DOI: 10.3901/JME.2019.01.052

基于接触区域的球头铣刀颤振稳定域 预报方法研究*

代月帮 魏兆成 李宏坤 张孟哲
(大连理工大学机械工程学院 大连 116024)

摘要: 运用半解析法精准搭建出球头铣刀与工件接触区域边界的投影方程, 对铣削系统时滞动力学方程进行全离散时域数值求解, 在单齿周期内球头铣刀视为圆弧切削的基础上, 通过接触区域投影和切削刃投影不同时刻的关系, 确定出数值求解方程中所需要的瞬时参与切削刀刃的实际切削部位, 利用 Floquet 定理获得了不同转速下的临界切削深度, 构建出了高精度的球头铣刀颤振稳定域叶瓣图, 并在三轴数控机床进行了试验验证, 试验结果与预测结果相符合, 表明了该方法的正确性。同时, 与传统方法相比, 这里所提供的方法拥有较高的预测精度, 最后分析了不同参数对颤振稳定域的影响规律, 为叶瓣图指导实际加工奠定了基础。

关键词: 颤振; 球头铣刀; 接触区域; 稳定域叶瓣图

中图分类号: TG113

Research on Prediction Method of Stability Lobe Diagram for Ball-end Mill Based on Engagement

DAI Yuebang WEI Zhaocheng LI Hongkun ZHANG Mengzhe
(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract: The equations for the boundaries of ball-end mill-workpiece engagement (BWE) are precisely established by a semi-analytical method at first. The differential dynamic equation derived from the ideal 2-Dof milling system is solved by the complete discrete method. Based on the cutter within a tooth passing period considered as arc path cutting, the instantaneous cutting positions required in the numerical solution are identified by the relationship of cutter edge and BWE. The stability lobe diagram is constructed by Floquet theory, which is subsequently verified on a three-axis NC machine tool. The experimental results are in good agreement with the predicted results, indicating the validity of this method. In contrast to traditional method, the proposed method shows higher prediction precision. The influence laws of different parameters on stability are analyzed at last, which can give a help for the actual machining.

Key words: chatter; ball-end mill; engagement; stability lobe diagram

0 前言

铣削加工是目前最重要、应用最普遍的加工方式之一, 然而不合适的切削参数导致的切削颤振严重地影响了加工的效率、精度以及稳定性, 是制约铣削技术快速发展的关键因素。

国内外学者对切削颤振进行了大量探索, 研究了多种颤振机理模型, 其中再生型颤振是人们认为产生切削颤振最直接、最根本的原因。如图 1 所示, 由于本次切削振纹与上一次切削振纹相位之间的差

异导致的刀具切屑厚度不均而引起的自激振动, 即为再生型颤振。

图 1 再生颤振发生机理示意图

避免切削颤振最有效办法是在加工前构建出铣削颤振稳定域叶瓣图, 即在给定切削条件下, 绘制

* 国家自然科学基金资助项目(51575075)。20180315 收到初稿, 20180921 收到修改稿

出轴向临界颤振切深随主轴转速变化的函数关系，指导实际加工。球头铣刀是典型的点接触加工刀具，具有很好的法矢自适应性，在高速铣削加工尤其是曲面加工中有广泛的应用，因此构造出针对球头铣刀的颤振稳定域叶瓣图意义重大。

目前，常用的颤振稳定域叶瓣图建模方法主要分为频域法和时域法两大类，前者主要由 ALTINTAS 等^[1]提出来的解析算法和 MERDOL 等^[2]提出的多频率求解法。后者主要是由 INSPIERGER 等^[3]提出的半离散时域求解法；LI 等^[4]提出的基于龙格库塔的时域求解法；DING 等^[5]提出的全离散时域求解法；LI 等^[6]提出的完全离散时域数值求解法。但是这些方法主要是针对圆柱形铣刀，球头形的铣刀的很少。同时这些方法所建立的动力学模型无法精确定瞬时参与切削的刀齿的实际切削部位，只能将刀齿的瞬时切入切除角进行简化处理，构造出的叶瓣图精度也随之降低，因此如何针对上述不足提出一种高精度的球头铣刀颤振稳定域叶瓣图方法将是一个亟待解决的难题。

