速和对应的振型表达式, 最后利用已得的振型表达式求得转子的瞬态响应。

图 2 转轴瞬态响应求解流程图

1.1 变截面转子的动力学方程的推导

对航空发动机的转子系统进行理论建模, 转轴的轴线与 X 轴重合, 转轴的横向振动发生在 Y 、 Z 轴上, 对应的变形分别为 v 和 w ; 转轴的截面转角为 ϕ_z 和 ϕ_y , 采用复数的表达形式, 即 $u=v+jw$; $\phi=\phi_z+j\phi_y$ 。

陀螺力矩对截面转角的角加速度产生影响, 如式(1)所示

$$\alpha = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial(j\phi)}{\partial t} \quad (1)$$

系统的动能为转动动能与平动动能之和

$$T = \int_0^L \rho I_b \left(\int_0^t \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - 2j\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\tau \right)^2 + \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

系统的势能为弯曲势能、剪切势能及轴承支撑势能的总和

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_b \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 + \kappa AG \left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sum_{i=1}^n K^i u^2 \delta(x - x_i) dx \quad (3)$$

系统的耗散函数是由轴承阻尼的作用而产生的

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C^i \dot{u}^2 \delta(x - x_i) \quad (4)$$

系统的外力能是由外激励力作用而产生的

$$W = \int_0^L F u \delta(x - x_F) dx \quad (5)$$

Lagrange 方程关于时间 t 和空间 x 双维度的表达式如式(6)所示

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial q'} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (6)$$

式中, q 为广义坐标; $L=T-U+W$ 。

因为将外力能考虑到了系统的内部, 所以式(6)的右端为零。将广义坐标 q 用位移 u 和截面转角 ϕ 代

替, 并进行化简, 得到如式(7)所示的动力学方程组。

$$\begin{cases} \rho A \ddot{u} + \kappa A G (\phi' - u'') + \sum_{i=1}^n K^i u \delta(x - x_i) + \\ C^i \dot{u} \delta(x - x_i) = F \delta(x - x_0) \\ \rho I_b \ddot{\phi} - E I_b \phi'' - 2j \rho I_b \Omega \dot{\phi} + \kappa A G (\phi - u') = 0 \end{cases} \quad (7)$$

首先, 利用自由振动方程求解得到多支撑、变截面转轴的振型函数表达式。将变截面轴段分割成多段等截面轴, 等截面轴的自由振动方程是式(7)中去掉轴承支撑和外激励力后的结果, 如式(8)所示。与文献[13-14]通过微元理论推导的自由振动微分方程相同。

$$\begin{aligned} \rho I_b \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) - E I_b \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - \\ j \rho I_b \Omega \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) - \rho A \ddot{u} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

挠度变形 $u(x, t)$ 是关于空间 x 和时间 t 双维度的变量, 由于空间 x 和时间 t 是两个相互独立的变量, 所以采用分离变量的方法 $u(x, t)$ 可以写成如下形式

$$u(x, t) = U(x) \exp(j\omega t) \quad (9)$$

式中, $U(x)$ 为等截面转轴的振型函数表达式; $\exp(j\omega t)$ 表示自由振动时, 转轴作简谐振动

$$U(x) = p_1 \exp(\lambda_1 x) + p_2 \exp(\lambda_2 x) + \\ p_3 \exp(\lambda_3 x) + p_4 \exp(\lambda_4 x) \quad (10)$$

每一阶振型函数表达式对应不同的 p 值和 λ 值, 由于采用指数函数作为基函数, 所以能够表达高阶的振型。将式(9)代入式(8)中可得

$$\begin{aligned} E I_b \frac{d^4 U}{dx^4} + \left(\rho I_b \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \omega^2 - 2 \rho I_b \Omega \omega \right) \frac{d^2 U}{dx^2} + \\ \left(\frac{\rho^2 I_b}{\kappa G} \omega^4 - 2 \frac{\rho^2 I_b \Omega}{\kappa G} \omega^3 - \rho A \omega^2 \right) U = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

将式(10)代入式(11)中, 得到式(12)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 P_j \left(E I_b \lambda_j^4 + \left(\rho I_b \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \omega^2 - 2 \rho I_b \Omega \omega \right) \lambda_j^2 + \right. \\ \left. \frac{\rho^2 I_b}{\kappa G} \omega^4 - 2 \frac{\rho^2 I_b \Omega}{\kappa G} \omega^3 - \rho A \omega^2 \right) \\ \exp(\lambda_j x) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

p 值决定了振型幅值的大小, 而 λ 值决定了振型的形状, 所以式(12)需要对任意 p 值成立。所以令括号中的等式等于零, 得到下式

$$E I_b \lambda^4 + \left(\rho I_b \left(1 + \frac{E}{\kappa G} \right) \omega^2 - 2 \rho I_b \Omega \omega \right) \lambda^2 +$$

$$\frac{\rho^2 I_b}{\kappa G} \omega^4 - 2 \frac{\rho^2 I_b \Omega}{\kappa G} \omega^3 - \rho A \omega^2 = 0 \quad (13)$$

可以看出上式是关于 λ 的四阶方程, 当 ω 确定之后, 可以求得对应的四个 λ 值, 那么接下来就是确定 p 值。 p 值是由连接条件确定的, 如下所示

$$\begin{cases} U|_{x=x_L} = U|_{x=x_R} \\ \frac{dU}{dx}|_{x=x_L} = \frac{dU}{dx}|_{x=x_R} \\ E I_b \frac{d^2 U}{dx^2}|_{x=x_L} = E I_b \frac{d^2 U}{dx^2}|_{x=x_R} \\ E I_b \frac{d^3 U}{dx^3} + \rho I_b (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx}|_{x=x_L} = \\ E I_b \frac{d^3 U}{dx^3} + \rho I_b (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx}|_{x=x_R} \end{cases} \quad (14)$$

式(14)反映的是两段等截面轴直接相连, 无轴承支撑因素的影响。若在两段轴之间存在轴承支撑, 则将式(14)中的剪力项改为式(15)

$$\begin{aligned} E I_b \frac{d^3 U}{dx^3} + \rho I_b (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx} - K U|_{x=x_L} = \\ E I_b \frac{d^3 U}{dx^3} + \rho I_b (\omega^2 - 2\omega\Omega) \frac{dU}{dx}|_{x=x_R} \end{aligned} \quad (15)$$

