

DOI: 10.3901/JME.2013.16.100

平面曲梁纯弯曲等价定理及其试验验证*

赵 军 展培培 马 瑞 孙红磊

(先进锻压成形技术与科学教育部重点实验室(燕山大学) 秦皇岛 066004)

摘要: 平面曲梁的纯弯曲过程是固体力学领域中的一个重要分支,但是由于曲梁初始曲率的存在,导致对其精确解析的复杂性。相对而言,直梁的平面弯曲及弹复过程却相对容易实现定量预测。为简化平面曲梁纯弯曲的理论分析模型,针对小曲率平面曲梁的小弯曲变形特点,通过引入曲梁截面弯曲应变的线性分布假设导出曲梁纯弯等价定理。基于板材的四点弯曲特点,同时依托于高精度的三坐标测量仪器,采用不同的板坯试样在不同的弯曲工艺条件下的试验验证该等价定理的可行性。最终试验结果表明,采用直梁弯曲的曲率叠加曲梁初始曲率的方式来代替曲梁弯曲后曲率值,最终结果的绝对误差小于 5×10^{-5} ,相对误差不大于 4.5%,完全满足工程精度的需求。

关键词: 曲梁 纯弯曲 等价定理 四点弯曲

中图分类号: TG306

Equivalence Relation of Curved Beam Pure Bending and Its Experimental Verification

ZHAO Jun ZHAN Peipei MA Rui SUN Honglei

(Key Laboratory of Advanced Forging & Stamping Technology and Science(Yanshan University),
Ministry of Education of China, Qinhuangdao 066004)

Abstract: The pure bending process of the plane curved beam is one of the most important parts in the field of solid mechanics. However, because of exist of the initial curvature, it is difficult to give the accurately analysis result. Relatively, the bending process of the straight beam can be easily predicted. To simplify the analytical model of plane curved beam bending, according to the feature of small deformation in small curved beam bending process, the equivalence relation of curved beam pure bending is given by introducing the linear distribution assumption of the bending strain. Based on the feature of four-point bending process, and relying on the measuring equipment with high precision, the experimental results prove the feasibility of equivalence relation by the ways of different plank stuff and different technological parameter. The final results suggest the absolute error is less than 5×10^{-5} , the relative error is less than 4.5%, when using the addition curvature instead the bending result of the curved beam.

Key words: Curved beam Pure bending Equivalence relation Four-point bending

0 前言

平面弯曲^[1]是材料成形领域中最重要加工方法之一。根据被弯曲件初始形状的特点,平面弯曲可分为直梁弯曲和曲梁弯曲。目前对直梁弹塑性弯曲问题的理论解析研究较为广泛^[2-3],但是由于曲

梁初始曲率的存在,导致其力学解析模型的复杂性,因此尚缺少对其全面精确的解析分析,从而制约了它的广泛应用^[4]。

在材料加工领域,诸多加工工艺均可以简化为小曲率曲梁的弹塑性纯弯曲变形过程,如大型直缝焊管的扩径矫圆工艺^[5]和压力矫直工艺^[6],各种型材的多辊矫直工艺^[7-8]以及渐进式辊弯成形工艺^[9]等。因此研究小曲率曲梁的弯曲变形过程具有一定的实际应用价值。

* 国家自然科学基金(51175452)和河北省自然科学基金(E2012203061)资助项目。20130109 收到初稿,20130502 收到修改稿

当前, 对平面曲梁弯曲的精确解析研究主要集中在曲梁的弹性变形范畴^[10-11], 而曲梁的弹塑性变形理论分析均在特定的假设条件下完成。2003 年李硕本^[12]提出在小曲率曲梁(截面厚度尺寸与初始曲率半径的比值小于 1/10 的曲梁)弯曲过程中弯矩所引起的截面应变可近似为线性分布; 2009 年 BAYOUMI 等^[13]通过曲梁截面的线性应变分布假设从理论上给出了出了圆截面管件在被轧制成四方形管件过程中的成形力大小; 2011 年笔者通过引入初始当量应变和当量应变的概念解析了小曲率曲梁平面弯曲弹塑性小变形问题^[14]。但是, 根据材料力学可知, 曲梁弯曲截面的应变分布理论上应呈双曲线规律分布^[15], 而上述的分析过程中并没有给出引入该假设所带来的误差大小。

