DOI: 10.3901/JME.2019.01.112

精密钢球传动耦合热弹性半解析接触模型 及其接触特征^{*}

孙鹏飞 安子军

(燕山大学机械工程学院 秦皇岛 066004)

摘要: 在修正精密钢球传动受力模型和相对滑动模型基础上, 建立精密钢球传动啮合副耦合热弹性半解析接触模型。采用热源法推导啮合副接触温升的半解析式, 并利用影响系数法计算考虑耦合热弹性影响的啮合刚度和啮合副变形。为提高模型的计算效率, 给出了对应公式的离散卷积形式。深入分析精密钢球传动的耦合热弹性接触特征, 并通过对比分析验证半解析模型的可行性。结果表明: 中心盘外侧齿面上的接触温升相对最高, 行星盘内侧齿面上的接触温升相对最低; 啮合副耦合热弹性接触模型计算的啮合副变形和啮合刚度要大于 Hertz 接触模型的计算结果。研究结果可为考虑热特性的精密钢球传动动力学特性的研究以及实际工程应用提供一定的理论依据。

关键词: 精密钢球传动; 耦合热弹性接触; 温升; 变形; 啮合刚度

中图分类号: TH132

Coupled Thermoelastic Semi-analytical Contact Model and Contact Characteristics for Precision Ball Transmission

SUN Pengfei AN Zijun

(School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: Based on the modified model of the force and the relative slide for the precision ball transmission, a coupled thermoelastic semi-analytical contact model of meshing pair is established. The semi-analytical formula of the contact temperature rise of meshing pair is deduced by using the heat source method, and the influence coefficient method is adopted to compute the meshing stiffness and the deformation of meshing pair which considering the effect of coupled thermoelasticity. In order to improve the computational efficiency, the discrete convolution forms of related expressions are also derived. The coupled thermoelastic contact characteristics for precision ball transmission are analyzed deeply, and the comparative analysis approach is used for verifying the availability of the semi-analytical model. The results indicate that the contact temperature rise of the outer tooth surface of the central disc is relatively high, and it is relatively low on the inner surface of the planetary disc; the meshing stiffness and the deformation calculated by the coupled thermoelastic model are larger than those of the Hertz contact model. Therefore, the research results can provide some theoretical foundation for the study of dynamic characteristics of precision ball transmission considering thermal properties and the practical engineering application.

Key words: precision ball transmission; coupled thermoelastic contact; temperature rise; deformation; meshing stiffness

0 前言

精密钢球传动作为一种零背隙、大传动比的高精密传动机构, 其在机器人、航天航空、自动化设备等高精密机械领域中有着良好的应用前景, 近年来吸引了众多学者对其基础理论^[1-2]、啮合力^[3]及动力学^[4-5]等方面进行了大量研究。在涉及啮合副热特

性方面, 文献[6]以闪温理论为基础构建了精密钢球传动啮合副瞬时接触温升模型, 并进行了相关参数的影响分析; 文献[7]研究了短幅系数、钢球半径等结构参数对啮合副表面摩擦温升的影响; 文献[8]在分析精密钢球传动中钢球与齿面间瞬时接触域的基础上初步研究了啮合副上的生热率和摩擦温升随工况参数的变化特性; 文献[9]利用 ANSYS 建立精密钢球传动啮合副本体温度场的有限元模型, 研究结果认为增大短幅系数和减小摆线槽槽型角有利于降低啮合副的本体温度。受啮合副摩擦热的影响, 啮

^{*} 国家自然科学基金资助项目(51275440)。20180128 收到初稿, 20180806 收到修改稿

合副温度变化会引起热变形,严重影响系统传动性能。迄今为止,对考虑热特性的精密钢球传动动力学方面的研究尚少见报道,这直接影响了该机构动力学分析的准确性,所以对考虑耦合热弹性的精密钢球传动啮合副刚度进行研究具有重要的理论意义与工程价值。此外,目前分析钢球与齿面间啮合力及相对滑动的文献未考虑摩擦和啮合钢球自转的影响^[10-11],造成分析结果不够准确,无法支撑耦合热弹性接触及热振动的分析。