本文将球头铣刀单齿周期运动视为圆弧切削，对铣削系统二阶动力学方程进行全离散时域数值求解，在精准识别出球头铣刀与工件接触区域边界投影方程的基础上，通过切削刃投影与接触区域投影不同时刻的关系，确定时域方程中所需要的瞬时参与切削刀齿的实际切削部位，最后利用 Floquet 定理构建出了高精度的颤振稳定域叶瓣图，并对其进行了有效性试验验证。

1 球头铣刀-工件动力学方程

1.1 球头铣刀-工件系统动力学方程

将球头铣刀-工件系统简化为如图 2 所示。

图2 球头铣刀-工件系统简化模型

仅考虑进给方向 x 和法向 y 方向的刀具振动因素，建立式(1)所示的动力学方程

$$\begin{bmatrix} m_{tx} & 0 \\ 0 & m_{ty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_{tx}\xi_x\omega_{nx} & 0 \\ 0 & 2m_{ty}\xi_y\omega_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{tx}\omega_{nx}^2 & 0 \\ 0 & m_{ty}\omega_{ny}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{tx}(t) \\ F_{ty}(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中， m_{tx} ， m_{ty} ； ξ_x ， ξ_y ； ω_{nx} ， ω_{ny} 分别为刀具系统 x ， y 方向的模态质量，阻尼系数和固有频率； $F_{tx}(t)$ 和 $F_{ty}(t)$ 分别为 x ， y 方向作用在铣刀刀齿上的动态切削力。

1.2 动态切削力求解

1.2.1 建立球头铣刀切削刃几何模型

如图 3 所示，建立球头铣刀切削刃曲线几何模型。

图3 球头铣刀切削刃几何模型

由于每个切削微元与其所对应的轴向角存在一一映射关系，故切削微元坐标值可以表示为关于轴向角的函数，式(2)为第 j 刀刃上第 i 个切削微元坐标表达式。

$$\begin{cases} \psi_{ji}(k) = (R - R \cos k) \tan \beta / R \\ \phi_{10}(t) = 2\pi \cdot n \cdot t / 60 \\ \phi_{ji}(t) = \phi_{10}(t) - (j-1) \cdot 2\pi / N_f - \psi_{ji}(k) \\ x_{ji}(t) = R \sin k \cdot \sin(\phi_{ji}(t)) \\ y_{ji}(t) = R \sin k \cdot \cos(\phi_{ji}(t)) \\ z_{ji}(t) = R - R \cos k \end{cases} \quad (2)$$

式中， R 为球头铣刀半径； β 为切削刃螺旋角； t 为切削过程中的时间(s)； k 为第 j 刀刃上第 i 个切削微元的轴向接触角，在一个切削刃上取值范围为 $[0, \pi/2]$ ； $\psi_{ji}(k)$ 为第 j 刀刃上第 i 个切削微元径向滞后角； $\phi_{10}(t)$ 为第一个切削刃端点处转动的角度， n 为刀具转速(r/min)； $\phi_{ji}(t)$ 为第 j 刃上的第 i 个微元处瞬时径向接触角； N_f 为切削刃数目； $x_{ji}(t)$ ， $y_{ji}(t)$ ， $z_{ji}(t)$ 表示球头铣刀第 j 刀刃上第 i 个切削微