本文从引入曲梁截面弯曲应变的线性分布假设出发, 导出了曲梁纯弯曲过程的等价定理, 即曲梁弯曲过程等价于直梁弯曲过程叠加曲梁初始曲率的结果。随后, 结合板材四点弯曲过程的弯矩分布特点, 从试验上证明了该等价定理的可行性, 从而间接地证明了采用截面应变线性分布假设分析小曲率曲梁的弹塑性小弯曲变形问题具有足够的工程精度。

1 平面曲梁纯弯曲弹复方程

考虑到本文的研究内容为纯弯曲小变形过程, 引入以下常规基本假设。

(1) 平截面假设, 即平面曲梁的任意截面弯曲变形后仍保持为平面, 且截面不发生畸变。

(2) 中性层不变假设, 即变形过程中平面曲梁的应变中性层、应力中性层与几何中心层始终保持重合。

(3) 常规弹塑性材料模型假设, 即平面曲梁是连续均质的弹塑性体, 且弹性变形为线弹性, 符合 Hooke 定律; 塑性流动符合稳定材料条件和经典弹塑性理论的卸载规律。

(4) 单向应力状态假设, 即平面曲梁截面上任意质点的应力状态为单向拉伸或单向压缩。

针对曲梁弯曲解析的特殊性, 引入曲梁截面应变的线性分布假设, 如图 1 所示, 即假设曲梁弯曲后的应变 ε 为初始当量应变^[14]和变形所引起应变的叠加

$$\varepsilon = \kappa w - \kappa_0 w \quad (1)$$

式中, κ 为加载后曲梁的中性层曲率, κ_0 为曲梁中性层的初始曲率, w 为曲梁截面上质点到中性层的距离。同理, 曲梁卸载后残余应变

$$\varepsilon_p = \kappa_p w - \kappa_0 w \quad (2)$$

式中, κ_p 为卸载后曲梁微段中性层曲率。

根据经典的卸载弹复理论, 梁的弯曲后卸载过程可以认为是在弯曲相反的方向对被弯曲对象施加一个弹性弯矩 M_e 并使其产生完全的弹性变形 ε_e 的过程。弹性弯曲应变

$$\varepsilon_e = \kappa_e w - \kappa_0 w \quad (3)$$

式中, κ_e 为加载后曲微梁段中性层曲率。定义 κ 、 κ_e 、 κ_p 与 κ_0 方向一致时符号相同, 方向相反时符号相反。

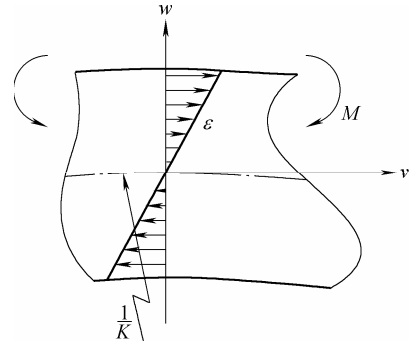


图 1 曲梁截面弯曲应变

根据截面的弯矩平衡条件可得

$$M_e = \int_A E \varepsilon_e w dA = EI (\kappa_e - \kappa_0) \quad (4)$$

式中, E 为弹性模量, I 为曲梁微段截面惯性矩。根据应变的可叠加性, 可得

$$\varepsilon_p = \varepsilon + \varepsilon_e \quad (5)$$

将式(1)~(3)代入式(5)可得出平面曲梁的纯弯曲过程的几何方程为

$$\kappa_p = \kappa + \kappa_e - \kappa_0 \quad (6)$$

联立式(4)和式(6), 及根据 $M + M_e = 0$, 可得到平面曲梁的弹复方程

$$\kappa_p = \kappa - \frac{M}{EI} \quad (7)$$

将式(7)中的各曲率用相对于初始曲率 κ_0 的曲率变化量表示, 即定义各曲率变化量为

$$\begin{cases} \Delta \kappa = \kappa - \kappa_0 \\ \Delta \kappa_p = \kappa_p - \kappa_0 \end{cases} \quad (8)$$