该文在修正精密钢球传动受力模型和相对滑动模型的基础上,建立啮合副耦合热弹性半解析接触模型。利用热源法和瞬时点热源的解推导出精密钢球传动啮合副接触温升的半解析式;采用影响系数法计算考虑耦合热弹性影响的啮合副变形和啮合刚度。以期考虑热特性的精密钢球传动动力学特性的研究和实际工程应用提供理论依据。

1 结构与传动原理

精密钢球传动结构如图 1 所示,固定中心盘 2 右端面加工有齿数为 z_1 的外摆线槽,弱刚性组合行星盘 4 左端面加工有齿数为 z_2 的内摆线槽,在内外摆线槽交错处装有 z_b 个减速钢球 3。行星盘 4 右端面和输出盘 7 左端面各加工一组平行的锥形槽;浮动盘 5 左右两端面各加工一组平行的锥形槽,且两组锥形槽相互垂直。装配时盘 5 左右端面锥形槽分别与盘 4 右端面、盘 7 左端面锥形槽平行,并在锥形槽间放置若干等速钢球 6。中心盘 2、减速钢球 3 及行星盘 4 构成精密钢球传动减速机构;行星盘 4、浮动盘 5、等速钢球 6 及输出盘 7 构成等速机构。

图 1 精密钢球传动结构简图

1. 偏心输入轴 2. 固定中心盘 3. 减速钢球 4. 弱刚性组合行星盘
5. 浮动盘 6. 等速钢球 7. 输出盘(轴) 8. 壳体

输入轴以转速 ω_h 转动,带动行星盘作行星运动,行星盘左端面的内摆线槽推动减速钢球运动,由于钢球受到中心盘上外摆线槽的约束,反推行星盘以较低的转速自转,行星盘的自转角速度经等速机构由输出盘输出,实现减速增矩的功能。

2 运动与受力分析

根据图 1 建立坐标系 O_c-xyz , O_c 为中心盘几何中心, z 轴与输出轴重合,钢球系圆心和行星盘几何中心分别为 O_b 和 O_p ,图 2a 为 xy 面内修正的精密钢球传动啮合副受力分析图,图 2b 为其单个钢球啮合副受力分析的放大图。设钢球系中某一钢球与齿顶啮合时为初始啮合状态,该钢球编号为 1,其余钢球按逆时针依次编号。钢球 i 与摆线槽盘的啮合关系由辅助分析角 $\varphi_i(i=1,2,\dots,z_b)$ 确定。设 ψ 为非负整数,当 $2\psi\pi \leq \varphi_i \leq (2\psi+1)\pi$ 时,即前半啮合周期,钢球 i 与中心盘外侧、行星盘内侧齿面啮合;当 $(2\psi+1)\pi \leq \varphi_i \leq (2\psi+2)\pi$ 时,即后半啮合周期,钢球 i 与中心盘内侧、行星盘外侧齿面啮合。

图 2 精密钢球传动啮合副受力分析图

2.1 相对滑动速率与滑动摩擦系数

图 2 中节点 P 为中心盘、行星盘及钢球系的绝对速度瞬心,由运动学知,钢球 i 与中心盘、行星盘在啮合点处的相对滑动速率 V_{sci} 、 V_{spi} 为

$$\begin{cases} V_{sci} = \omega_h r_0 H(\varphi_i) - V_z \\ V_{spi} = \frac{z_1}{z_2} \omega_h r_0 H(\varphi_i) \pm \frac{2}{z_2} \omega_h r \cos \beta - V_z \end{cases} \quad (1)$$

式中 ω_h ——输入轴转速;

V_z ——钢球自转角速度 ω_b 在球面上啮合点处产生的速率;

r_0 ——摆线发生圆半径;

K ——短幅系数;

r ——钢球半径;

β ——摆线槽槽型角;

φ_i ——钢球 i 辅助分析角,钢球系转角为 φ 时, $\varphi_i = \varphi + 2z_1(i-1)\pi/z_b$;

“ $\pm$ ”——钢球与行星盘外、内侧齿面啮合;