对于转轴两端的边界条件, 只需考虑力矩为零, 剪力为零两个条件即可。当 λ 值确定之后, 只需再得到 p 值即可得到对应的振型函数表达式。若转轴共划分成 N 个等截面轴, 那么未知数共有 $4N$ 个。轴与轴的连接截面有 $N-1$ 个, 根据连接条件可以得到 $4(N-1)$ 个方程, 左右两端的边界条件可以列出 $2 \times 2 = 4$ 个方程, 所以共有 $4N$ 个方程, 求解 $4N$ 个 p 值。首先将每段轴的 p 值写成列矢量, $P = \{p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}, \dots, p_{N,1}, p_{N,2}, p_{N,3}, p_{N,4}\}^T$, 对应的边界条件可以写成矩阵 M , 所以求解 p 值转换为求 $MP=0$ 。当转速 Ω 达到临界转速时发生共振, 即 $|M|=0$, 对应的特征矢量 P 即为所求。

本文采用扫频的方法计算 $|M|$, 扫频的间隔频率为 $\Delta f = 0.1$ Hz, 绘制 $\omega-|M|$ 的曲线, 由于无法准确求解 $|M|=0$ 时对应的临界转速, 所以曲线中出现向下的尖峰即为临界转速。

1.2 平板型叶片的发动机转子

在研究 FBO 事件时, 主要研究低压转子系统与机匣碰撞摩擦的过程, 更精确地表述是涡扇叶片与机匣的碰摩过程, 所以理论建模主要考虑涡扇叶片与变截面转轴两部分。其中涡扇叶片的总数为 20 片, 采用的材料是钛合金, 变截面转轴采用的材料

是钢, 转子系统的具体参数见表 1。

表 1 航空发动机转子的参数表

参数	数值
单个叶片的质量/kg	10
叶片的弹性模量/GPa	117
叶片材料密度/(kg/m ³)	2×10 ³
叶片的长度/m	1
叶片的横截面积/m ²	5×10 ⁻³
叶片的横截面的惯性矩/m ⁴	5×10 ⁻⁷
轮毂的长度或叶片的弦长/m	0.375
轮毂上叶片的个数	20
转轴的弹性模量/GPa	211
转轴的材料密度/(kg/m ³)	7.8×10 ³
1 号轴段/m	2.65
1 号轴段的外径/m	0.14
1 号轴段的内径/m	0.1
1 号轴段与轮毂之间的连接轴/m	0.6
锥形	—
3 号轴段即轮毂的长度/m	0.375
3 号轴段的外径/m	1
3 号轴段的内径/m	0.966 8
旋转锥/m	0.5
锥形, 末端外径为 0	—
三个轴承支撑的位置/m	0.2, 65, 3.25
三个轴承的支撑刚度/(N/m)	2×10 ⁹ , 7.15×10 ⁸ , 5.65×10 ⁸

依据表 1 建立有限元模型, 变截面转轴及叶片均采用梁单元建模, 叶片与转轴之间采用的是刚性连接, 临界转速施加在转轴上, 首先将叶片等效成平板的模型如图 3 所示。

图 3 航空发动机转子梁单元和三维有限元模型

连续体理论根据式(11)可得, 转轴的几何尺寸中截面面积 A 和惯性矩 I 两个参数影响计算, 因此需要对叶片进行等效处理, 具体等效的思路如下。

(1) 将所有叶片的质量等效到轮毂上

$$A_{Hub} = A_{Hub0} + \frac{NM_b}{\rho_s L_{Hub}} \quad (16)$$

(2) 将所有叶片的转动惯量等效到轮毂上, 具体的计算见式(17)

$$I_{bHub} = I_{bHub0} + 2 \frac{\rho_b}{\rho_s L_{Hub}} \sum_{j=1}^9 \int_0^{L_b} A \left((r+x) \sin \left(\frac{j\pi}{10} \right) \right)^2 dx \quad (17)$$

图 4 叶片转动惯量的等效过程

分别采用连续体理论与有限元理论对航空发动机转子进行计算, 在 $0 \sim 2 \times 10^4$ r/min 的转速范围内, 共有 3 阶临界转速, 如表 2 所示。

表 2 连续体与有限元的临界转速对比

阶数	连续体计算	有限元计算	误差(%)
一	4 584	4 381	4.66
二	9 554	9 919	-3.68
三	14 726	13 956	5.53

根据表 2 可以得到, 两种方法计算得到的临界转速值是比较接近的, 涡扇叶片的等效方式不同是造成误差的主要原因。然而对于本文的瞬态分析计算中, 需要得到变截面转轴的振型函数表达式, 再采用 Galerkin 方法将无限自由度的连续体动力学方程化为可以计算的矩阵形式, 最后采用 Runge-Kutta 方法计算瞬态响应。所以接下来将连续体理论与有限元得到振型进行更加详细的对比分析。

通过图 5 的对比分析可以看出, 连续体方法与有限元计算的振型图不但相似, 包括各点之间的比例也相近。然而采用连续体方法计算的优势在于可以得到振型的函数表达式, 这是本节建立连续体动力学方程的目的所在。

图 5 前三阶弯曲振型对比(左: 有限元, 右: 连续体)

1.3 预扭转叶片的发动机转子

前面的分析中将涡扇叶片等效成平板, 接下来考虑叶片沿长度方向的预扭转特征, 并采用有限元软件对预扭转叶片的转子进行模态分析, 观察叶片的预扭转特征对转子系统的临界转速和振型的影响。叶片的预扭转角是 60° , 并且从根部到顶端是线性变化的, 采用梁单元对预扭转的叶片进行建模, 得到有限元模型如图 6 所示。

图 6 预扭转叶片的航空发动机转子

对预扭转叶片的航空发动机有限元模型进行模态分析。考虑了涡扇叶片的预扭转特征后, 叶片的局部变形诱发了转子系统的很多局部模态, 本文在提取前 100 阶模态振型时, 得到了弯曲模态的第一阶振型, 在文献[11]中也只列出了第一阶弯曲模态及其振型, 如图 7 所示。

图 7 带叶型叶片的第一阶弯曲振型

考虑了涡扇叶片的预扭转特征之后, 在航空发动机转子系统的模态分析中引入了许多局部模态, 然而对于弯曲振动的临界转速和振型影响不大, 所以可采用连续体理论得到的转子的弯曲模态振型函数表达式计算瞬态响应。