元在所建立的坐标系下的坐标值。

1.2.2 建立球头铣刀瞬时动态切削力模型

球头铣刀第 j 刀刃上第 i 个切削微元(轴向角为 k) 所受的切向力 $dF_{t,ji}(\phi_{ji}(t), k)$ 、径向力 $dF_{r,ji}(\phi_{ji}(t), k)$ 、轴向力 $dF_{a,ji}(\phi_{ji}(t), k)$ 表示为

$$\begin{cases} dF_{t,ji}(\phi_{ji}(t), k) = K_{tc} h(\phi_{ji}(t), k) db \\ dF_{r,ji}(\phi_{ji}(t), k) = K_{rc} h(\phi_{ji}(t), k) db \\ dF_{a,ji}(\phi_{ji}(t), k) = K_{ac} h(\phi_{ji}(t), k) db \end{cases} \quad (3)$$

式中, $h(\phi_{ji}(t), k)$ 为第 j 刀刃上第 i 个切削微元瞬时未变形切屑厚度; K_{tc} 为切向力系数; K_{rc} 为径向力系数; K_{ac} 为轴向力系数; db 为切削宽度, $db = Rdk$, R 为球头铣刀半径。

1.2.3 球头铣刀瞬时动态未变形切屑厚度求解

刀具瞬时未变形切屑厚度由瞬时静态未变形切屑厚度和瞬时动态未变形切屑厚度两部分组成, 由于瞬时静态未变形切屑厚度与颤振无关, 故其忽略。

仅考虑刀具 x 和 y 方向的振动, 球头铣刀第 j 刀刃上第 i 个切削微元(轴向角为 k) 的瞬时动态未变形切屑厚度如式(4)所示。

$$\mathbf{h}_d = \begin{bmatrix} \sin(k) \sin \phi_{ji}(t) \\ \sin(k) \cos \phi_{ji}(t) \\ -\cos(k) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} x(t) - x(t-T) \\ y(t) - y(t-T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $x(t) - x(t-T)$, $y(t) - y(t-T)$ 表示 t 时刻和 $(t-T)$ 时刻在 x 和 y 方向的动态振动矢量; T 为时滞周期, 在高速切削条件下, 时滞周期等于单齿切削周期, 即时滞周期 $T = 60/(N_f n)$, N_f 为刀齿数; n 为刀具转速(r/min)。

1.2.4 动态切削力 $F_{ix}(t)$ 和 $F_{iy}(t)$

通过坐标变换, 获得第 j 刀刃上第 i 个切削微元 x , y 方向动态切削力

$$\begin{bmatrix} dF_{x,ji}(\phi_{ji}(t), k) \\ dF_{y,ji}(\phi_{ji}(t), k) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \times \begin{bmatrix} dF_{t,ji}(\phi_{ji}(t), k) \\ dF_{r,ji}(\phi_{ji}(t), k) \\ dF_{a,ji}(\phi_{ji}(t), k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

坐标转换矩阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_{ji}(t) & -\sin k \sin \phi_{ji}(t) & -\cos k \sin \phi_{ji}(t) \\ \sin \phi_{ji}(t) & -\sin k \cos \phi_{ji}(t) & -\cos k \cos \phi_{ji}(t) \end{bmatrix}$$

由式(3), 式(4)和式(5)得到如下结果

$$\begin{bmatrix} dF_{x,ji}(\phi_{ji}(t), k) \\ dF_{y,ji}(\phi_{ji}(t), k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx,ji}(t) & a_{xy,ji}(t) \\ a_{yx,ji}(t) & a_{yy,ji}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-T) \\ y(t) - y(t-T) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{xx,ji}(t) = [-K_{tc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \sin^2(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \sin^2(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{xy,ji}(t) = [-K_{tc} \cos^2(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{yx,ji}(t) = [K_{tc} \sin^2(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{yy,ji}(t) = [K_{tc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \cos^2(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \cos^2(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \end{cases}$$