则平面曲梁纯弯曲弹复方程可表述为

$$\Delta \kappa_p = \Delta \kappa - \frac{M}{EI} \quad (9)$$

2 曲梁纯弯等价定理

设分别有一直梁和一曲梁, 其材料性能和横截面几何特性完全相同。同时给曲梁和直梁施加相同的弯矩载荷, 使其产生弹塑性变形, 如图 2 所示。当平面曲梁退化为直梁时, 由于直梁的初始曲率为零, 根据式(8)可知, 直梁弯曲后的曲率变化量即为其弯曲后曲率, 从而根据式(9)可得到直梁的弹复方

程。对比于式(9)表述的由曲率变化量所表示的曲梁的弹复方程,二者可分别表述如下。

直梁

$$\kappa_p^s = \kappa^s - \frac{M^s}{EI} \quad (10)$$

平面曲梁

$$\Delta \kappa_p^c = \Delta \kappa^c - \frac{M^c}{EI} \quad (11)$$

式中,上标 s 、 c 分别代表直梁与平面曲梁。显然,材质与截面特性相同的二梁,当 $M^s = M^c = M$ 时,即所受弯矩相同时,其卸载时的曲率弹复量也相同。

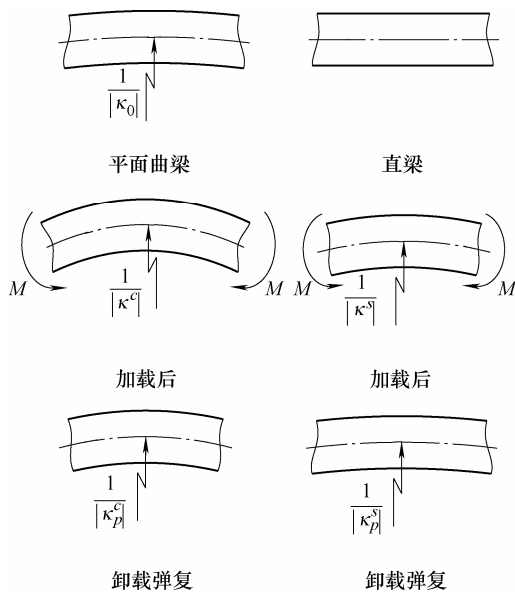


图2 曲梁与直梁弯曲过程示意图

另一方面,设二梁材料的本构方程为

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (12)$$

式中, σ 为应力。则由任意截面的弯矩等于弯曲应力对截面面积的积分和式(1)可得

$$M^s = \int_A \sigma w dA = \int_A f(\kappa^s w) w dA \quad (13)$$

$$M^c = \int_A \sigma w dA = \int_A f[(\kappa^c - \kappa_0) w] w dA \quad (14)$$

显然当 $M^s = M^c = M$ 时,二梁的弯曲曲率变化量也相同,即

$$\Delta \kappa^c = \kappa^c - \kappa_0 = \kappa^s \quad (15)$$

由式(10)和式(11)可知,必然得到二梁卸载弹复后的曲率变化量相同,即

$$\Delta \kappa_p^c = \kappa_p^s \quad (16)$$

综合上述讨论,得到

$$\begin{cases} \kappa_p^c = \kappa_p^s + \kappa_0 \\ \kappa^c = \kappa^s + \kappa_0 \end{cases} \quad (17)$$