$H(\varphi_i)$ —— φ_i 的函数, $H(\varphi_i) = \sqrt{1 + K^2 - 2K \cos \varphi_i}$ 。

BUCKINGHAM 给出滑动摩擦因数 f 与相对滑动速率 V_s 之间的半经验关系^[12]

$$f = 0.05 \exp(-0.125V_s) + 0.002\sqrt{V_s} \quad (2)$$

在垂直于直线 PO_i 方向上, 由达朗贝尔原理可列出钢球 i 的受力平衡方程为

$$F_{pixy} - F_{cixy} = ma_{oi} \quad (3)$$

式中 F_{pixy} 、 F_{cixy} ——行星盘、中心盘与钢球 i 间的摩擦力在 xy 平面内的分量, 可由库伦摩擦定律求得;

a_{oi} ——钢球质心加速度;

m ——钢球质量。

考虑 m 和 a_{oi} 数值均很小, 与摩擦力相比, 式(3)中的惯性力可忽略不计, 则联立式(1)~(3)得

$$0.05 \left[\exp(-0.125V_{spi}) - \exp(-0.125V_{sci}) \right] + 0.002 \left(\sqrt{V_{spi}} - \sqrt{V_{sci}} \right) = 0 \quad (4)$$

由式(4)求出 V_z 值并代入式(1)和式(2), 可得到对应的相对滑动速率和滑动摩擦因数。

2.2 啮合法向力与摩擦力

与传统啮合力算法相比, 文献[10]所采用的接触刚度系数法虽进一步提高啮合法向力的计算精度, 但仍未考虑摩擦影响。在考虑摩擦影响后, 钢球 i 与齿面间啮合法向力可表示为

$$N_i = \frac{\left(\kappa_{hci}^{-\frac{2}{3}} + \kappa_{hpi}^{-\frac{2}{3}} \right)^{-1.5} l_{Ni}^{1.5}}{\sum_{j=1}^{z_b} \left(\kappa_{hcj}^{-\frac{2}{3}} + \kappa_{hpj}^{-\frac{2}{3}} \right)^{-1.5} \left(l_{Nj}^{2.5} \cos \beta - f_{Fj} l_{Nj}^{1.5} \right)} M_r \quad (5)$$

式中 κ_{hci} 、 κ_{hpi} ——钢球 i 与中心盘、行星盘间的有效接触刚度系数^[13];

M_r ——负载扭矩;

l_{Ni} 、 l_{Fi} ——法向力、摩擦力在 xy 平面内分量的力臂;

$$l_{Ni} = Kz_2 r_0 |\sin \varphi_i| / H(\varphi_i);$$

$$l_{Fi} = Kz_2 r_0 |K - \cos \varphi_i| \cdot \text{sgn}(\cos \varphi_i) / H(\varphi_i) + z_b r_0 H(\varphi_i) \pm r \cos \beta.$$

式中, “sgn” 表示符号函数。

钢球 i 与齿面间摩擦力则为

$$F_i = f N_i \quad (6)$$

3 啮合副耦合热弹性接触模型

3.1 物理模型与控制方程的解耦

鉴于耦合热弹性接触问题的复杂性, 对其进行合理简化与假设是进行相关研究的必要前提:

① 接触体材料相同且材料属性与温度无关, 不考

虑接触面的微观影响; ② 接触体处于完全弹性和小变形范围, 忽略热变形对接触体表面曲率及等速机构接触变形的影响; ③ 接触体间为干摩擦, 摩擦热被两接触体完全吸收, 接触区以外表面视为绝热表面。

钢球和摆线槽盘相较于接触区尺寸而言均可用统一半无限弹性体模型进行等效, 如图3所示。本文仅以钢球与中心盘间耦合热弹性接触特征进行分析, 钢球与行星盘间的接触特征可按相同方法计算。图中 $oxyz$ 为与接触体固联的静坐标系, $o'x'y'z'$ 为以接触区 Ω 的中心为原点并随其移动的动坐标系, 移动方向为 $x(x')$ 轴正向, 初始时两坐标系重合; V 为接触区 Ω 的移动速率, 即热源移动速率; t 为观察时间, τ 为历史时间。图中虚线表示 τ 时接触区位置。接触区 Ω 内分布着 Hertz 压力 $p(x', y', t)$ 、切向力 $s(x', y', t)$ 及摩擦热 $q(x', y', t)$ 。三者关系为