确定每个切削刃在 t 时刻的参与切削片段的数目和每个参与切削的片段所对应的最大轴向角和最小轴向角, 通过式(6)就得到铣刀上的动态切削力。

$$\begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx}(t) & a_{xy}(t) \\ a_{yx}(t) & a_{yy}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-T) \\ y(t) - y(t-T) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_{xx}(t) = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [-K_{tc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \sin^2(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \sin^2(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{xy}(t) = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [-K_{tc} \cos^2(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{yx}(t) = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [K_{tc} \sin^2(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{yy}(t) = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [K_{tc} \sin(\phi_{ji}(t)) \cos(\phi_{ji}(t)) - K_{rc} \cos^2(\phi_{ji}(t)) \sin(k) - K_{ac} \cos^2(\phi_{ji}(t)) \cos(k)] R \sin(k) dk \end{cases}$$

2 接触区域高精度建模方法

球头铣刀和工件的接触区域是指在加工过程中刀具切入工件的区域。高速铣削条件下, 在单齿切削周期内, 球头铣刀可以认为是圆弧切削, 因此铣刀-工件接触区域蕴含着单齿切削周期内铣刀瞬时参与切削刀刃的实际切削部位等众多信息。

下面以铣刀球头半径为 R , 在三轴数控机床上进行平面铣削, 轴向切削深度为 a_p , 相邻刀轨行距为 a_f 为例, 来进行球头铣刀与工件接触区域(如图4所示)边界方程半解析建模。

图4 球头铣刀-工件接触区域示意图

2.1 确定球头铣刀与工件的接触区域边界

如图5所示,球头铣刀与工件接触区域边界由 a 、 b 、 c 、 d 四条线组成,其中, a 号线为铣刀球头与工件加工表面的交线, b 号线为球头铣刀垂直于进给方向的轮廓圆截面与工件过渡表面的交线, c 号线为本次走刀与上一次走刀在工件已加工表面留下的加工残余最高点组成的直线, d 号线为铣刀球头与上一次走刀留下的加工痕迹的交线。另外 e 号线为上一次走刀在工件加工表面留下的加工痕迹。

图5 接触区域边界组成示意图

如图6所示,以球头铣刀的顶点为坐标系原点,建立刀位点的三维笛卡尔坐标系,其中,球头铣刀在轴线为 Z 轴, Z 轴正方向远离球头铣刀的顶点;铣刀的进给方向为 X 轴正方向; Y 轴正方向指向工件待加工表面。在该坐标系下,铣刀球头轮廓的方程为 $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ 。由于铣刀球头上的点与其在 $X-Y$ 平面上的投影点具有一一映射的特性,因此将铣刀球头与工件接触区域边界线方程的求解过程转化为其在 $X-Y$ 平面投影方程的求解过程。

图6 三维坐标系建立示意图

2.2 接触区域边界投影方程求解

2.2.1 a 号线投影方程

a 号线为铣刀球头与工件待加工表面的交线,其投影到 $X-Y$ 坐标系下为圆的一部分,该圆的半径为 $\sqrt{R^2 - (R - a_p)^2}$,则 a 号线投影所在圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2 - (R - a_p)^2$ 。

2.2.2 b 号线投影方程

b 号线为球头铣刀垂直于进给方向的轮廓圆截面与工件过渡表面的交线,在 $X-Y$ 平面为一条与 Y 轴重合的直线,则 b 号线投影方程为 $x = 0$ 。

2.2.3 c 号线投影方程

c 号线为本次走刀与前一走刀在工件已加工表面形成的加工残余最高点组成的直线,如图7所示,在 $Y-Z$ 坐标下,获取本次刀位点所建立的铣刀球头截面方程 $y^2 + (z - R)^2 = R^2$,将该方程沿 Y 轴负半轴平移相邻加工刀轨之间的距离 a_l ,即可到在 Y 轴方向与本次刀位点对应的上一刀轨的铣刀球头截面方程,该方程为 $(y + a_l)^2 + (z - R)^2 = R^2$ 。

图7 M 点示意图

$y^2 + (z - R)^2 = R^2$ 与 $(y + a_l)^2 + (z - R)^2 = R^2$ 的交点 M 点即为 c 号线在 $Y-Z$ 平面的投影, M 点所对应的 Y 值为 $-a_l/2$,所对应的 Z 值为 $R - \sqrt{R^2 - (a_l/2)^2}$,因此 c 号线投影方程为 $y = -a_l/2$ 。

