

DOI: 10.3901/JME.2016.13.017

空间单环 RPSC 机构的运动和奇异分析*

陈子明^{1,2} 黄坤^{1,2} 刘晓檬^{1,2} 张扬^{1,2} 黄真^{1,2}

(1. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室 秦皇岛 066004;

2. 燕山大学机械工程学院 秦皇岛 066004)

摘要: 单环机构又称单闭链机构,这类机构运动巧妙,在诸多领域有着广泛应用。另外,在工程实际中还常常在开链机构中加入局部闭链以改善动力学性能,增加结构刚度等。介绍一种能够实现垂直 Darboux 运动(Vertical Darboux motion, VDM)的空间单环 RPSC 机构,运用螺旋理论对其约束及运动性质进行分析。通过对锁住其驱动关节后的等价机构进行约束分析,确定了该机构的一类特殊驱动奇异,并借助相对直观的几何方法对 RPSC 机构中存在的这种奇异位形做进一步解释与说明。对机构中 RPS 分支的主要特点进行概括,并由特殊到一般地提出了一类具有相似特性的单环机构。

关键词: 空间单环机构;螺旋理论;驱动奇异;死点;VDM 运动

中图分类号: TH112

Motion and Singularity Analysis of a Spatial Single-loop RPSC Mechanism

CHEN Ziming^{1,2} HUANG Kun^{1,2} LIU Xiaomeng^{1,2} ZHANG Yang^{1,2} HUANG Zhen^{1,2}

(1. Hebei Provincial Key Laboratory of Parallel Robot and Mechatronic System, Yanshan University,

Qinhuangdao 066004;

2. School of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: Single-loop mechanisms can realize various kinds of motion and have wide applications. Closed chains are often put in the open-chain mechanisms as partial structure to improve the dynamic performance and increase the structure stiffness, which are widely used in engineering practice. A spatial single-loop RPSC mechanism which can realize vertical Darboux motion is introduced and its constraint and motion properties are analyzed based on screw theory. A special class of actuation singularity can be found by analyzing the constraints of this RPSC mechanism after the actuated joint is locked. A more intuitionistic geometric interpretation of this kind of singular configuration is given with the comparison of a similar planar mechanism. The key characteristics of the RPS limb in the mechanism are summarized, on the basis of which a class of more general single-loop mechanisms with similar properties are proposed.

Key words: spatial single-loop mechanism; screw theory; actuation singularity; dead point; vertical Darboux motion

0 前言

连杆机构根据各杆件间的相对运动,分为平面连杆机构和空间连杆机构。与平面机构相比,空间连杆机构在实现构件的空间运动方面具有构件数少、结构简单、运动多样性等优点。在空间机构的研究过程中,提出了各类空间单环连杆机构,这些单环机构在一些轻工业机械中,在汽车、飞机以及其他机械和仪表中都有着广泛的应用^[1]。

一百多年前英国数学家 BENNETT^[2]提出了著名的 Bennett 机构,它是唯一的由 4 个转动副构成的

单自由度空间机构,至今仍有学者对其进行研究^[3]。另外,有许多机构是以 Bennett 机构作为单元进行综合得到的,如著名的 Goldberg 机构、Myard 机构等^[4]。还有如 Schatz 机构^[5]、Bricard 机构^[6]等均为单环机构,这些单环机构大多是过约束机构。LIU 等^[7-8]运用约束螺旋理论对一些空间单环机构的自由度计算、受力分析等问题作了深入的研究。郭盛等^[9-10]对单闭环一自由度及多自由度过约束机构进行了系统的综合。Di GREGORIO^[11]研究并分析了许多单环的三自由度转动机构。LEE 等^[12-13]采用位移子群求交的方法构造出一系列能够实现一种称作垂直 Darboux 运动(Vertical Darboux motion, VDM)的空间运动的单环机构及并联机构,这些机构末端点上点的运动轨迹均为椭圆。这类运动最早由 DARBOUX 提出而得名 Darboux 运动, VDM 是其

* 国家自然科学基金(51305381)和高等学校博士学科点专项科研基金联合资助课题(新教师类)(20131333120006)资助项目。20150807 收到初稿,20160311 收到修改稿

中特殊的一种^[14]。

机构的奇异分析是机构学研究中的一个很重要的问题。GOSSELIN 等^[15]根据机构的速度输入与输出雅可比矩阵的奇异条件,将并联机构的奇异位形划分为边界奇异、内部奇异和结构奇异三种类型。Di GREGORIO^[16]通过锁住驱动关节,将原机构看作另一等效机构的方法来研究并联机器人正向奇异的问题。黄真等^[17-18]通过引入线几何中性丛的概念来研究并联机构的奇异位形并据此把 Stewart 并联机构的奇异位形划分为一般线性丛奇异和两类特殊线性丛奇异。FANG 等^[19]将少自由度并联机构的奇异分为分支运动奇异、平台约束奇异和驱动奇异。