1.4 瞬态不平衡响应

在航空发动机叶片脱落之后, 转子在突加的巨大不平衡力下产生较大的涡动。因此利用前面求得的航空发动机转子的横向振动振型表达式, 采用 Galerkin 方法将连续体动力学方程式(7)化成有限自

由度的矩阵表达形式, 最后基于 Runge-Kutta 方法计算转子在突加不平衡力下的瞬态响应。

由于 $u(x,t)$ 和 $\phi(x,t)$ 均是关于空间 x 和时间 t 的双维度变量, 并且由于空间 x 和时间 t 是相互独立的, 所以 $u(x,t)$ 和 $\phi(x,t)$ 化成如下形式

$$\begin{cases} v(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j(x) Y_j(t) \\ w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_j(x) Z_j(t) \\ \phi_z(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x) \phi_j(t) \\ \phi_y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Psi_j(x) \psi_j(t) \end{cases} \quad (18)$$

式中, $V_j(x)$ 和 $W_j(x)$ 为挠度的振型函数表达式; 截面转角的振型函数表达式 $\Phi_j(x) = \Psi_j'(x) = V_j'(x)$; $Y_j(t)$, $Z_j(t)$, $\phi_j(t)$, $\psi_j(t)$ 为对应振型的时间响应值。只要求得上述四个时间响应, 根据式(18)即可求得整个系统任一点的瞬态响应。

将 $u = v + jw$ 和 $\phi = \phi_z + j\phi_y$ 代入式(7)中, 得到关于挠度变形(v, w)和截面转角变形(ϕ_z, ϕ_y)的动力学微分方程, 如式(19)所示

$$\begin{cases} \rho A \ddot{v} + \kappa A G (\phi_z' - v'') + \Sigma_1 = F_y \delta(x - x_F) \\ \rho I_b \ddot{\phi}_z - EI_b \phi_z'' + 2\rho I_b \Omega \dot{\phi}_y + \kappa A G (\phi_z - v') = 0 \\ \rho A \ddot{w} + \kappa A G (\phi_y' - w'') + \Sigma_2 = F_z \delta(x - x_F) \\ \rho I_b \ddot{\phi}_y - EI_b \phi_y'' - 2\rho I_b \Omega \dot{\phi}_z + \kappa A G (\phi_y - w') = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^n (K_{11}^k v + K_{12}^k w + C_{11}^k \dot{v} + C_{12}^k \dot{w}) \delta(x - x_k)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k=1}^n (K_{21}^k v + K_{22}^k w + C_{21}^k \dot{v} + C_{22}^k \dot{w}) \delta(x - x_k)$$

将式(18)代入式(19)得到微分动力学方程组。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A V_i V_j \ddot{Y}_j + \kappa A G (V_i \Phi_j' \phi_j - V_i V_j' Y_j) dx + \\ & \sum_{k=1}^n K_{11}^k V_i(x_k) V_j(x_k) Y_j + K_{12}^k V_i(x_k) W_j(x_k) Z_j + \\ & \sum_{k=1}^n C_{11}^k V_i(x_k) V_j(x_k) \dot{Y}_j + C_{12}^k V_i(x_k) W_j(x_k) \dot{Z}_j = \\ & F_y V_i(x_k) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho I_b \Phi_i \Phi_j \ddot{\phi}_j - EI_b \Phi_i \Phi_j'' \phi_j + 2\rho I_b \Phi_i \Psi_j \dot{\psi}_j + \\ & \kappa A G (\Phi_i \Phi_j \phi_j - \Phi_i V_j' Y_j) dx = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A W_i W_j \ddot{Z}_j + \kappa A G (W_i \Psi_j' \psi_j - W_i W_j'' Z_j) dx + \\ & \sum_{k=1}^n K_{21}^k W_i(x_k) V_j(x_k) Y_j + K_{22}^k W_i(x_k) W_j(x_k) Z_j + \\ & \sum_{k=1}^n C_{21}^k W_i(x_k) V_j(x_k) \dot{Y}_j + C_{22}^k W_i(x_k) W_j(x_k) \dot{Z}_j = \end{aligned}$$

$$F_z W_i(x_k) \quad (22)$$

$$\int_0^L \rho I_b \Psi_i \Psi_j \ddot{\psi}_j - EI_b \Psi_i \Psi_j \psi_j - 2\rho I_b \Psi_i \Phi_j \dot{\phi}_j + \kappa AG \left(\Psi_i \Psi_j \psi_j - \Psi_i W_j' Z_j \right) dx = 0 \quad (23)$$

将动力学方程式(20)~(23)整理成矩阵的形式,

$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F$, 具体的 M 、 C 、 K 如下

$$M = \begin{bmatrix} M_{i,j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{i+N,j+N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{i+2N,j+2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{i+3N,j+3N} \end{bmatrix}$$

$$M_{i,j} = \int_0^L \rho A V_i V_j dx \quad M_{i+N,j+N} = \int_0^L \rho I_b \Phi_i \Phi_j dx$$

$$M_{i+2N,j+2N} = \int_0^L \rho A W_i W_j dx$$

$$M_{i+3N,j+3N} = \int_0^L \rho I_b \Psi_i \Psi_j dx$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{i,j} & 0 & C_{i,j+2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{i+N,j+3N} \\ C_{i+2N,j} & 0 & C_{i+2N,j+2N} & 0 \\ 0 & C_{i+3N,j+N} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^n C_{11}^k V_i V_j \Big|_{x=x_k} \quad C_{i,j+2N} = \sum_{k=1}^n C_{12}^k V_i W_j \Big|_{x=x_k}$$

$$C_{i+N,j+3N} = \int_0^L \rho I_p \Omega \Phi_i \Psi_j dx$$

$$C_{i+2N,j} = \sum_{k=1}^n C_{21}^k W_i V_j \Big|_{x=x_k}$$

$$C_{i+2N,j+2N} = \sum_{k=1}^n C_{22}^k W_i W_j \Big|_{x=x_k}$$

$$C_{i+3N,j+N} = \int_0^L -\rho I_p \Omega \Psi_i \Phi_j dx$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{i,j} & K_{i,j+N} & K_{i,j+2N} & 0 \\ K_{i+N,j} & K_{i+N,j+N} & 0 & 0 \\ K_{i+2N,j} & 0 & K_{i+2N,j+2N} & K_{i+2N,j+3N} \\ 0 & 0 & K_{i+3N,j+2N} & K_{i+3N,j+3N} \end{bmatrix}$$