2.2.4 d 号线投影方程

d 号线投影方程的求解过程与 a 号线和 e 号线的投影方程有关,因此在求解 d 号线投影方程之前,首先确定 e 号线的投影方程。

(1) e 号线投影方程。

e 号线为上一次走刀在工件加工表面留下的加工痕迹。如图7所示,将 $z = a_p$ 代入到 $(y + a_l)^2 + (z - R)^2 = R^2$ 中,即可得到 e 号线投影方程 $y = \sqrt{R^2 - (a_p - R)^2} - a_l$ 。

(2) d 号线投影方程。

d 号线为铣刀球头与上一次走刀在工件的加工痕迹的交线,如图8所示, d 号线上的 N 点在 $X-Y$

平面的投影坐标可以由 a 号线与 e 号线在 X - Y 坐标系的投影方程联立得到, 经计算, N 点坐标为 $x=\sqrt{2a_l \cdot \sqrt{R^2-(a_p-R)^2}-a_l^2}$, $y=\sqrt{R^2-(a_p-R)^2}-a_l$ 。

图8 N 点示意图

利用分层思想可知, d 号线上的其他点在 X - Y 平面的投影坐标可以认为是不同轴向切削深度所对应的 a 号线与 e 号线在 X - Y 坐标系的投影方程的交点。因此, 将 N 点的坐标中的 a_p 用变量 v 替换, 单纯从数学角度可知, 在其他量一定的情况下, N 点的坐标值只与变量 v 值有关, 如图7所示, v 的最大取值为轴向切削深度 a_p , v 的最小取值为 c 号线在 Y - Z 坐标系投影所对应的 Z 坐标, 即 M 点的 Z 坐标值 $R-\sqrt{R^2-(a_l/2)^2}$ 。在区间 $[v_{\max}, v_{\min}]$ 内改变 v 的值便可以得到 d 号线在 X - Y 平面的投影坐标的其他值。图9即是通过以上方法沿着 Y 轴方向在 d 号线投影上等间距取7个点后, 运用牛顿插值法获得的 d 号线在 X - Y 平面投影的六次多项式方程。

图9 d 号线在 X - Y 坐标系下的投影

如图10所示, a , b , c , d 四条线的投影共同围成的区域即为轴向切削深度为 a_p 时球头铣刀与工件接触区域在 X - Y 平面的投影。

3 动力学方程时域数值求解

3.1 全离散化处理球头铣刀-工件动力学方程

由式(6)可将式(1)表示为如下形式

$$\begin{bmatrix} m_{tx} & 0 \\ 0 & m_{ty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_{tx}\xi_x\omega_{nx} & 0 \\ 0 & 2m_{ty}\xi_y\omega_{ny} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{tx}\omega_{nx}^2 & 0 \\ 0 & m_{ty}\omega_{ny}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx}(t) & a_{xy}(t) \\ a_{yx}(t) & a_{yy}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-T) \\ y(t-T) \end{bmatrix} \quad (7)$$

图10 轴向切深为 a_p 时接触区域在 X - Y 平面的投影

将式(7)表示为如下所示的状态空间形式

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t-T) \quad (8)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_{nx}^2 + \frac{1}{m_{tx}}a_{xx}(t) & \frac{1}{m_{tx}}a_{xy}(t) & -2\xi_x\omega_{nx} & 0 \\ \frac{1}{m_{ty}}a_{yx}(t) & -\omega_{ny}^2 + \frac{1}{m_{ty}}a_{yy}(t) & 0 & -2\xi_y\omega_{ny} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{tx}}a_{xx}(t) & -\frac{1}{m_{tx}}a_{xy}(t) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{ty}}a_{yx}(t) & -\frac{1}{m_{ty}}a_{yy}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = [x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)]^T$$