本文介绍了一种一自由度的空间单环 RPSC 机构,这种机构能够实现 VDM 运动。这里运用螺旋理论,将 RPSC 机构等价于并联机构,对其约束及运动性质进行了深入研究。通过对机构中存在的一些极限位置进行约束分析,找到了机构存在的一类特殊驱动奇异;同时由运动分析得到了这类机构末端件运动螺旋的变化规律,从分支约束性质的角度对机构的主要特点进行了概括,设计出了一类具有类似特性的单环机构。

1 单环 RPSC 机构的运动特点

图 1 所示的是一个空间单环 RPSC 机构,其可看作是由动、定平台以及一个圆柱副分支和一个 RPS 分支组成的并联机构。其中动、定平台相互平行,圆柱副的轴线垂直于两个平台平面,RPS 分支包含一个与定平台相连的转动副、一个移动副以及一个与动平台相连的球面副,其中转动副的轴线相对于定平台倾斜布置。

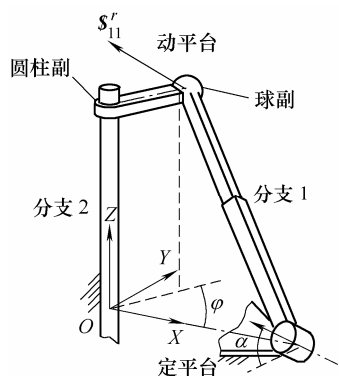


图 1 单环 RPSC 机构

在定平台上建立图 1 所示坐标系 $OXYZ$, 坐标原点位于圆柱副轴线与定平台的交点, Z 轴与圆柱副轴线重合, X 轴指向定平台转动副中心, Y 轴由

右手法则确定。为方便计算,假定 RPS 分支中转动副转轴平行于 YZ 平面,于是其轴线可以看作是平行于 Y 轴的直线绕 X 轴顺时针转 α 角得到。

根据螺旋理论容易分析得到, RPS 分支的约束为一个方向平行于转动副轴线且通过球副中心的力线矢^[20]。也就是说, RPS 分支仅对动平台施加一个约束力,记为 \mathcal{S}_{11}^r 。设其为

$$\mathcal{S}_{11}^r = (\mathcal{S}; \mathcal{S}_0) = (LMN; PQR) \quad (1)$$

式中, \mathcal{S} 表示线矢的方向; \mathcal{S}_0 表示线矩,与 \mathcal{S}_{11}^r 的空间位置相关,且满足 $\mathcal{S} \cdot \mathcal{S}_0 = 0$ 。

由于 RPS 分支中的转动副固连在定平台上,所以约束力线矢的方向矢量 \mathcal{S} 相对于定系保持不变,即 L, M, N 均为常量。

分支 2 仅包含一个圆柱副,限制了动平台水平方向上的转动与移动,容易得到其约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{21}^r = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r = (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{23}^r = (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{24}^r = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0) \end{cases} \quad (2)$$

因此,动平台的约束螺旋系可表示为

$$\mathcal{D} = (\mathcal{S}_{11}^r \ \mathcal{S}_{21}^r \ \mathcal{S}_{22}^r \ \mathcal{S}_{23}^r \ \mathcal{S}_{24}^r)^T \quad (3)$$

由于 \mathcal{S}_{11}^r 不平行于定平台平面,所以其方向矢量 \mathcal{S} 在 Z 轴方向上的分量 N 为非零常量。而由式(2)可以看出分支 2 的约束螺旋系第三列元素全为 0,所以 \mathcal{S}_{11}^r 不可能由式(2)中的四个螺旋线性表示,即 \mathcal{S}_{11}^r 与 $\mathcal{S}_{21}^r, \mathcal{S}_{22}^r, \mathcal{S}_{23}^r, \mathcal{S}_{24}^r$ 线性无关, \mathcal{D} 的秩为 5,机构自由度为 1。

由螺旋互逆原理,可以求得平台的运动螺旋系为

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1; 0 & 0 & \frac{-R}{N} \end{pmatrix} \quad (4)$$

运动螺旋 \mathcal{S} 的节距为

$$h = -\frac{R}{N} \quad (5)$$

由式(1)和式(5)可以看出, h 的值仅与 \mathcal{S}_{11}^r 相关。式中 N 为非零常量,而 R 的值会随机机构的运动不断变化。一般情况下, h 不为零,平台的运动螺旋 \mathcal{S} 是一个节距为有限值的一般螺旋,也就是说,动平台的运动为螺旋运动。

随着机构的运动, RPS 分支对平台施加的约束力的空间位置也在发生变化。当机构运动到图 2 所示的位置, RPS 分支的约束力 \mathcal{S}_{11}^r 与圆柱副轴线相

交, 设交点为 $H_0(0 \ 0 \ Z_0)$ 。可得

$$(P \ Q \ R) = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & Z_0 \\ L & M & N \end{vmatrix} \quad (6)$$