$$p(x', y', t) = p_0 \sqrt{1 - (x'/a)^2 - (y'/b)^2} \quad (7)$$

$$s(x', y', t) = f p(x', y', t) \quad (8)$$

$$q(x', y', t) = V_s f p(x', y', t) \quad (9)$$

式中 a 、 b ——接触椭圆半轴;

p_0 ——接触椭圆中心压力, $p_0 = 3N/(2\pi ab)$ 。

图3 接触体的等效半无限弹性体模型

忽略体积力与惯性项, 笛卡儿坐标系下耦合热弹性控制方程的张量符号形式表示为

$$\begin{cases} G \nabla^2 u_{\zeta} + (\lambda + G) \varepsilon_{,\zeta} = \beta \theta_{,\zeta} \\ k_d \nabla^2 \theta = \dot{\theta} + \beta T_0 \dot{\varepsilon} / \rho c \end{cases} \quad \zeta = x, y, z \quad (10)$$

式中 u_{ζ} ——位移分量;

θ ——温升;

ε ——体应变;

λ 、 G ——拉梅常数;

β ——热应力系数;

k_d ——热扩散系数;

T_0 ——初始温度;

ρ ——密度;

c ——比热容;

∇^2 ——Laplace算子。

采用热弹性位移势法对控制方程式(10)解耦后得到脱离耦合的温度场控制方程, 即

$$\nabla^2 \theta = \dot{\theta}/k'_d \quad (11)$$

式中, $1/k'_d = \left[1 + \frac{\beta^2 T_0}{\rho c (\lambda + 2G)} \right] / k_d$ 。

3.2 啮合副接触温升的半解析模型

根据瞬时点热源的解和热源法^[14-15], 推导方程式(11)的解即为考虑热弹耦合时 t 时刻移动面热源在接触体表面上点 (x_m, y_n) 所产生的温升, 即

$$\theta(x_m, y_n, t) = \int_0^t \iint_{\Omega} \frac{\gamma q(x', y', \tau)}{4\rho c [\pi k'_d (t - \tau)]^{1.5}} \exp\left[-\frac{R^2}{4k'_d (t - \tau)}\right] dx' dy' d\tau \quad (12)$$

式中, $R^2 = \left(x_m - x' - \int_0^t V d\tau\right)^2 + (y_n - y')^2$; γ 为热分配系数, 其值用迭代法通过计算机编程匹配接触区内最大接触温升相等确定^[16]。热源在对应接触体表面上移动速率 V 由精密钢球传动运动原理求出。

将接触区及附近区域按图 4 所示离散成 $N_x \times N_y$ 个单元, 将时间 t 离散成 N_t 个单元, 每个离散单元上的热流分布可视为常数。对变量 τ 作变换 $t' = t - \tau$, 并考虑 $oxyz$ 与 $o'x'y'z'$ 之间的坐标变换关系, 则式(12)的半解析形式可表示为

$$\theta(x_m, y_n, t) = C \sum_{\xi=1}^{N_x} \sum_{\eta=1}^{N_y} \sum_{\tau=1}^{N_t} q(x'_\xi, y'_\eta, t'_\tau) I(X', Y', t'_\tau) \quad (13)$$

式中 $C = \gamma / (4\rho c \sqrt{\pi k'_d})$;

$$I(X', Y', t'_\tau) = \int_{t-t'_\tau}^{t-t'_\tau+\Delta t} \frac{1}{\sqrt{t'}} \left[\operatorname{erf} \frac{X' + \int_{t-t'}^t V d\tau' + \Delta x'/2}{2\sqrt{k'_d t'}} - \operatorname{erf} \frac{X' + \int_{t-t'}^t V d\tau' - \Delta x'/2}{2\sqrt{k'_d t'}} \right] \cdot \left[\operatorname{erf} \frac{Y' + \Delta y'/2}{2\sqrt{k'_d t'}} - \operatorname{erf} \frac{Y' - \Delta y'/2}{2\sqrt{k'_d t'}} \right] dt'$$

式中, $X' = x'_m - x'_\xi$, $Y' = y'_n - y'_\eta$, $m=1, 2, \dots, N_x$, $n=1, 2, \dots, N_y$ 。 $\Delta x'$ 和 $\Delta y'$ 为矩形单元尺寸, Δt 为时间单元步长。