因此,可得出以下结论:初始曲率为 κ_0 的平面曲梁的纯弯曲过程,等价于材质和截面几何特征完

全相同的直梁纯弯曲过程叠加初始曲率 κ_0 的结果。所谓等价是指受纯弯矩载荷的平面曲梁加载后(卸载后)的中性层曲率等于受相同弯矩载荷的直梁加载后(卸载后)中性层曲率叠加平面曲梁初始中性层曲率的结果。

3 曲梁纯弯等价定理验证试验

3.1 试验方案

3.1.1 板材四点弯曲的特点

本文采用宽板代替曲梁验证曲梁纯弯等价定理的可行性。板坯四点弯曲的力学模型简图如图3所示。由材料力学可知,在小变形的范畴内,板材的四点弯曲过程中,弯矩与力的关系可表述为

$$M(x) = \begin{cases} \frac{F}{2}(D-d) & 0 < |x| < \frac{d}{2} \\ \frac{F}{2}(D-2|x|) & \frac{d}{2} < |x| < \frac{D}{2} \end{cases} \quad (18)$$

式中, D 为下支点跨距, d 为上压点跨距, F 为上模载荷, x 为图3所示坐标系横坐标。由式(18)可知,上模压点中间区域的板坯所受弯矩为定值,因此,忽略板材弯曲过程中的轴向拉压应力的影响,在该区域内的板材变形过程可视为纯弯曲变形。

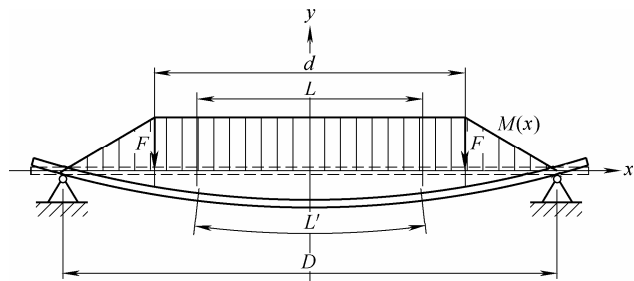


图3 四点弯曲力学模型

基于此,验证试验建立在四点弯曲的基础上。试验依托于高精度的测量设备,美国星科(CimCore)公司生产的3000iTM系列便携式三坐标测量仪,其测量精度为0.01 mm。考虑到板坯变形后曲率较小,若直接测量曲率,则会产生较大的测量误差。因此,根据受等弯矩载荷作用的板坯弯曲后呈标准圆弧形的特点,试验中采取测量挠度(即圆弧的弦高)的方式代替直接测量曲率,然后通过几何关系计算板坯的中性层曲率值。

采用曲线拟合的方法对经四点弯曲后板坯在压点范围内是否为圆弧进行了实测检验。图4为上模压点跨距为60 mm、下模支点跨距150 mm,弯曲压下行程为4 mm时,对厚度为3 mm、宽为100 mm、

长为 170 mm、材料为 08AL 的直板坯压弯后所测得的上模压点范围内板坯的挠度值与标准圆弧曲线的对照结果。图 4 中的十字交叉点为三坐标的挠度实测点, 细实线为通过 CurveExpert 曲线拟合软件拟合的标准圆弧。根据结果显示, 实测点与拟合圆弧之间的相关系数大于 0.99。

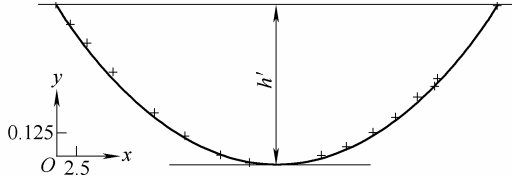


图 4 四点弯曲压点内板坯的轮廓曲线

由图 4 可知, 三坐标实测点基本在所拟合的标准圆弧上, 由此可以证明在本文的曲梁弯曲小变形试验分析过程中可以采用测量挠度的方式代替直接测量曲率。

3.1.2 板坯测量挠度与中性层曲率的关系

根据基本假设(2), 板坯中性层长度一定时, 弯曲后挠度与曲率的几何关系示意图如图 5 所示。曲板由直板压制得到, 直板初始长度为 L , 弯曲后由于外表层受压, 外表层的弧长缩短为 L' 。直接测量挠度值为外表层圆弧的最大挠度 h' , 中性层挠度为 h , 根据几何相似性, 各参数之间的关系为