$$K_{i,j} = \sum_{k=1}^n K_{11}^k V_i V_j \Big|_{x=x_k} - \kappa AG \left(\int_0^L V_i V_j'' dx - \sum_{k=1}^n V_i V_j' \Big|_{x=x_k} \right)$$

$$K_{i,j+N} = \kappa AG \left(\int_0^L V_i \Phi_j' dx - \sum_{k=1}^n V_i \Phi_j \Big|_{x=x_k} \right)$$

$$K_{i,j+2N} = \sum_{k=1}^n K_{12}^k V_i W_j \Big|_{x=x_k}$$

$$K_{i+N,j} = -\int_0^L \kappa AG \Phi_i V_j' dx$$

$$K_{i+2N,j+2N} = \int_0^L -EI \Phi_i \Phi_j'' + \kappa AG \Phi_i \Phi_j dx$$

$$K_{i+2N,j} = \sum_{k=1}^n K_{21}^k W_i V_j \Big|_{x=x_k}$$

$$K_{i+2N,j+2N} = \sum_{k=1}^n K_{22}^k W_i W_j \Big|_{x=x_k} -$$

$$\kappa AG \left(\int_0^L W_i W_j'' dx - \sum_{k=1}^n W_i W_j' \Big|_{x=x_k} \right)$$

$$K_{i+2N,j+3N} = \kappa AG \left(\int_0^L W_i \Psi_j' dx - \sum_{k=1}^n W_i \Psi_j \Big|_{x=x_k} \right)$$

$$K_{i+3N,j+2N} = -\int_0^L \kappa AG \Psi_i W_j' dx$$

$$K_{i+3N,j+3N} = \int_0^L -EI \Psi_i \Psi_j'' + \kappa AG \Psi_i \Psi_j dx$$

在瞬态分析中需要注意的是,除了上述质量阵 M 、阻尼阵 C 及刚度阵 K 外,还需要考虑结构阻尼对瞬态响应的影响,一般情况下采用 Rayleigh 阻尼代表结构阻尼,如式(24)所示,其中 K_s 为结构刚度矩阵,即只包含结构材料特性的项,与 E 或 G 有关的项

$$C_s = \alpha M + \beta K_s \quad (24)$$

式中,系数 α, β 受材料的阻尼比 ζ 、前两阶固有频率 ω_1, ω_2 的影响,具体关系表达式如式(25)所示

$$\begin{cases} \alpha = \zeta \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \\ \beta = \zeta \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \end{cases} \quad (25)$$

以轮毂中心 Y 方向的瞬态响应进行对比分析,如图 8 所示。

图 8 瞬态不平衡响应的对比(左:有限元,右:连续体)

通过图 8 的对比分析可知,利用有限元理论求得的瞬态不平衡响应的最大峰值为 9.87 mm,稳态响应的幅值为 4.56 mm,趋于稳定的时间为 0.8 s;利用连续体理论求得的瞬态不平衡响应的最大峰值为 9.63 mm,稳态响应的幅值是 4.15 mm,趋于稳定的时间为 0.7 s。所以利用连续体理论求得的瞬态响应结果,与利用有限元理论求得的瞬态响应非常接近,论证了连续体理论在求解变截面转轴及瞬态响应方面的正确性及有效性。

2 叶片尖端受冲击的瞬态响应

航空发动机在发生叶片脱落之后, 在巨大的不平衡力的作用下, 必然使得某些叶片尖端的瞬态位移超过其与机匣之间的间隙, 从而产生冲击碰撞及摩擦等。本章将分析单个叶片在受到周期性冲击的载荷而产生的振动, 依据连续体 Timoshenko 梁理论, 建立微分动力学方程组, 最终得到叶片上每一点的瞬态响应和叶片根部的载荷大小。

在本章中存在几个基本假设如下。

- (1) 叶片只发生弹性变形, 不考虑塑性变形。
- (2) 叶片沿长度方向具有相同的矩形截面。
- (3) 叶片尖端受到的冲击载荷作用在叶片矩形截面的中心处。

2.1 动力学方程的推导

基于 Timoshenko 梁理论分析悬臂的叶片在离心力、尖端受到周期性载荷的作用下的瞬态响应, 在动力学方程的推导过程中, 涉及到了纵向振动 $\zeta(s, t)$ 、横向振动 $\eta(s, t)$ 、截面转角 $\psi(s, t)$ 三个变量, 其中 s 为叶片上某一点到轮毂的距离, t 为时间变量, 简化模型如图 9 所示。

(1) 整体坐标系 (X, Y, Z) , 该坐标系为固定的笛卡尔坐标系, 是整个转子系统进行分析计算的基准坐标系。

图 9 航空发动机叶片尖端受周期性冲击的模型

(2) 旋转坐标系 (S_a, S_t, S_r) , 该坐标系是由于转轴的旋转而产生的, S_a 的矢量与转轴同向; S_t 为切向; S_r 为径向。旋转坐标系在转子系统的动能计算中起关键作用。

(3) 局部坐标系 (e_c, e_n, e_s) 该坐标系是分析单个叶片变形时采用的坐标系, e_c 为叶片的弦长方向; e_n 垂直于叶片的中性层, 且与叶片的旋转速度反向; e_s 与叶片的长度方向相同。局部坐标系用于叶片受冲击而产生的振动响应计算。

局部坐标系 (e_c, e_n, e_s) 与整体坐标系 (X, Y, Z) 之间的转化的关系如式(26)所示

$$\begin{pmatrix} e_c \\ e_n \\ e_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \cos \theta & -\sin \beta \sin \theta \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \theta & \cos \beta \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (26)$$

式中, θ 为第 j 号叶片从初始位置转过的角度 $\theta = j\pi/10 + \Omega t$, β 为叶片的预扭转角。

图 10 叶片上任意一点的变形图

其中, z 代表叶片上任意一点到叶片中性层的距离, 根据几何关系得到的叶片上任意一点的变形为式(27)

$$d = 0e_c + \eta e_n + (\zeta + s(\cos \psi - 1) - z \sin \psi) e_s \quad (27)$$