图 4 空间与时间单元离散示意图

令 $q_{\xi, \eta}^\tau = q(x'_\xi, y'_\eta, t'_\tau)$, $I_{m-\xi, n-\eta}^\tau = I(x'_m - x'_\xi, y'_n - y'_\eta, t'_\tau)$, 则式(13)可通过离散卷积与快速傅里叶变换技术提高其计算效率。对应的离散卷积形式为

$$\theta(x'_m, y'_n, t) = C \sum_{\xi=1}^{N_x} q_{m, n}^\tau ** I_{m, n}^\tau = C \sum_{\xi=1}^{N_x} \text{IFFT}(\tilde{q} \times \tilde{I}) \quad (14)$$

式中 “**” —— 二维离散卷积运算;

“IFFT” —— 快速傅里叶逆变换;

“ $\approx$ ” —— 二维快速傅里叶变换。

3.3 啮合副变形与啮合刚度的半解析模型

由假设知, 钢球和齿面间接触区内的表面膨胀被阻止, 因此接触区内法向位移应保持不变。

若钢球 i 与中心盘在某啮合位置的接触温升分布为 $\theta_{ci}(x', y')$, 则为维持此时接触区内法向位移, 应在原接触压力上叠加如下分布压力^[17]

$$p_{ci}^*(x', y') = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)} \theta_{ci}(x', y') \quad (15)$$

式中 E —— 弹性模量;

α —— 热膨胀系数。

考虑耦合热弹性后, 钢球 i 和中心盘间的总接触压力 $\hat{p}_{ci}$ 则为

$$\hat{p}_{ci}(x', y') = p_{ci}(x', y') + p_{ci}^*(x', y') \quad (16)$$

接触压力 $\hat{p}_{ci}$ 在接触区及附近区域产生的表面法向位移分布可按影响系数法^[18]计算, 即

$$\hat{u}^z = \sum_{\xi=1}^{N_x} \sum_{\eta=1}^{N_y} D_{m-\xi, n-\eta} \hat{p}_{\xi, \eta} = D_{m, n} ** \hat{p}_{m, n} \quad (17)$$

式中 $\hat{p}_{\xi, \eta}$ —— 单元 (ξ, η) 上的总接触压力;

$D_{m-\xi, n-\eta}$ —— 分布压力影响系数。

则钢球 i 与中心盘间的啮合副变形 δ_{ci} 为

$$\delta_{ci} = \max(\hat{u}_c^z + \hat{u}_b^z) \quad (18)$$

式中, 下标 c 、 b 分别表示中心盘、钢球。

式(16)在接触区 Ω 内积分得考虑耦合热弹性时钢球 i 与中心盘间的啮合法向力

$$\hat{N}_i = N_i + \iint_{\Omega} p_{ci}^*(x', y') dx' dy' \quad (19)$$

由胡克定律可知, 考虑耦合热弹性时钢球 i 与中心盘间的啮合刚度为

$$\kappa_{ci} = d\hat{N}_i / d\delta_{ci} \quad (20)$$

钢球 i 与行星盘间的耦合热弹性接触特征可按相同的过程计算, 这里不再赘述。

4 实例计算及讨论

4.1 传动机构样机参数

实例计算所用样机参数如表 1, 样机材料选用轴承钢, 对应材料属性^[19]如表 2。考虑精密钢球传动结构对称性和啮合周期性^[3], 同时为减少计算量, 实例中仅分析一个周期内钢球 1 和摆线槽盘间的耦合热弹性接触特征。初始温度 T_0 为 290 K。

表 1 精密钢球传动样机参数

参数名称	取值
中心盘齿数 z_1	19
行星盘齿数 z_2	21
短幅系数 K	0.3
发生圆半径 r_0/mm	2
槽型角 β/rad	$\pi/4$
钢球半径 r/mm	2.5
输入轴转速 $\omega_0/(\text{rad/s})$	50π
负载扭矩 $M_f/(\text{N}\cdot\text{m})$	3