$$\frac{h'}{h} = \frac{R'}{R} = \frac{L'}{L} \quad (19)$$

式中, R' 为板坯外表层曲率半径, R 为板坯中性层曲率半径, 二者之间的关系为

$$R = R' + \frac{\delta}{2} \quad (20)$$

式中, δ 为板坯厚度。根据几何关系, 挠度与曲率半径的关系为

$$h = R \left(1 - \cos \frac{L}{2R} \right) \quad (21)$$

将式(21)和式(20)代入式(19)前两项可得所测挠度与板坯中性层曲率半径关系为

$$h' = \left(R - \frac{\delta}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{L}{2R} \right) \quad (22)$$

考虑到曲率 $\kappa = \frac{1}{R}$, 式(22)可表述为

$$h' = \left(\frac{1}{\kappa} - \frac{\delta}{2} \right) \left(1 - \cos \frac{\kappa L}{2} \right) \quad (23)$$

若 h' 已知, 式(23)为 κ 的超越方程, 利用解析法解析存在一定的困难, 本文采用牛顿迭代法对式(23)进行迭代求解。

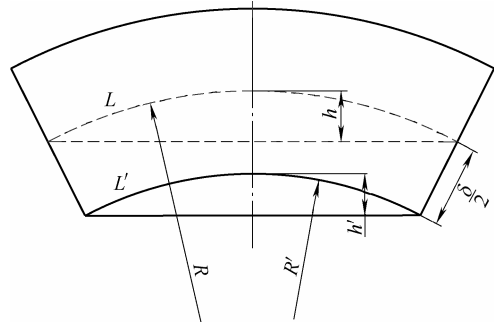


图 5 挠度与曲率几何关系示意图

3.1.3 试验步骤

如上所述, 制定试验步骤如下。

(1) 初始曲板的制备, 在一定尺寸的直板坯试件表面上标刻标距为 L 的两条标线, 标线相对于板坯宽度方向的中心线对称分布。然后以四点弯曲方式将板坯压弯。弯曲时上模压点的中心距大于板坯标距, 即 $d \geq L$, 以保证在标距以内区域的板材产生均匀弯曲并具有一定的初始曲率。

为消除板坯变形后的残余应力, 同时保证曲板和直板的材料性能趋于一致, 对曲板和划有标线的直板坯进行完全去应力退火处理。退火工艺过程的真实温度时间曲线参考文献[16]设定, 具体值如图 6 所示。曲板与直板的标线标距相等。

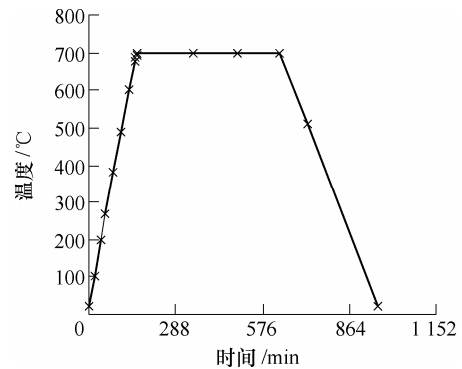


图 6 退火工艺温度时间曲线

(2) 曲板初始曲率的测量, 利用三坐标测量仪测量曲板上标线内区域的挠度最大值 h'_0 , 并根据式(23)求解得出曲板的初始曲率 κ_0 。试验测量过程中, 为降低三坐标的测量误差, 对同一挠度特征测量三次取其三次测量结果的平均值作为曲板的真实挠度值。

(3) 板坯的压制。根据上述曲梁纯弯等价定理可知, 需要同时给曲板和直板施加相同的弯矩载荷。然而, 实现对板材直接施加弯矩作用存在一定的困难。根据式(18)所示, 弯矩分布与弯曲力之间为线性关系, 而根据曲板和直板的弯曲力与行程曲线可知, 曲梁弯曲与直梁弯曲过程中弯曲力与行程呈一