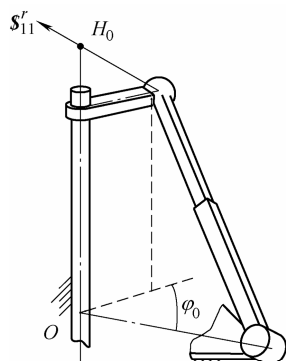


图2 \mathbf{S}'_{11} 与圆柱副轴线相交的位置

此时 $R=0$, 根据式(4), 动平台运动螺旋为

$$\mathbf{S} = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \quad (7)$$

可以看出, 在这个位置上动平台的瞬时运动并非螺旋运动, 而是绕 Z 轴的纯转动。

如果在 XZ 平面上 H_0 点两侧任意选取两点 $H_1(X_1 \ 0 \ Z_1)$, $H_2(-X_1 \ 0 \ Z_2)$, 假设机构达到图 2 所示位置前后, 机构 RPS 分支对平台的约束力分别过 H_1, H_2 点。其中 X_1, Z_1, Z_2 均为常数。

利用式(6)计算可得, 当 \mathbf{S}'_{11} 过点 H_1 时, $R = X_1 \cdot M$; 过 H_2 点时, $R = -X_1 \cdot M$ 。由式(5)可以看出, 两个位置上, 平台运动螺旋的节距异号。

由定义, 运动螺旋的节距为

$$h = \frac{\omega \cdot \mathbf{v}^0}{\omega \cdot \omega} \quad (8)$$

式中, ω, \mathbf{v}^0 分别表示动平台的角速度矢量及动平台上原点重合点处的线速度矢量^[21]。

由于动平台螺旋运动的轴线过原点 O , 平台运动时, 角速度矢量 ω 与线速度矢量 \mathbf{v}^0 共线, 所以 $h>0$ 时, ω, \mathbf{v}^0 同向, $h<0$ 时, ω, \mathbf{v}^0 反向。其物理意义为: $h>0$ 时, 动平台一边逆时针旋转一边上升, 如图 3a 所示; 当机构运动到图 3b 所示位置时, $h=0$, 机构为瞬时纯转动, 该位置为运动的临界位置; 通过上述临界位置后, 机构继续运动, 此时 $h<0$, 动平台一边逆时针旋转一边下降, 如图 3c 所示。可知, 机构在绕圆柱副轴线逆时针转动过程中, 机构动平台先上升后下降。

机构动平台在逆时针旋转过程中存在两个这样的临界位置, 另外一个临界位置如图 4 所示, 动平台位于定平台的下侧。此时, RPS 分支对动平台

的约束力也与圆柱副轴线相交, 交点为 H'_0 , 利用式(6)可知此时 $h=0$ 。根据上面的分析, 可知动平台在运动到该位置前, 动平台随转动下降; 通过该临界位置后动平台随转动开始上升。因此, 可以看出机构的运动为一个循环运动, 不考虑杆件间的干涉, 动平台每转动 360° , 都能回到相同的位置。

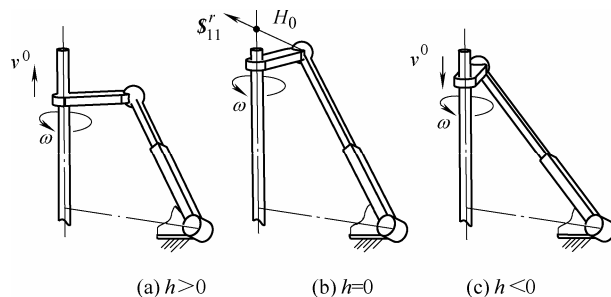


图3 动平台的螺旋运动

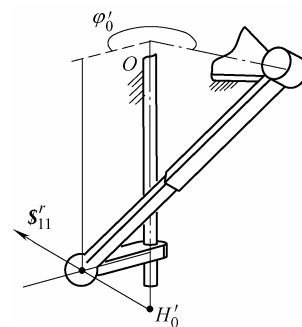


图4 动平台的另外一个临界位置

2 一种特殊的驱动奇异

因为动平台的运动为循环的螺旋运动, 运动过程中机构各运动副的运动范围必定受到一定限制, 例如 RPS 分支中的移动副在这种循环运动中便不可能无限制的伸长, 转动副也只能在一定角度内往复摆动, 不可能整周转动。若令 RPS 分支中的移动副或转动副作为驱动副, 下面研究当驱动杆长或驱动转角达到极限值时, 机构的约束或运动性质有什么特点。

2.1 以移动副为驱动

首先, 通过对机构进行位置求解以确定驱动杆长达到极限值时机构的位姿参数。

在定平台上建立如图 5 所示坐标系 $OXYZ$, A, B, C 为各运动副中心点。设 $CB = r_m, OA = r_b$ 分别表示动、定平台的尺寸。设杆长 $AB = l$, φ 为动平台转角。