表 2 轴承钢(GCr15)的材料属性

弹性模量 E/MPa	泊松比 μ	密度 $\rho/(\text{kg/m}^3)$
2.06×10^5	0.3	7 850
热导率 $k/(\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}))$	比热容 $c/(\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))$	热膨胀系数 α/K^{-1}
45	460	12.5×10^{-6}

4.2 相对滑动速率与滑动摩擦系数

一个周期内($0 \leq \varphi \leq 2\pi$)钢球 1 的惯性力 $F_d(=ma_{o1})$ 及其与齿面间相对滑动速率和滑动摩擦因数的变化规律如图 5 所示。图 5a 表明钢球的惯性力极微小, 与摩擦力相比可忽略不计; 由图 5b 可知, 钢球与单个摆线槽外侧齿面的相对滑动速率大于内侧齿面的相对滑动速率; 图 5c 表明因忽略惯性力的影响使得计算的滑动摩擦因数 $f_{ci}=f_{pi}=f$ 。

图 5 钢球 1 对应的惯性力、相对滑动速率和滑动摩擦因数

4.3 啮合法向力和摩擦力

图 6a 给出了考虑和未考虑摩擦的啮合法向力计算结果比较, 其中根据文献[10]计算的法向力曲线未考虑摩擦的影响。由图 6b 可知, 摩擦力虽远小于法向力, 但由于摩擦力臂较长, 如图 7 所示, 摩擦力对法向力产生的影响不能忽略。

图 6 钢球 1 与齿面间法向力和摩擦力

图 7 钢球 1 与齿面间啮合力的力臂

4.4 啮合副接触温升

为验证本文啮合副接触温升半解析模型, 应用 TIAN 的方法^[20]、数值方法^[21]及本文方法分别计算一周期内钢球 1 与中心盘间的最大接触温升, 并对结果进行比较, 如图 8 所示。由图可知, 不同方法计算的啮合副最大接触温升具有相同的变化趋势, 数值上略有差异, 证明本文模型有效可行。

图 8 不同方法计算啮合副最大接触温升结果比较

图 9 给出了一个啮合周期内钢球 1 与中心盘、行星盘间啮合副最大接触温升随钢球系转角的变化关系。由图可知, 由于钢球与中心盘(或行星盘)外侧齿面啮合时的相对滑动速率大于其与内侧齿面啮合时的相对滑动速率, 单个摆线槽外侧齿面上接触温升高于内侧齿面上接触温升; 在前半周期, 中心盘外侧齿面上接触温升远高于行星盘内侧齿面上接触温升, 在后半周期, 钢球与两盘齿面间的接触温升相差不大, 图 5b 表明了这种温升特性的原因:

前半周期钢球与两盘的相对滑动速率相差较大, 而後半周期的相对滑动速率相差较小。此外, 由後半周期相对滑动速率曲线和接触温升曲线所表现的特征可知, 虽然接触温升受多种因素共同影响, 但相对滑动速率是影响温升的决定因素。

图 9 中心盘和行星盘上最大接触温升

图 10a、10b 为 $\varphi=1.3$ rad 时钢球 1 分别与中心盘和行星盘的啮合副接触温升分布, 此时钢球与中心盘间接触椭圆半轴为 $a_c=0.099$ mm、 $b_c=0.095$ mm; 钢球与行星盘间接接触椭圆半轴为 $a_p=0.093$ mm、 $b_p=0.096$ mm。图中温升等值线表明, 由于热源在接触体表面上沿 x' 轴正向移动, 接触区上的温升分布整体向 x' 轴负向偏移, 最大接触温升位置也偏移至接触区中心和后缘之间的某一位置。在 y' 轴方向上, 啮合副接触温升分布仍关于 $y'=0$ 对称。图中数据还表明接触温升自最大温升位置向边缘迅速减小, 高温区集中在最大温升位置附近区域。

图 10 啮合副接触温升分布(K)