一对应关系,如图 7 所示(图 7 中材料为 08AL, $D=150$ mm, $d=60$ mm, 板厚为 3 mm, 板长为 170 mm, 板宽为 100 mm), 所以, 弯矩载荷与压下量也应一一对应。因此, 试验过程中利用压下量来控制板坯最终的变形量, 并以相同的四点弯曲方式和相同的压下量将曲板和直板压弯。压制过程同时保证 $d \geq L$, 测量压弯卸载后曲板和直板表层的标线内最大挠度 h_p^c 和 h_p^s , 并计算相应的中性层曲率值 κ_p^c 和 κ_p^s 。

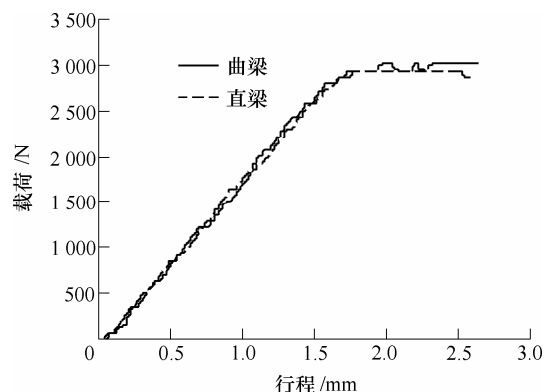


图 7 曲板与直板弯曲过程的载荷行程曲线

(4) 比较叠加曲率 κ_p^{s+c} 的和与 κ_p^c 是否相等, 从而确定等价定理的正确性。 κ_p^{s+c} 的定义为

$$\kappa_p^{s+c} = \kappa_p^s + \kappa_0 \quad (24)$$

3.2 试验设备及结果

试验在 WDD-LCT-150 型电子拉扭组合多功能试验机上完成。考虑到压机在自动寻找初始接触零点时存在一定的位移控制误差, 试验采用千分尺控制压机横梁的压下位移, 控制精度为 0.01 mm。试验模具如图 8 所示。

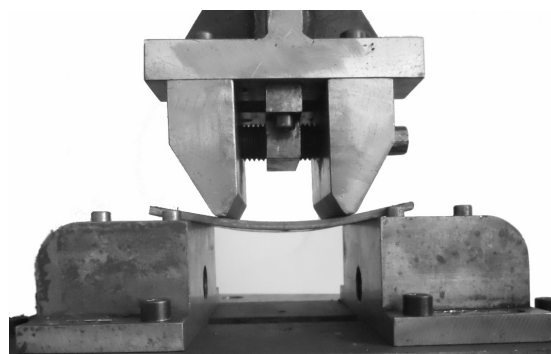


图 8 试验模具实物图

以不同厚度, 不同材料的板坯为研究对象, 并采用不同的四点弯曲工艺参数对上述等价定理进行验证。上模压点跨距为 65 mm、下模支点跨距为 140 mm 时, 厚度为 4.7 mm、宽 100 mm、长 160 mm、材料为 SS400 板坯的试验结果如表 1 所示。试件的挠度测量标距 $L=60$ mm。考虑到材料性能的波动及设备的操作误差对直板弯曲变形的影响, 直板弯曲采用三组重复性试验, 对最终的挠度测量结果求平均值, 并计算挠度平均值的平均曲率。同时, 选取三个初始曲率不同的曲板对上述等价定理进行验证。表 1 中叠加曲率与曲梁弯后曲率相对误差的计算公式为

$$\Delta = \frac{\kappa_p^{s+c} - \kappa_p^c}{\kappa_p^c} \times 100\% \quad (25)$$

上模压点跨距为 60 mm、下模支点跨距 150 mm 时, 厚度为 3 mm、宽 100 mm、长 170 mm、材料为 08AL 板坯的试验结果如表 2 所示, 测量标距同样为 60 mm。08AL 板坯的试验过程与数据处理方式与上述 SS400 板坯的试验相同。