点 A 的坐标为

$$\mathbf{A} = (r_b \ 0 \ 0)^T \quad (9)$$

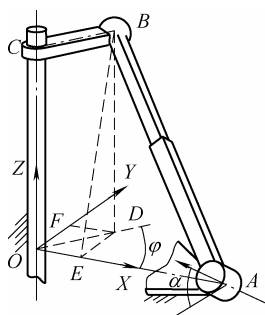


图5 RPSC 机构

D 为 B 点在 XY 平面上的投影, E, F 分别为 D 在 X, Y 轴上的投影, 所以有

$$OD = CB = r_m \quad (10)$$

$$OE = r_m \cos \varphi \quad OF = r_m \sin \varphi \quad (11)$$

因为 BD, ED 均垂直于 OA , 所以 EB 垂直于 OA , 在三角形 $\triangle AEB$ 中有

$$BE = \sqrt{l^2 - AE^2} \quad (12)$$

$$AE = r_b - OE \quad (13)$$

在三角形 $\triangle BED$ 中

$$BD = \sqrt{BE^2 - DE^2} \quad (14)$$

则 B 点的坐标可以表示为

$$\mathbf{B} = (OE \quad OF \quad BD)^T \quad (15)$$

移动副方向矢量为

$$\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A} \quad (16)$$

RPS 分支中转动副转轴可以看作是平行于 Y 轴方向的直线绕 X 轴顺时针转 α 角得到, 其方向矢量可表示为

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}_X(-\alpha) \cdot (0 \quad -1 \quad 0)^T \quad (17)$$

式中, $\mathbf{R}_X(-\alpha)$ 表示绕 X 轴转动 $-\alpha$ 角的旋转矩阵。

由于移动副始终绕转动副转动, 所以有

$$\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (18)$$

将式(9)~(17)代入式(18)中解关于 l 的方程, 能够确定驱动杆长 l 的表达式为

$$l = \frac{\sqrt{r_b^2 + r_m^2 - r_b^2 c^2 \alpha - r_m^2 c^2 \alpha c^2 \varphi - 2r_b \cdot r_m c \varphi s^2 \alpha}}{s \alpha} \quad (19)$$

式中, $s^2 \alpha = \sin^2 \alpha$, $c^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, 以此类推。

以动平台转角 φ 为自变量, 令 $l(\varphi)$ 的一阶导数为零, 即可得到驱动杆长 l 取极值时的转角为

$$\varphi = \begin{cases} 180^\circ \pm \arccos[r_b s^2 \alpha / r_m c^2 \alpha] \\ 0 \end{cases} \quad (20)$$

下面将分别对式(20)中的两组结果进行讨论。

(1) 当 $\varphi = 180^\circ \pm \arccos[r_b s^2 \alpha / r_m c^2 \alpha]$ 时, 杆长

取极大值, 类似于图2与图4所示的两种情况, 式中的正负号对应动平台运动到关于定平台对称的上下两个高度位置。

假定机构处于驱动杆最长的位置, 此时不论动平台顺时针或逆时针转动, 驱动杆都必定随之缩短。当驱动杆从该极限位置开始缩短, 动平台的转动方向将无法确定, 该位置为机构运动过程中的一个特殊点。为此, 下面通过对锁住 RPSC 机构驱动关节后的等价机构进行约束分析以确定机构在这种极限位置的约束性质。

当锁住移动副时, 机构的分支由 RPS 变为 RS。建立如图6所示分支坐标系 $Axyz$, z 轴沿连杆方向, x 轴与分支中转动副轴线重合。在坐标系 $Axyz$ 中, 分支的运动螺旋系可表示为

$$\begin{cases} (\mathcal{S}_{11})^A = (1 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \\ (\mathcal{S}_{12})^A = (1 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad l \quad 0) \\ (\mathcal{S}_{13})^A = (0 \quad 1 \quad 0; \quad -l \quad 0 \quad 0) \\ (\mathcal{S}_{14})^A = (0 \quad 0 \quad 1; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{cases} \quad (21)$$

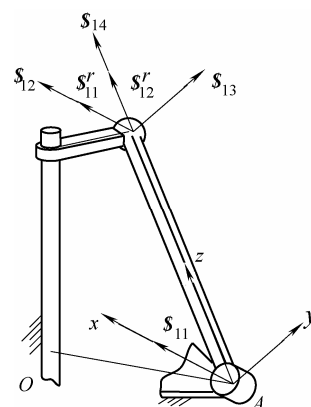


图6 移动副锁住后的等价分支

分支约束螺旋系为

$$\begin{cases} (\mathcal{S}_{11}^r)^A = (1 \quad 0 \quad 0; \quad 0 \quad l \quad 0) \\ (\mathcal{S}_{12}^r)^A = (0 \quad 0 \quad 1; \quad 0 \quad 0 \quad 0) \end{cases} \quad (22)$$

$(\mathcal{S}_{11}^r)^A, (\mathcal{S}_{12}^r)^A$ 为两个通过球副中心的力线矢, 一个平行于分支转动副轴线, 一个沿移动副运动方向。