4.5 啮合副变形与啮合刚度

图 11 是根据 Hertz 接触和耦合热弹性接触模型计算的钢球 1 与中心盘间的啮合刚度和啮合副变形。由图 11a 可知, 由于耦合热弹性接触模型考虑了温度变化的影响, 其计算的啮合刚度要大于根据 Hertz 接触计算值, 但两者随钢球系转角的变化趋势相同。啮合力越大的啮合位置, 两种接触模型计算的啮合刚度相差越大, 这是因为在啮合力大的位置, 啮合副温升大, 其受耦合热弹性的影响更显著。由图 11b 可知, 当前模型计算的啮合副变形大于 Hertz 接触模型计算的结果, 这是由于耦合热弹性接触模型考虑了啮合副摩擦热产生的热变形, 并且啮合力越大的位置, 两种模型计算的啮合副变形相差越大。综上所述, 在构建系统动力学模型时考虑啮合副耦合热弹性的影响能更准确分析该传动机构的振动特性。

图 11 Hertz 模型与本文模型比较

钢球系转角 $\varphi=5$ rad 时中心盘上接触区的表面法向位移分布如图 12 所示。图 12a 和 12b 分别是根据耦合热弹性接触模型和 Hertz 接触模型计算的结果。在前述样机参数下两种模型计算的表面法向位移最大相差约 $1 \mu\text{m}$, 所以由耦合热弹性接触模型计算的结果更准确。图 12 还表明越靠近啮合副温升大的位置, 两种模型计算的表面法向位移相差越大。

图 12 $\varphi=5$ rad 时中心盘上接触区表面法向位移分布

一个啮合周期内钢球 1 与中心盘、行星盘间的啮合刚度随钢球系转角的变化关系如图 13 所示; 图 14 为对应啮合副变形随钢球系转角的变化关系。在前半啮合周期, 即钢球与中心盘外侧、行星盘内侧齿面相啮合, 钢球与中心盘间啮合刚度高于钢球与行星盘间的啮合刚度, 而钢球与中心盘间的啮合副

变形则小于与行星盘间的啮合副变形；在后半啮合周期则表现出相反特征。由于外侧齿面的曲率半径大，内侧齿面的曲率半径小，在中心盘齿面上最大啮合刚度出现在前半周期，最大啮合副变形出现在后半周期；在行星盘齿面上则是最大啮合刚度出现在后半周期，最大啮合副变形出现在前半周期。

图 13 中心盘和行星盘上啮合刚度

图 14 中心盘和行星盘上啮合副变形

5 结论

根据建立的精密钢球传动耦合热弹性半解析接触模型，采用热源法和影响系数法获得啮合副耦合热弹性接触特征，通过对比分析验证了模型的可行性。

(1) 在钢球摆线槽啮合副中，钢球与中心盘摆线槽外侧齿面啮合的接触温升最高，钢球与行星盘摆线槽内侧齿面啮合的接触温升最低。

(2) 钢球与中心盘(或行星盘)间的最大啮合副变形出现在内侧齿面上，最大啮合刚度则出现在外侧齿面上。

(3) 耦合热弹性半解析接触模型与 Hertz 接触模型相比，前者啮合副变形和啮合刚度的计算结果比后者的大，考虑耦合热弹性影响能更准确分析精密钢球传动动力学特性。

参 考 文 献

- [1] TERADA H, IMSE K. Fundamental analysis of a cycloid ball reducer(5th Report): Development of a two stage type reduction mechanism[J]. Journal of the Japan Society for Precision Engineering, 2009, 75(12): 1418-1422.
- [2] 安子军. 摆线钢球行星传动研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2000.

学, 2000.

AN Zijun. The research for cycloid steel ball planetary transmission[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2000.