由于截面转角一般较小, 将式(27)化简为式(28)

$$d = 0e_c + \eta e_n + (\zeta - z\psi) e_s \quad (28)$$

将转子的转速 Ω 从整体坐标系等效到局部坐标系

$$(\Omega \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \Omega \cos \beta e_c + \Omega \sin \beta e_n + 0e_s \quad (29)$$

叶片上任意一点的速度由即变形对时间的偏导和旋转的切向速度组成, 即 $V = \frac{\partial d}{\partial t} + \Omega \times r$

$$\begin{aligned} V = & (s + r + \zeta - z\psi) \Omega \sin \beta e_c + \\ & [\dot{\eta} - (s + r + \zeta - z\psi) \Omega \cos \beta] e_n + \\ & [\dot{\zeta} - z\dot{\psi} + (z + \eta) \Omega \cos \beta] e_s \end{aligned} \quad (30)$$

再依据局部坐标系与整体坐标系的关系式(26), 将速度转化到整体坐标系下

$$\begin{aligned} V = & (\dot{\eta} \sin \beta) X + \{ [\dot{\eta} \cos \beta - (s + r + \zeta - z\psi) \Omega] \cos \theta - \\ & [\dot{\zeta} - z\dot{\psi} + (z + \eta) \Omega \cos \beta] \sin \theta \} Y + \{ [\dot{\eta} \cos \beta - (s + r + \\ & \zeta - z\psi) \Omega] \sin \theta + [\dot{\zeta} - z\dot{\psi} + (z + \eta) \Omega \cos \beta] \cos \theta \} Z \end{aligned}$$

根据已知任意一点的速度 V 进而求得整个叶片动能, 并将 $I = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 cdz$ 和 $\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} zcdz = 0$ 代入化简得到

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \rho A \int_0^L [(s + r + \zeta) \Omega - \dot{\eta} \cos \beta]^2 + \\ & (\dot{\zeta} + \eta \Omega \cos \beta)^2 + (\dot{\eta} \sin \beta)^2 ds + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \rho I \int_0^L (\psi \Omega)^2 + (\Omega \cos \beta - \dot{\psi})^2 ds \quad (31)$$

系统的势能 U 主要由弯曲应变能、剪切应变能、纵向应变能和体力内能组成。根据 Timoshenko 梁理论, 剪切力 $Q = \kappa AG(\psi - \eta')$; 弯矩 $M = EI\psi'$; 纵向力 $F = EA\zeta'$; 体力为 $F_a + \sigma_{cf}$; 式中, $F_a = -F(t)$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\psi')^2 + \kappa AG(\psi - \eta')^2 + EA(\zeta')^2 + (F_a + \sigma_{cf}A)(\eta')^2 ds \quad (32)$$

根据 Lagrange 方程的思想, $L = T - U$, 再利用式(33)求解得到叶片受冲击的微分动力学方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi'} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \eta'} \right) &= -\mu F_a \cos \beta \delta(s-L) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta} + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta'} \right) &= F_a \delta(s-L) \end{aligned} \quad (33)$$

关于截面转角 ψ 的动力学方程

$$EI\psi'' + \kappa AG(\eta' - \psi) - \rho I(\ddot{\psi} - \cos \beta \dot{\Omega} - \Omega^2 \psi) = 0 \quad (34)$$

关于弯曲变形 η 的动力学方程

$$\begin{aligned} \kappa AG(\psi' - \eta'') - \left(\frac{1}{2} \rho A \Omega^2 (R^2 - (r+s)^2) + F_a \right) \eta'' + \\ \rho A \Omega^2 (r+s) \eta' + \\ \rho A (\ddot{\eta} - (s+r+\zeta) \dot{\Omega} \cos \beta - 2\dot{\zeta} \Omega \cos \beta - \eta \Omega^2 \cos^2 \beta) = \\ -\mu F_a \cos \beta \delta(s-L) \end{aligned} \quad (35)$$

关于纵向变形 ζ 的动力学方程

$$\begin{aligned} -EA\zeta'' + \\ \rho A (\ddot{\zeta} - (s+r+\zeta) \Omega^2 + \eta \dot{\Omega} \cos \beta + 2\dot{\eta} \Omega \cos \beta) = \\ F_a \delta(s-L) \end{aligned} \quad (36)$$

在得到式(34)~(36)的动力学方程后, 采用 Galerkin 方法得到悬臂的叶片在离心力作用下, 受到周期性冲击的瞬态响应。虽然利用 Rayleigh-Ritz 法在振型函数只需满足边界条件、无需满足力条件的情况下也可求得瞬态响应。例如文献[7]中采用的弯曲变形的振型函数为 $(1 - \cos \varphi_j s)/\varphi_j$, 纵向变形的振型函数为 $\sin \varphi_j s/\varphi_j$, 虽然能够得到叶片上每一点的瞬态响应, 但是无法得到叶片根部的受力情况。

因此根据叶片准确的边界条件得到叶片的振型函数, 解决上述问题。弯曲变形的边界条件为

$$\eta(s, t)|_{s=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \eta(s, t)}{\partial s} \right|_{s=0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \eta(s, t)}{\partial s^2} \right|_{s=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 \eta(s, t)}{\partial s^3} \right|_{s=L} = 0 \quad (37)$$

叶片弯曲变形的振型函数表达式

$$\begin{aligned} V_j(s) = 1 - \frac{1}{2} \varphi_j^2 \left[L \varphi_j \sin(\varphi_j L) + \cos(\varphi_j L) \right] s^2 + \\ \frac{1}{6} \varphi_j^3 \sin(\varphi_j L) s^3 - \cos(\varphi_j s) \end{aligned} \quad (38)$$

叶片纵向变形的边界条件

$$\zeta(s, t)|_{s=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \zeta(s, t)}{\partial s} \right|_{s=L} = 0 \quad (39)$$

叶片纵向变形的振型函数表达式

$$W_j(s) = \sin(\varphi_j s) \quad (40)$$

叶片的截面转角振型函数采用文献[8]的形式

$$U_j(s) = \sin(\varphi_j s) \quad (41)$$

式中, $\varphi_j = (2j-1)\pi/(2L)$, 然后将截面转角、弯曲变形和纵向变形写成如下形式

$$\begin{aligned} \psi(s, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} U_j(s) X_j(t) \\ \eta(s, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} V_j(s) Y_j(t) \\ \zeta(s, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} W_j(s) Z_j(t) \end{aligned} \quad (42)$$