分支2仅包含一个圆柱副, 限制了动平台水平方向上的转动与移动, 在图1所示坐标系 $OXYZ$ 中, 其约束螺旋系如式(2)所示。通过坐标变换可得到 $(\mathcal{S}_{11}^r)^A, (\mathcal{S}_{12}^r)^A$ 在定系 $OXYZ$ 中的表示, 设其为 $\mathcal{S}_{11}^r, \mathcal{S}_{12}^r$ 。此时, 机构动平台的约束螺旋系可表示为

$$\mathbf{D} = (\mathcal{S}_{11}^r \quad \mathcal{S}_{12}^r \quad \mathcal{S}_{21}^r \quad \mathcal{S}_{22}^r \quad \mathcal{S}_{23}^r \quad \mathcal{S}_{24}^r)^T \quad (23)$$

取 $r_b = 2.5$, $r_m = 1.2$, $\alpha = 30^\circ$, 并由式(20)求得驱动杆最长时的动平台转角 φ 。这里仅以 $\varphi = 180^\circ -$

$\arccos[r_b s^2 \alpha / r_m c^2 \alpha]$ 一种情况为例说明。代入式 (23) 可得矩阵 D 为 (计算结果仅保留四位小数)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -0.8660 & 0.5000 & 1.7269 & 0.4167 & 0.7217 \\ -0.8879 & 0.2300 & 0.3984 & 0 & -0.9959 & 0.5750 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

其行列式的值为

$$|D| = -1.1102 \times 10^{-16} \quad (25)$$

利用 Matlab 中的 Rank 函数可算得 D 的秩为 5, 可知机构动平台所受到的六个约束线性相关, 只有五个独立的约束, 机构此时仍存在一个自由度。

由于 RPSC 机构的自由度为 1, 当锁住驱动副后机构应该被完全锁死, 但根据上述分析结果可知, 此时机构仍保留有一个未被约束的运动, 即机构在该位置不能被所选驱动完全控制, 显然发生了奇异, 这种奇异被称之为驱动奇异^[18]。

根据螺旋互逆原理, 可由 D 求得动平台在该位置的瞬时运动螺旋为

$$\mathcal{S} = (0 \ 0 \ 0.5695; \ 0 \ 0 \ -0.8220) \quad (26)$$

可以看出, \mathcal{S} 为一个节距为有限值的一般螺旋, 即机构此时未被控制的一个自由度既不是纯转动也不是纯移动。

(2) 当 $\varphi=0$ 时, 杆长取得极小值。

如图 7 所示, 在该位置, 点 A, B, C 共线且 C 点与坐标原点 O 重合, 此时驱动杆长达到最小值。锁住驱动副, 该位置下 RPS 分支的约束螺旋系为过球副中心 B 的两个力线矢, 其中 \mathcal{S}_{11}^r 平行于转动副轴线, \mathcal{S}_{12}^r 过圆柱副轴线, 与 OA 重合。建立与图 5 中相同的定坐标系 $OXYZ$, 结合式 (2) 可以写出动平台此时的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}^r = (0 \ -c\alpha \ s\alpha; \ 0 \ -r_m \cdot s\alpha \ -r_m \cdot c\alpha) \\ \mathcal{S}_{12}^r = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{21}^r = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{23}^r = (0 \ 0 \ 0; \ 1 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{24}^r = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 1 \ 0) \end{cases} \quad (27)$$

显然, 此时 \mathcal{S}_{12}^r 与圆柱副分支对动平台的约束螺旋系产生线性相关, 动平台的约束螺旋系降秩, 发

生奇异。

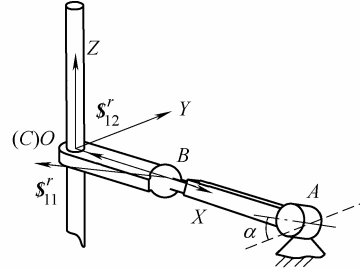


图 7 驱动杆最短时的位置

2.2 以转动副为驱动

前面已经提到 RPS 分支中的转动副在机构运动过程中不能发生整周转动, 当以该转动副作为驱动时, 与以移动副为驱动的情况类似, 驱动存在极限转角。下面研究驱动转角达到极限值时, 机构是否同样有特殊的约束性质 (图 8)。

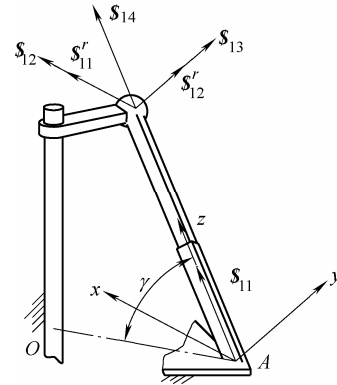


图 8 转动副锁住后的等价分支

现假设以 RPS 分支中的转动副为驱动, γ 表示其转角大小。建立与图 6 中相同的分支坐标系 $Axyz$, 可得锁住驱动副后的分支运动螺旋系为

$$\begin{cases} (\mathcal{S}_{11})^A = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \\ (\mathcal{S}_{12})^A = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ -l \ 0) \\ (\mathcal{S}_{13})^A = (0 \ 1 \ 0; \ -l \ 0 \ 0) \\ (\mathcal{S}_{14})^A = (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (28)$$