将时滞周期 T 等分为 m 份, 即 $T = m \cdot \tau$, 在第 p 个离散时间间隔 $[t_p, t_{p+1}]$ 内, 将 $\mathbf{u}(t_p - T)$, $\mathbf{u}(t_p)$, $\dot{\mathbf{u}}(t_p)$, 分别表示为

$$\mathbf{u}(t_p - T) = \mathbf{u}(t_p - m\tau) + \frac{\mathbf{u}(t_p - m\tau + \tau) - \mathbf{u}(t_p - m\tau)}{2} = \mathbf{u}_{p-m} + \frac{\mathbf{u}_{p-m+1} - \mathbf{u}_{p-m}}{2} \quad (9)$$

$$\mathbf{u}(t_p) = \mathbf{u}(t_p) + \frac{\mathbf{u}(t_{p+1}) - \mathbf{u}(t_p)}{2} = \mathbf{u}_p + \frac{\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_p}{2} \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t_p) = \frac{\mathbf{u}(t_{p+1}) - \mathbf{u}(t_p)}{\tau} = \frac{\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_p}{\tau} \quad (11)$$

由式(9), 式(10)和式(11)可将式(8)可表示为

$$\frac{\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_p}{\tau} = \mathbf{A}_p \left(\mathbf{u}_p + \frac{\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_p}{2} \right) + \mathbf{B}_p \left(\mathbf{u}_{p-m} + \frac{\mathbf{u}_{p-m+1} - \mathbf{u}_{p-m}}{2} \right)$$

进一步可表示为

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{A}_p \right) \mathbf{u}_{p+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \tau \mathbf{A}_p \right) \mathbf{u}_p + \frac{1}{2} \tau \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{p-m} + \frac{1}{2} \tau \mathbf{B}_p \mathbf{u}_{p-m+1} \quad (12)$$

若 $\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{A}_p \right)$ 为可逆矩阵, 则式(12)可表示为

$$\mathbf{u}_{p+1} = \mathbf{M}_p \mathbf{u}_p + \mathbf{N}_p \mathbf{u}_{p-m+1} + \mathbf{N}_p \mathbf{u}_{p-m} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_p = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{A}_p \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \tau \mathbf{A}_p \right) \quad (14)$$

$$\mathbf{N}_p = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \tau \mathbf{A}_p \right)^{-1} \frac{1}{2} \tau \mathbf{B}_p \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_{nx}^2 + \frac{1}{m_{tx}} a_{xx,p} & \frac{1}{m_{tx}} a_{xy,p} & -2\xi_x \omega_{nx} & 0 \\ \frac{1}{m_{ty}} a_{yx,p} & -\omega_{ny}^2 + \frac{1}{m_{ty}} a_{yy,p} & 0 & -2\xi_y \omega_{ny} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{tx}} a_{xx,p} & -\frac{1}{m_{tx}} a_{xy,p} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{ty}} a_{yx,p} & -\frac{1}{m_{ty}} a_{yy,p} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{xx,p} = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [-K_{tc} \sin(\phi_{ji,p}) \cos(\phi_{ji,p}) - K_{rc} \sin^2(\phi_{ji,p}) \sin(k) - K_{ac} \sin^2(\phi_{ji,p}) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{xy,p} = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [-K_{tc} \cos^2(\phi_{ji,p}) - K_{rc} \sin(\phi_{ji,p}) \cos(\phi_{ji,p}) \sin(k) - K_{ac} \sin(\phi_{ji,p}) \cos(\phi_{ji,p}) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{yx,p} = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [K_{tc} \sin^2(\phi_{ji,p}) - K_{rc} \sin(\phi_{ji,p}) \cos(\phi_{ji,p}) \sin(k) - K_{ac} \sin(\phi_{ji,p}) \cos(\phi_{ji,p}) \cos(k)] R \sin(k) dk \\ a_{yy,p} = \sum_{j=1}^{N_f} \int_{k_{\min,j}}^{k_{\max,j}} [K_{tc} \sin(\phi_{ji,p}) \cos(\phi_{ji,p}) - K_{rc} \cos^2(\phi_{ji,p}) \sin(k) - K_{ac} \cos^2(\phi_{ji,p}) \cos(k)] R \sin(k) dk \end{cases} \quad (16)$$