在叶片截面转角、挠度和纵向变形的振型表达式已知的情况下, 利用 Galerkin 方法将连续体动力学方程式(34)~(36)化成有限自由度的矩阵表达式, 具体的 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 如下

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} M_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & M_{i+N,j+N} & 0 \\ 0 & 0 & M_{i+2N,j+2N} \end{pmatrix} \\ M_{i,j} &= \int_0^L \rho I U_i U_j ds \quad M_{i+N,j+N} = \int_0^L \rho A V_i V_j ds \\ M_{i+2N,j+2N} &= \int_0^L \rho A W_i W_j ds \\ \mathbf{C}_g &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{i+N,j+2N} \\ 0 & C_{i+2N,j+N} & 0 \end{pmatrix} \\ C_{g \ i+N,j+2N} &= -2\rho A \Omega \cos \beta \int_0^L V_i W_j ds \\ C_{g \ i+2N,j+N} &= 2\rho A \Omega \cos \beta \int_0^L W_i V_j ds \\ \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} K_{i,j} & K_{i,j+N} & 0 \\ K_{i+N,j} & K_{i+N,j+N} & K_{i+N,j+2N} \\ 0 & K_{i+2N,j+N} & K_{i+2N,j+2N} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{i,j} &= \int_0^L -EIU_i U_j'' + \kappa AGU_i U_j - \rho I \Omega^2 U_i U_j ds \\
K_{i,j+N} &= \int_0^L -\kappa AGU_i V_j' ds \\
K_{i+N,j} &= \int_0^L \kappa AGV_i U_j' ds \\
K_{i+N,j+N} &= \int_0^L \rho A \Omega^2 \left(-\frac{1}{2} (R^2 - (r+s)^2) V_i V_j'' + \right. \\
&\quad \left. (r+s) V_i V_j' - \cos^2 \beta V_i V_j \right) ds \\
&\quad - \kappa AGV_i V_j'' - F_a V_i V_j'' \\
K_{i+N,j+2N} &= \int_0^L -\rho A \cos \beta \dot{\Omega} V_i W_j ds \\
K_{i+2N,j+N} &= \int_0^L \rho A \dot{\Omega} \cos \beta W_i V_j ds \\
K_{i+2N,j+2N} &= \int_0^L -EA W_i W_j'' - \rho A \Omega^2 W_i W_j ds \\
\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} F_i \\ F_{i+N} \\ F_{i+2N} \end{pmatrix} \\
F_i &= \int_0^L \rho I \cos \beta \dot{\Omega} U_i ds \\
F_{i+N} &= \int_0^L \rho A \dot{\Omega} \cos \beta (s+r) V_i ds - \mu F_a \cos \beta V_i|_{s=L} \\
F_{i+2N} &= \int_0^L \rho A (s+r) \Omega^2 W_i + F_a W_i|_{s=L}
\end{aligned}$$

2.2 定转速叶片尖端受冲击的瞬态响应

首先需要明确的是叶片尖端的冲击载荷的形式, 其冲击载荷的形式可以是矩形波、三角波和半正弦波。在本节的分析计算中, 选择半正弦作为冲击载荷的形式, 冲击时间为 $T_{\text{rub}} = \varepsilon_t T_{\text{rotor}}$; 冲击载荷为 $F = -\varepsilon_F F_{\text{cr}} \sin(\pi t / T_{\text{rub}})$; 屈曲载荷为 $F_{\text{cr}} = \pi^2 EI / (4L^2)$ 。

表 3 叶片的参数表

名称	数值
单个叶片的质量/kg	10
叶片的弹性模量/GPa	117
泊松比	0.3
截面的剪切系数(矩形)	0.833
叶片材料密度/(kg/m ³)	2×10^3
叶片的长度/m	1
轮毂的外径/m	0.5
叶片的尖端到轮毂中心的距离/m	1.5
叶片的横截面积/m ²	5×10^{-3}
叶片的横截面的惯性矩/m ⁴	5×10^{-7}
叶片的弦长/m	0.375
叶片尖端与机匣的摩擦因数	0.01
叶片的预扭转角/(°)	60
叶片的尖端与机匣的摩擦时间/s	
叶片的尖端与机匣的冲击载荷/kN	28.9
模态叠加法截取的模态数	10

首先求解在定转速 $n=3\ 000\ \text{r/min}$; 冲击时间为 $0.1 T_{\text{rub}}$, 冲击载荷为 $2F_{\text{cr}}$, 总时间 1 s 的瞬态响应。

可以看出图 11 截面转角的瞬态响应较小, 在 $\pm 4 \times 10^{-3}\ \text{rad}$ 范围内波动。图 12 叶片尖端的挠度变形在 $\pm 2.5\ \text{mm}$ 之间变化。为了能够进一步观察弯曲振动的特征, 对叶片尖端的挠度变形的瞬态响应作 FFT 处理, 得到对应的频谱如图 13 所示。

图 11 叶片尖端截面转角的瞬态响应

图 12 叶片尖端挠度变形的瞬态响应

图 13 叶片尖端弯曲变形的频谱图

可以看出叶片的横向振动主要存在 3 个频率成分, 依次是工频(50.05 Hz), 1.5 倍频(75.07 Hz), 2 倍频(100.1 Hz), 说明叶片尖端的瞬间碰撞会引发多次高阶成分, 这与工程实践经验是相符的。

图 14 中叶片尖端的纵向变形稳定在 1 mm, 表示在转速 3 000 r/min 时, 由于离心力的作用而使得叶片沿纵向伸长。因为每一次尖端的冲击均会使得纵向变形减小, 所以图 14 中向下的尖峰均是由冲击造成的。

图14 叶片尖端纵向变形的瞬态响应

计算叶片根部的受力情况,沿叶片纵向的力 F_ζ , 沿叶片横向的力 F_η

$$\begin{aligned} F_\zeta|_{s=0} &= -\frac{EA}{1-\nu^2} \zeta'|_{s=0} \\ F_\eta|_{s=0} &= -\frac{EI}{1-\nu^2} \eta'''|_{s=0} \end{aligned} \quad (43)$$