表 1 SS400 钢板试验结果

SS400	序号	压下量/mm	挠度/mm	曲率/ $\times 10^{-3}$	平均挠度/mm	平均曲率/ $\times 10^{-3}$	叠加曲率/ $\times 10^{-3}$	曲率相对误差(%)
直板弯曲	1	2.50	0.263	0.586				
	2	2.50	0.242	0.538	0.247	0.549	—	—
	3	2.50	0.239	0.532				
曲板弯曲	4	2.50	初始	0.531	1.183	—	—	—
			弯后	0.754	1.682	—	1.733	2.965
	5	2.50	初始	0.600	1.337	—	—	—
			弯后	0.841	1.877	—	1.886	0.520
	6	2.50	初始	1.119	2.503	—	—	—
			弯后	1.352	3.028	—	3.052	0.787

由表 1 与表 2 试验结果数据可知, 在不同的条件下, 直梁弯曲后的平均曲率与曲梁初始曲率的叠加值和曲梁弯曲后曲率相差较小, 最大相对误差不超过 5%, 完全满足工程精度的要求。然而相对误差值仍在一小范围内波动, 并且同时出现了正值与

负值, 考虑误差是由于板材材料性能的波动和采用行程代替直接施加弯矩载荷来控制板材的变形程度以及采用测量挠度的方式代替直接测量板材曲率等三方面的因素所引起。

然而, 最终的试验结果仍可证明在初始曲率较

表 2 08AL 钢板试验结果

08AL	序号	压下量/mm	挠度/mm	曲率/ $\times 10^{-3}$	平均挠度/mm	平均曲率/ $\times 10^{-3}$	叠加曲率/ $\times 10^{-3}$	曲率相对误差(%)
直板弯曲	1	3.00	0.361	0.781				
	2	3.00	0.334	0.727	0.342	0.762	—	—
	3	3.00	0.333	0.733				
曲板弯曲	4	3.00	初始	0.128	0.284	—	—	—
			弯后	0.492	1.095	—	—	1.046
	5	3.00	初始	0.467	1.039	—	—	—
			弯后	0.834	1.860	—	—	1.800
	6	3.00	初始	0.312	0.693	—	—	—
			弯后	0.648	1.443	—	—	1.456

小的曲梁小弹塑性纯弯曲过程中曲梁纯弯等价定理的正确性，进而证明完全可以采用截面弯曲应变的线性分布假设来分析此类工程实际问题。

4 结论

(1) 通过引入截面弯曲应变的线性分布假设，在理论上导出了曲梁纯弯等价定理，即小曲率平面曲梁的弹塑性纯弯曲小变形过程等价于材质和截面几何形状完全相等的直梁的弯曲过程叠加曲梁初始曲率的结果。

(2) 根据板材四点弯曲的特点，以不同材料、不同规格的板坯，从试验上证实了曲梁纯弯等价定理的正确性，最终试验表明，其相对误差不大于 5%，完全满足工程精度需求。

(3) 通过对曲梁纯弯等价定理的验证，间接地证明：在分析小曲率平面曲梁弯曲小变形问题时，完全可以采用截面弯曲应变的线性分布假设代替截面真实应变对此类问题进行理论解析。

参 考 文 献

[1] 白象忠. 材料力学[M]. 北京：中国建材工业出版社, 2003.
BAI Xiangzhong. Mechanics of materials[M]. Beijing: China Building Materials Industry Press, 2003.

[2] ZHAO Jun, LI Jian, QU Xiaoyang, et al. Study on intelligent control technology for forming steel pipe of pipeline with JCO process[J]. Science China : Technological Sciences, 2011, 54(10): 2754-2759.

[3] PANTHI S K, RAMAKRISHNAN N. Semi analytical modeling of springback in arc bending and effect of forming load[J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2011, 21(10): 2276-2287.