容易求得其约束螺旋系为

$$\begin{cases} (\mathcal{S}_{11}^r)^A = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ l \ 0) \\ (\mathcal{S}_{12}^r)^A = (0 \ 1 \ 0; \ -l \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (29)$$

$(\mathcal{S}_{11}^r)^A, (\mathcal{S}_{12}^r)^A$ 为过球副中心且垂直于移动副轴线的两个线性无关的力线矢。通过坐标变换可得到其在定系 $OXYZ$ 下的表示, 设其为 $\mathcal{S}_{11}^r, \mathcal{S}_{12}^r$ 。分支 2 的约束如式 (2) 所示。可知, 此时动平台共受到两个分支的六个约束, 约束螺旋系可表示为

$$D = (\mathcal{S}_{11}^r \ \mathcal{S}_{12}^r \ \mathcal{S}_{21}^r \ \mathcal{S}_{22}^r \ \mathcal{S}_{23}^r \ \mathcal{S}_{24}^r)^T \quad (30)$$

当转动副倾斜角 $\alpha = 30^\circ$ 时, 用类似的方法可求得 γ 极限值为

$$\gamma = \arccos(r_m/r_b) \quad (31)$$

同样取 $r_b = 2.5, r_m = 1.2$, 代入计算可以求得矩阵 D 为(计算结果仅保留四位小数)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -0.8660 & 0.5000 & 2.1054 & -0.2880 & -0.4988 \\ 0.7382 & 0.3373 & 0.5842 & 0 & 1.0095 & -0.5828 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

其行列式的值为

$$|D| = -3.2430 \times 10^{-16} \quad (33)$$

利用 Matlab 中的 Rank 函数算得矩阵 D 的秩为 5。动平台的瞬时运动螺旋为

$$\mathcal{S} = (0 \ 0 \ 0.7079; 0 \ 0 \ 0.7063) \quad (34)$$

可以看出, 机构在此位置也存在与移动副驱动时类似的奇异位形。

3 极限位置的几何意义

通过第 2.1、2.2 节中两种情况的分析, 可以看出这类奇异的发生是由机构本身的结构特点所致。下面通过与典型平面机构的类比并借助相对直观的几何方法对 RPSC 机构中存在的这类极限位置做进一步的解释与说明。

3.1 与平面曲柄滑块机构的对比

图 9 所示为一个曲柄滑块机构, 当以滑块作驱动时, 曲柄无法越过死点位置 A' 和 A'' 而实现循环转动。

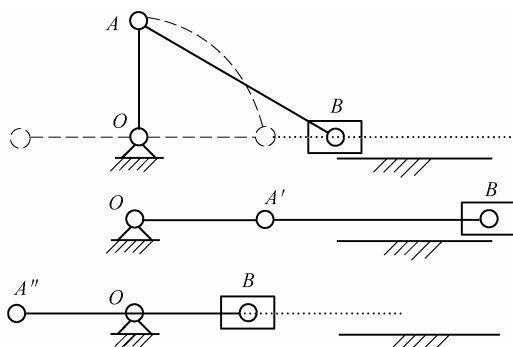


图 9 曲柄滑块机构

通过对比可以发现前面分析的空间单环 RPSC

机构的这类奇异位形就类似于曲柄滑块机构中的死点位置。

RPSC 机构的动平台可类比作曲柄 OA , 机构中其他仅能实现往复运动的构件无法驱动其实现连续的循环运动。当驱动件运动到“死点位置”时, 机构发生奇异。

对于图 9 所示的平面曲柄滑块机构, 当以曲柄 OA 作为驱动时, 机构是能够实现连续的循环运动的。同样, 在空间单环 RPSC 机构中, 若以圆柱副中的转动副作为驱动, 则动平台成为了主动件, 主动运动为连续转动。在这种驱动下, 机构不存在“死点位置”, 能够实现连续的循环运动。

3.2 顶点 B 的椭圆轨迹

由于分支中转动副与定平台平面夹角 α 始终保持不变, 平台运动时, RPS 分支总是绕着点 A 转动, 即动平台顶点 B 始终在一个斜面内运动, 可求得该斜面与定平台平面夹角为 $\theta = 90^\circ - \alpha$ 。

已知 B 到圆柱副轴线的距离为 r_m , 由于动平台始终绕圆柱副轴线转动, 所以 B 点的轨迹必定在图 10 所示半径为 r_m 的圆柱面上。根据椭圆定义, 用上述斜面截该圆柱面可以得到一个椭圆, 这个椭圆便是 B 点的实际运动轨迹, 如图 11 所示。机构中的这种运动便是 VDM 运动^[13], 事实上机构动平台上所有点的运动轨迹均为椭圆。