- [3] 张鹏, 安子军, 杨作梅. 摆线钢球行星传动啮合副非线性力学性能研究[J]. 工程力学, 2010, 27(3): 186-192.
- ZHANG Peng, AN Zijun, YANG Zuomei. Research on nonlinear mechanical properties for engagement pair of cycloid ball planetary transmission[J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(3): 186-192.
- [4] 杨荣刚, 安子军, 段丽英. 摆线钢球行星传动自由振动分析[J]. 中国机械工程, 2016, 27(14): 1883-1891.
- YANG Ronggang, AN Zijun, DUAN Liying. Analysis of free vibration of cycloid ball planetary transmission[J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(14): 1883-1891.
- [5] 聂松辉, 李鸿, 颜斌. 摆线钢球减速器振动分析[J]. 机械设计与研究, 2014, 30(2): 56-59.
- NIE Songhui, LI Hong, YAN Yu. The vibration analysis of the cycloid steel ball reducer[J]. Machine Design and Research, 2014, 30(2): 56-59.
- [6] HONG Cheng, AN Zijun. Research on instantaneous contact temperature rising of constantly no clearance precision steel ball transmission[C]// Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference, December 19-20, 2015, Chongqing, China. IEEE, 2016: 39-43.
- [7] 王海侠. 精密钢球传动啮合副摩擦性能研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2014.
- WANG Haixia. Study on friction performance of engagement pair of precision ball drive[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014.
- [8] 孙鹏飞, 安子军, 刘向辉. 精密钢球传动减速机构的瞬时接触热特性分析[J]. 中国机械工程, 2017, 28(9): 1009-1015.
- SUN Pengfei, AN Zijun, LIU Xianghui. Analysis on instantaneous contact thermal characteristics of reducing mechanisms for precision ball transmissions[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(9): 1009-1015.
- [9] 洪诚, 安子军, 夏婧琪, 等. 实时无隙钢球精密传动啮合副本体温度场分析[J]. 机械强度, 2017, 39(6): 1391-1397.
- HONG Cheng, AN Zijun, XIA Jingqi, et al. Analysis of bulk temperature field of constantly no clearance precision steel ball transmission[J]. Journal of Mechanical Strength, 2017, 39(6): 1391-1397.
- [10] 安子军, 杨荣刚, 宜亚丽. 精密钢球传动啮合法向力与弹性回差[J]. 机械工程学报, 2016, 52(9): 42-48.
- AN Zijun, YANG Ronggang, YI Yali. Engagement normal force and elastic backlash of precision ball transmission[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(9): 42-48.

- [11] 宜亚丽, 安子军, 王海侠. 无隙钢球精密传动啮合副滑动特性研究[J]. 中国机械工程, 2014, 25(23): 3206-3211.
YI Yali, AN Zijun, WANG Haixia. Research on sliding property of no-backlash ball precision transmission meshing pair[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(23): 3206-3211.
- [12] BUCKINGHAM. Analytical mechanics of gears[D]. New York: Dover, 1949.
- [13] JOHNSON K L. Contact mechanics[D]. London: Cambridge University Press, 1985.
- [14] JAEGER J C. Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts[J]. J. and Proc. Roy. Soc., 1942, 76: 203-224.
- [15] KUO W, LIN J. General temperature rise solution for a moving plane heat source problem in surface grinding[J]. Int. J. Adv. Manuf. Technol., 2006, 31(3-4): 268-277.
- [16] BLOK H. Theoretical study of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness lubricating condition[C]// Proceeding of the Institute of mechanical engineers general discussion of lubrication. London: Institute of Mechanical Engineers, 1937: 222-235.
- [17] BARBER J R. Distortion of the semi-infinite solid due to transient surface heating[J]. Int. J. Mech. Sci., 1972, 14(6): 377-393.
- [18] LIU S B, WANG Q. A three-dimensional thermomechanical model of contact between non-conforming rough surfaces[J]. Journal of Tribology, 2001, 123(1): 17-26.
- [19] 李晓滨, 丁桦, 唐正友. GCr15 轴承钢连铸过程中热物性参数的研究[J]. 材料与冶金学报, 2010, 9(4): 241-244.
LI Xiaobin, DING Hua, TANG Zhengyou. Study of thermo-physical properties for GCr15 bearing steel in continuous casting[J]. Journal of Materials and Metallurgy, 2010, 9(4): 241-245.
- [20] TIAN X, KENNEDY F E. Maximum and average flash temperatures in sliding contacts[J]. Journal of Tribology, 1994, 116(1): 167-174.
- [21] 李维特, 黄保海, 毕仲波. 热应力理论分析及应用[D]. 北京: 中国电力出版社, 2004.
LI Weite, HUANG Baohai, BI Zhongbo. Thermal stress theory analysis and application[D]. Beijing: China Electric Power Press, 2004.

作者简介: 孙鹏飞, 男, 1990 年出生。博士研究生。主要研究方向为精密机械传动理论与应用。

E-mail: ysupfsun@sina.com

安子军(通信作者), 男, 1960 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为现代机械传动理论与控制、汽车动力学。

E-mail: zjan@ysu.edu.cn