[4] 李卫文. 曲梁的非线性稳定分析[D]. 太原：太原理工大学, 2007.

LI Weiwen. Analysis on non-linear stability of curved beam[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2007.

[5] 殷璟, 赵军, 屈晓阳, 等. 大型管件扩径矫圆弹复分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(12): 32-42.

YIN Jing, ZHAO Jun, QU Xiaoyang, et al. Springback analysis of expanding and setting round for large diameter pipe[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(12): 32-42.

[6] 赵军, 曹宏强, 展培培, 等. 纯弯曲过弯矫直等价原理及其试验验证[J]. 机械工程学报, 2012, 48(8): 28-33.

ZHAO Jun, CAO Hongqiang, ZHAN Peipei, et al. Pure bending equivalent principle for over-bend straightening and its experimental verification[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(8): 28-33.

[7] 管奔, 臧勇, 逢晓男, 等. 矫直过程截面复杂反弯的应力分布与反弯特性解析[J]. 中南大学学报, 2012, 43(5): 1739-1745.

GUAN Ben, ZANG Yong, PANG Xiaonan, et al. Stress distribution and reverse bending behavior of section during roller leveling process[J]. Journal of Central South University, 2012, 43(5): 1739-1745.

[8] 管奔, 臧勇, 曲为壮, 等. 辊式矫直过程应力演变及其对反弯特性的影响[J]. 机械工程学报, 2012, 48(2): 81-86.

GUAN Ben, ZANG Yong, QU Weizhuang, et al. Stress evolvement and its influence on bending behavior during roller leveling process[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(2): 81-86.

[9] 曾国, 来新民, 于忠奇, 等. 多道次辊弯成形数值模拟技术[J]. 上海交通大学学报, 2007, 41(10): 1598-1602.

ZENG Guo, LAI Xinming, YU Zhongqi, et al. The simulation of roll forming with multiple passes[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2007, 41(10): 1598-1602.

- [10] 王元清, 刘莉媛, 丁大益. 大跨结构箱形曲梁承载性能的影响因素分析[J]. 建筑科学, 2011, 27(5): 1-5.
WANG Yuanqing, LIU Liyuan, DING Dayi. Parametric analysis of bearing behavior for curved box-girders of large span steel structure[J]. Building Science, 2011, 27(5): 1-5.
- [11] KIM N, SHIN D K. A series solution for spatially coupled deflection analysis of thin-walled Timoshenko curved beam with and without elastic foundation[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2009(23): 475-488.
- [12] 李硕本. 冲压工艺理论与新技术[M]. 北京: 机械工业出版社, 2002.
LI Shuoben. Stamping process theory and new technology[M]. Beijing: China Machine Press, 2002.
- [13] BAYOUMI L S, ATTIA A S. Determination of the forming tool load in plastic shaping of a round tube into a square tubular section[J]. Journal of Materials Processing Technology, 2009(209): 1835-1842.
- [14] ZHAO Jun, YIN Jing, MA Rui, et al. Springback equation of small curvature plane bending[J]. Science China: Technological Sciences, 2011, 54(9): 2386-2396.
- [15] S·铁摩辛柯. 材料力学[M]. 天津: 天津科学技术出版社, 1898.
SUCH X K. Mechanics of materials[M]. Tianjin: Tianjin Science and Technology Press, 1898.
- [16] 中国机械工程学会热处理专业分会《热处理手册》编委会. 热处理手册(第1卷)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
Heat Treatment Handbook Editorial Board of the Chinese Mechanical Engineering Society Heat Treatment Professional Branch. Heat treatment handbook(Part I) [M]. Beijing: China Machine Press, 2001.
-
- 作者简介: 赵军(通信作者), 男, 1957 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要从事板材成形及其智能化控制技术、精密塑性成形技术方面的研究。
E-mail: zhaojun@ysu.edu.cn
- 展培培, 男, 1984 年出生, 博士研究生。主要从事大型管件矫圆理论及工程应用方面的研究。
E-mail: zhanpei@ysu.edu.cn