进而叶片的根部传递至转轴的载荷

$$\begin{aligned} F_{b2s} &= \sum_{i=1}^{19} -\frac{EA}{1-\nu^2} \zeta'_i|_{s=0} \\ T_{b2s} &= \sum_{i=1}^{19} -\frac{EI}{1-\nu^2} \eta'''_i|_{s=0} r_{hub} \end{aligned} \quad (44)$$

在分析时,冲击载荷的最大值为 0.289 MN, 通过图 15 可以看出由于叶片旋转产生的离心力作用,使得叶片对轴的横向载荷为 -1.07 MN, 在受到冲击作用后减小到 -0.755 MN, 差值为 0.325 MN, 与分析时施加的冲击载荷相差不大,说明推导的动力学方程的有效性。

图15 叶片传递给转轴的横向载荷

通过图 16 可以看出叶片传递给转轴的扭矩在 1 200 N·m 之间波动,对其做频谱分析如图 17 所示。可以看出,叶片的尖端受到周期性冲击载荷的作用时,1.5 倍频成分最大,并伴随有多次高阶谐波成分,这些特征与工程实践中的经验相符。即转子在发生碰摩时,信号存在多次高阶谐波成分。从侧面说明本文建立的数学模型与真实的物理模型相符。

图16 叶片传递给转轴的扭矩

图17 叶片传递给转轴的扭矩的频谱

2.3 线性减速旋转的叶片受冲击的瞬态响应

假设转子的转速线性减小,即转速以 -100 rad/s^2 的加速度从 $100\pi \text{ rad/s}$ 减速 3 s,在载荷条件不变的情况下,求得的叶片尖端的瞬态响应以及叶片根部传递给转轴的载荷大小。

通过图 18 和图 19 可以看出叶片的横向振动在

图18 线性减速截面转角的瞬态响应

图19 线性减速弯曲变形的瞬态响应

整个减速阶段出现两个主要尖峰，第一个尖峰出现在 1.63 s，此时的工频为 24.06 Hz，第二个尖峰出现在 2.3 s，此时的工频为 13.4 Hz。

通过图 20 可以看出，转子在线性减速情况，纵向变形逐渐减小，并与 Ω^2 成正比，由于冲击作用而产生的纵向变形的情况基本不变。并且可以看到冲击的时间间隔逐渐加大，主要原因是转速在逐渐减小。

图 20 线性减速纵向变形的瞬态响应

由于转子的转速不定，对瞬态响应信号做频谱分析是不合适的，所以此处选择的时频分析，其结果如图 21 所示。

图 21 叶片尖端弯曲变形的时频图

通过图 21 的时频图可以清楚地看到，从左到右、从下到上依次存在工频、2 倍频、3 倍频等。并且可以得到在 1.63 s 出现尖峰的原因是，二次谐波(50.4 Hz)接近叶片的固有频率(54.78 Hz)，振型如图 22；

图 22 航空发动机转子的局部振动(54.78 Hz)

所示在 2.3 s 出现尖峰的原因是，三次谐波(43.4 Hz)接近叶片的固有频率(40.29 Hz)，振型如图 23 所示。接下来对叶片根部的受力进行分析，结果见图 24 和图 25。

图 23 航空发动机转子的局部振动(40.29 Hz)

表 4 叶片谐波共振对比

时间/s	工频/Hz	谐波/Hz	时频图/Hz	有限元/Hz
1.63	24.06	48.12(二)	50.4	54.78
2.3	13.40	41.2(三)	43.4	40.29

图 24 线性减速叶片传递给转轴的横向载荷

图 25 线性减速叶片传递给转轴的扭矩

由于转速的逐渐减小，离心作用而产生的横向载荷逐渐降低，但是冲击作用而产生的载荷未发生变化。

由于转速是变化的，所以同样采取时频分析的方法分析扭矩的特征，其时频分析结果见图 26。

图 26 叶片传递给转轴的扭矩的时频图

通过图 26 可以看出, 叶片传递给转轴的扭矩中存在很多高阶的谐波成分, 所以在叶片与机匣发生碰撞及摩擦时, 叶片传递给转轴的扭矩使得转轴的转速时快时慢, 因而转子此时会出现扭振。

通过图 24 可以看出, 旋转的叶片在每一周均会对转轴的横向振动产生一个冲击载荷, 而冲击载荷在频域上具有很宽的频带, 所以能够激励出转轴的

多阶倍频成分, 因而转子发生碰磨时, 采集的横向振动信号中存在多阶倍频成分。

3 叶片与转轴联合求解

航空发动机在发生叶片脱落之后, 哪些叶片在什么时刻受到多大的冲击载荷与转轴的涡动大小有关, 而转轴的涡动又与叶片传递的载荷有关, 所以需要将前面的转轴的振动与叶片的振动进行联合求解分析, 其分析流程如图 27 所示。

通过图 27 可以看到, 转轴的涡动影响叶片尖端与机匣的距离, 在此处判断叶片尖端与机匣是否发生碰撞, 然后求解每一个叶片的振动, 再求解得到叶片传递给转轴的力和扭矩, 进行矢量合成后施加在转轴上, 再分析转轴的涡动。转轴与叶片之间的传递变形或载荷的时间间隔是 10^{-4} s, 转轴及叶片自身瞬态响应计算时, 时间间隔为 10^{-5} s, 分析的总时间为 1 s。

图 27 航空发动机整体瞬态响应求解流程图

通过图 28 可以看到, 转子的系统总体呈减速趋势, 在叶片脱落的初始阶段, 转速存在较大的波动,

图 28 转子系统的减速曲线(10 MN/m)

后来趋于平稳呈现稳定的减速趋势。在 1 s 内速度差为 -1.3 rad/s。

本文假设 0 号叶片脱落, 由于不平衡力的影响, 与 0 号叶片相对的 10 号叶片的碰磨最严重, 所以此处对 10 号叶片的尖端变形情况进行详细地分析, 如图 29 和图 30 所示。

在叶片脱落的初始阶段, 冲击载荷较大, 使得叶片的弯曲变形和纵向变形均较大。并且 10 号叶片的弯曲变形值稳定在零值以上, 原因是 0 号叶片脱落之后, 10 号叶片在不平衡力的作用下绝大部分时间与机匣发生碰撞及摩擦, 叶片的尖端在摩擦力的作用下, 持续产生弯曲变形。

图 29 第 10 号叶片尖端的弯曲变形(10 MN/m)