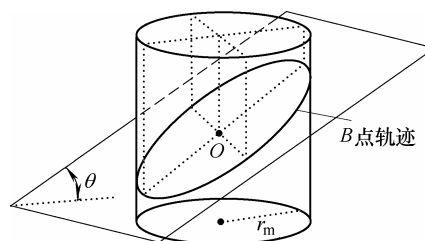


图 10 B 点的椭圆轨迹

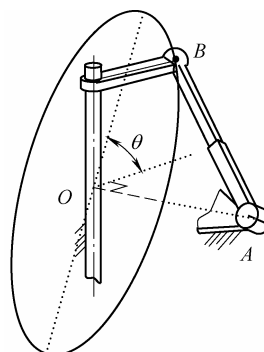


图 11 动平台顶点的运动轨迹

椭圆的长轴长 a 与短轴长 b 分别为

$$\begin{cases} a = r_m / \cos \theta \\ b = r_m \end{cases} \quad (35)$$

以 RPS 分支中转动副作为驱动时,如图 12b 所示,当 AB 连线与椭圆相切时即为驱动转角最大的位置。

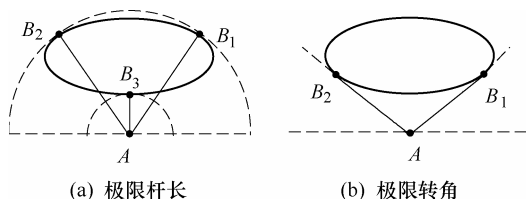


图 12 驱动副的极限位置的几何求解

在前面的分析中,式(1)仅对 RPS 分支约束力做了一个一般性的假设,在分析过程中,该约束力必须要满足的条件只有两点。

- (1) 约束力方向相对于定平台倾斜且保持不变。即式(1)中 S 为常量, 且 N 不为 0。
- (2) 约束力空间位置与分支中运动副位置相关。如 RPS 分支约束力的空间位置随机构运动不断变化, 但始终过球副中心点。

如图 13 所示, 假定该机构的动、定平台及分支 2 均与 RPSC 机构相同, 而其分支 1 为一个一般的单约束力分支。分支约束力 \mathbf{S}_{11}^r 与定平台平面不平行且方向相对于定平台保持不变, 过分支上的关联点 B 。 B 可能是某运动副中心点或不同运动副轴线的汇交点。建立相同的定系 $OXYZ$, 显然两个分支约束螺旋系表达式分别与式(1)、(2)相同, 按照第 1 节中过程对其进行分析不难发现, 该机构与 RPSC 机构有着类似的约束与运动性质。

文献[22]对一类无汇交轴线的三自由度转动并联机构进行了型综合,事实上这些机构也均能实现VDM运动。当动平台仅发生自转时,这类机构便可以等价为实现VDM运动的单环机构^[23]。同时,文献[22]中还列举了大量的单约束力分支,用这些单约束力分支和一个圆柱副分支也可以构造出图13所示的这一类空间单环机构。其中两个新构造出的机构如图14所示。

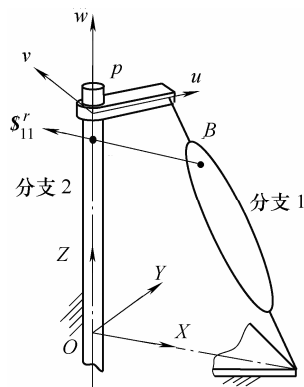


图 13 机构的结构特点

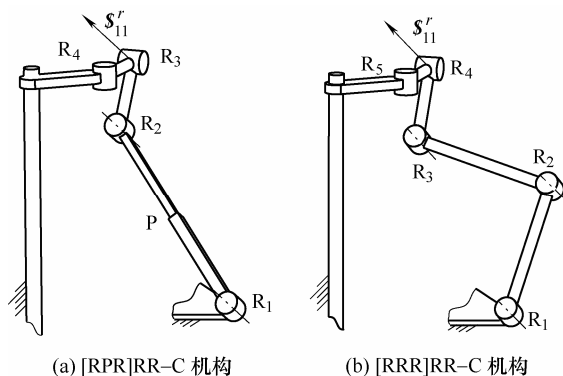


图 14 具有同样运动特点的一类空间单环机构

(1) 通过对空间单环 RPSC 机构的约束及运动特性进行分析, 可知该机构的自由度为 1, 其动平台的运动为循环的螺旋运动。

(2) 对空间单环 RPSC 机构运动过程中的临界位置进行分析,发现该机构无论以移动副作为驱动还是以转动副作为驱动,都存在一类特殊的驱动奇异。在该奇异位置,当驱动副锁死时,机构动平台仍然存在一个瞬时螺旋运动。

(3) 对空间单环 RPSC 机构的这种驱动奇异进行几何特征分析, 发现其类似于平面曲柄滑块机构的死点奇异。只要该单环机构的分支 1 满足特定的条件, 都具有与 RPSC 机构相同的运动形式。因此, 还可以用其他单约束力分支替换该机构中的 RPS 分支, 设计出一类具有同样运动特性的空间单环机构。在这些机构中也同样存在类似的奇异位形。

[1] 张启先. 空间机构分析与综合[M]. 北京: 机械工业出版社, 1984.

ZHANG Qixian. Analysis and synthesis of spatial mechanisms[M]. Beijing: China Machine Press, 1984.

- [2] BENNETT G T. A new mechanism[J]. Engineering, 1903(76): 777-778.
- [3] LIU C, YAO Y A, LI R, et al. Rolling 4R linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 48: 1-14.
- [4] BAKER J E. The Bennett, Goldberg and Myard linkages—in perspective[J]. Mechanism and Machine Theory, 1979, 14(4): 239-253.
- [5] LEE C C. Analysis and synthesis of Schatz six-revolute mechanisms[J]. JSME International Journal. Series C, Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, 2000, 43(1): 81-91.
- [6] BAKER J E. An analysis of the Bricard linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 1980, 15(4): 267-286.
- [7] LIU J, HUANG Z, LI Y. A new approach for the orders of the Bennett-based linkages in mobility analysis[C]// ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, August 30-September 2, 2009 San Diego, California. New York: ASME, 2009: 485-491.
- [8] 刘士昌, 陈子明, 刘婧芳, 等. 基于螺旋理论对单环空间 RSUR 机构受力分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(13): 23-28.
LIU Shichang, CHEN Ziming, LIU Jingfang, et al. Force analysis of single ring spatial RSUR mechanism based on screw theory[J]. Journal of Mechanism Engineering, 2011, 47(13): 23-28.
- [9] 郭盛, 方跃法, 岳聪. 基于螺旋理论的单闭环多自由度过约束机构综合[J]. 机械工程学报, 2009, 45(11): 39-45.
GUO Sheng, FANG Yuefa, YUE Cong. Structure synthesis of single closed-loop multi-degree of freedom of over-constrained mechanism based on screw theory[J]. Journal of Mechanism Engineering, 2009, 45(11): 39-45.
- [10] 郭盛, 方跃法, 付高阁, 等. 单闭环一自由度过约束机构解析综合[J]. 中国机械工程, 2009, 20(4): 383-388.
GUO Sheng, FANG Yuefa, FU Gaoge, et al. Analytical synthesis for single closed-loop and one DoF over-constrained mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(4): 383-388.
- [11] Di GREGORIO R. Single-loop wrists which generate triangular structures[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 80: 230-245.
- [12] LEE C C, HERVE J M. On the vertical Darboux motion[M]. London: Springer, 2012.
- [13] LEE C C, HERVE J M. Vertical Darboux motion and its parallel mechanical generators[J]. Meccanica, 2015(50): 3103-3118.
- [14] BOTTEMA O, ROTH B. Theoretical kinematics[M]. New York: Dover Publications, 1990.
- [15] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic[J]. Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 281-290.
- [16] DI GREGORIO R. Forward problem singularities of manipulators which become PS-2RS or 2PS-RS structures when the actuators are locked[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(4): 640.
- [17] HUANG Z, ZHAO Y S, WANG J, et al. Kinematic principle and geometrical condition of general-linear-complex special configuration of parallel manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34: 1171-1186.
- [18] HUANG Z, CHEN L H, LI Y W. The singularity principle and property of Stewart parallel manipulator[J]. Journal of Robotic Systems, 2003, 20(4): 163-176.
- [19] FANG Y, TSAI L W. Structure synthesis of a class of 4-DOF and 5-DOF parallel manipulators with identical limb structures[J]. The International Journal of Robotics Research, 2002, 21(9): 799-810.
- [20] HUANG Z, FANG Y. Motion characteristics and rotational axis analysis of three DOF parallel robot mechanisms[C]// IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, October 22-25, 1995, Canada. New York: IEEE, 1995: 67-71.
- [21] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
HUANG Zhen, ZHAO Yongsheng, ZHAO Tieshi. Advanced spatial mechanism[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [22] CHEN Z, CAO W A, HUANG Z. Type synthesis of 3-DoF rotational parallel mechanisms with no intersecting axes[C]// ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, August 13-15, 2012, Chicago, IL, USA. New York: ASME, 2012: 67-71.
- [23] CHEN Z, HUANG K, ZHANG Y, et al. Actuation singularity analysis of a 3-RPS rotational parallel mechanism[C]// 2015 IFToMM World Congress, 2015: OS13-096.

作者简介: 陈子明(通信作者), 男, 1984 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为空间少自由度并联机构的设计和分析理论。

E-mail: chenzm@ysu.edu.cn

黄坤, 男, 1992 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为新型无汇交轴线三自由度并联转动平台的设计。

E-mail: huangk.ysu@gmail.com

刘晓檬, 男, 1991 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为空间少自由度并联机构的设计。

E-mail: liuxm.ysu@hotmail.com

张杨, 男, 1988 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为无伴随运动对称两转一移并联机构的设计与分析。

E-mail: zhangy.ysu@gmail.com

黄真, 男, 1936 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机构的设计和分析理论。

E-mail: huangz@ysu.edu.cn