图 30 第 10 号叶片的纵向变形(10 MN/m)

在图 31 中可以看出, 轮毂中心的轴心轨迹在初始阶段较混乱, 后面趋于稳定, 与由于不平衡而产生的轴心轨迹类似, 此处的原因是接触刚度取的较小, 冲击载荷的影响减弱, 使得转子系统受不平衡力的影响较大。在与 $K_{rub}=20 \text{ MN/m}$ 的结果对比后更加明了。

图 31 轮毂中心的轴心轨迹(10 MN/m)

图 32 转子系统的减速曲线(20 MN/m)

在接触刚度变为 20 MN/m 时, 转子系统在 1 s 的速度差为 -2.1 rad/s 。相对接触刚度为 10 MN/m 时, 转子系统的减速更为明显。

通过图 33 可以看出叶片的弯曲振动更加复杂, 同样地产生持续弯曲变形。叶片的纵向变形未趋于一个稳定值, 而是在 $0.95 \sim 1.2 \text{ mm}$ 之间波动, 说明冲击载荷在转子系统的振动中已占据主导地位。接下来分析轮毂中心的轴心轨迹, 如图 35 所示。

图 33 第 10 号叶片的弯曲变形(20 MN/m)

图 34 第 10 号叶片的纵向变形(20 MN/m)

图 35 轮毂中心的轴心轨迹(20 MN/m)

通过图 35 能够很明显地看出轴心轨迹与图 31 的不同, 存在很多旋涡, 主要原因是叶片与机匣的接触刚度的加大, 使得转轴同样受到较大的冲击载荷的作用。为了更清楚地解释轴心的运动, 提取 $0.5 \sim 0.52 \text{ s}$ 时间段的轴心轨迹, 如图 36 所示。

转子由于离心力的作用而达到最大涡动值, 此

时在较大的冲击载荷作用下, 转子系统向靠近圆心方向移动; 当转子系统运动到最小的涡动值时, 叶片尖端与机匣脱离, 转子系统在离心力的作用下再向远离圆心的位置移动, 如此反复交替形成最终的轴心轨迹。

图 36 一个周期的轴心轨迹

4 结论与展望

本文所建立的数学模型保留了叶片在轮毂上的特征, 基于连续体 Timoshenko 梁理论分别建立了转轴的涡动和叶片尖端受冲击的非线性动力学方程组。得到了以下几点结果。

- (1) 所有叶片的瞬态响应及转轴的响应。
- (2) 哪些叶片在何时发生碰撞摩擦。
- (3) 叶片与转轴之间的载荷传递情况。
- (4) 转子系统的减速曲线。

并且文中所建立的数学模型, 不仅能够分析 FBO 问题, 还能够求解燃气轮机中叶片与机匣的碰摩问题。并且由于本文基于参数化建模的思想, 所以可以根据实际情况对接触刚度、摩擦因数、碰摩的区域大小以及转子系统的材料参数等进行修改, 所以上述模型可以求解绝大多数轮机的叶片与机匣的碰摩问题。

文中的数学模型可以从以下方面进行改进, 使其更接近真实的物理模型。

- (1) 考虑叶片根部与轮毂的燕尾型榫头连接刚度问题, 即叶片不再是绝对的悬臂结构。
- (2) 叶片不再是完全的弹性体, 叶片碰撞后会产生塑性变形;
- (3) 进一步分析叶片尖端与机匣的接触刚度的原理, 将冲击载荷的模型进行改进;
- (4) 为验证上述理论数学模型的有效性, 需要真实的实验进行验证, 并对模型进行优化。

参 考 文 献

- [1] Federal aviation regulation. 14 CFR Part 33 Airworthiness standards; aircraft engines [S]. Washington: Federal Aviation Administration, 1993: 81-99.
- [2] 梁春华. RR 公司完成 TRENT900 发动机的叶片包容试验[J]. 航空发动机, 2003(3): 44.
LIANG Chunhua. Trent900 fan blade out test finished by Rolls-Royce [J]. Aero-Engine, 2003(3): 44.
- [3] 宣海军, 洪伟荣, 吴荣仁. 航空发动机涡轮叶片包容试验及数值模拟[J]. 航空动力学报, 2005, 20(5): 762-767.
XUAN Haijun, HONG Weirong, WU Rongren. Aero-engine turbine blade containment test and numerical simulation [J]. Journal of Aerospace Power, 2005, 20(5): 762-767.
- [4] 郭明明. 航空发动机风扇机匣包容试验叶片爆破飞脱方法研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2016.
GUO Mingming. Research on blade exploding out methods in aero-engine fan case containment test [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016.
- [5] 叶冬. 高速柔性转子突加大不平衡响应研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2014.
YE Dong. Research of sudden unbalance response of high speed flexible rotor [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014.
- [6] SINHA S K. Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping due to tip-rub [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273(4): 875-919.
- [7] WHITE M W D, HEPPIER G R. Vibration modes and frequencies of Timoshenko beams with attached rigid bodies [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1995, 62: 193-193.
- [8] SINHA S K. Non-linear dynamic response of a rotating radial Timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2005, 40(1): 113-149.
- [9] SINHA S K. Combined torsional-bending-axial dynamics of a twisted rotating cantilever Timoshenko beam with contact-impact loads at the free end [J]. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74(3): 505-522.
- [10] SINHA S K, DORBALA S. Dynamic loads in the fan containment structure of a turbofan engine [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2009, 22(3): 260-269.
- [11] SINHA S K. Rotordynamic analysis of asymmetric turbofan rotor due to fan blade-loss event with contact-impact rub loads [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(9): 2253-2283.

- [12] HEIDERI M, CARLSON D, SINHA S. An efficient multi-disciplinary simulation of engine fan-blade out event using MD Nastran [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008: 2333.
- [13] LEE C W. Vibration analysis of rotors [M]. London: Springer Science & Business Media, 1993.
- [14] JUN O S, KIM J O. Free bending vibration of a multi-step

rotor [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 224(4): 625-642.

作者简介：刘阳，男，1991 年出生。主要研究方向为转子非线性瞬态动力学。

E-mail: liuyangsjtu@qq.com

李富才(通信作者)，男，1976 年出生，教授，博士研究生导师。主要研究方向为旋转机械故障诊断，机械设备的智能监测。

E-mail: fcli@sjtu.edu.cn