3.2 $a_{xx,p}$, $a_{xy,p}$, $a_{yx,p}$, $a_{yy,p}$ 确定方法

以 $N_f=2$ 为例, 来阐述 $a_{xx,p}$, $a_{xy,p}$, $a_{yx,p}$, $a_{yy,p}$ 确定方法。在 t_p 时刻, 按照公式(2)将球头铣刀全部切削刃投影到第 2.1 节中所建立的 X - Y 坐标系下。

由铣刀刀齿数和构建出的刀具-工件的接触区域可知在时滞周期内的任意时刻, 只有一条切削刃参与切削, 设此切削刃为第一条切削刃。如图 11 所示, 在时滞周期内, 该切削刃投影线到达 b 投影线与 a 投影线交点位置; 与 d 号投影线相切位置; a 投影线与 d 投影线交点位置; d 投影线与 c 投影线交点位置; 时滞周期结束的时刻分别记为 t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 。

图 11 第一条切削刃投影 0- t_5 时刻位置

当 $t_p=0$ 时刻, 第一条切削刃没有参与切削, 当 t_p 在 $0-t_1$ 时间内, 如图 12 所示, 第一条切削刃与 a 号线投影线交点所对应的轴向角即为该切削刃 t_p 时刻在式(16)中所对应的 $k_{\max,1}$, 此时 $k_{\min,1}$ 为零。

图 12 $t_p < t_1$ 时刻, 切削刃参与切削情况

同理, 可以确定 t_p 分别在 t_1-t_2 , t_2-t_3 , t_3-t_4 , t_4-t_5 时间段内, 第一条切削刃所对应 $k_{\max,1}$ 和 $k_{\min,1}$ 值, 具体如图 13 所示。

确定出各个切削刃在 t_p 参与切削的最大轴向角和最小轴向角之后, 通过式(16)可得到 $a_{xx,p}$, $a_{xy,p}$, $a_{yx,p}$, $a_{yy,p}$ 值。

图13 $t_1 < t_p < t_5$ 时刻, 切削刃参与切削情况

4 颤振稳定域叶瓣图构建

建立系数矩阵 C_p , 该矩阵满足离散映射

$$\mathbf{i}_{p+1} = C_p \mathbf{i}_p \quad (17)$$

$\mathbf{i}_p$ 是 $2m+4$ 维的矢量

$$\mathbf{i}_p = \text{col}(x_p, y_p, \dot{x}_p, \dot{y}_p, x_{p-1}, y_{p-1}, x_{p-2}, y_{p-2}, \dots, x_{p-m+1}, y_{p-m+1}, x_{p-m}, y_{p-m}) \quad (18)$$

矩阵 C_p 为 $2m+4$ 维矩阵

$$C_p = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_1 & R_2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P 为 4×4 矩阵, 等于公式(14)中的 M_p , R_1 和 R_2 为 4×2 矩阵, 等于式(15)中的 N_p 的前两列。

通过使用一系列离散 $C_p (p=0, 1, \dots, m-1)$, 构建时滞周期 T 内的过渡矩阵 Φ , 亦即

$$\mathbf{i}_p = \Phi \mathbf{i}_0 \quad (19)$$

式中, Φ 定义为: $\Phi = C_{m-1} C_{m-2} \cdots C_1 C_0$ 。

由 Floquet 理论可知, 传递函数 Φ 所有特征值的模的最大值小于 1, 等于 1 和大于 1, 分别表示切削处于稳定状态, 临界稳定状态和不稳定状态。改变主轴转速, 获得不同转速在 $[0, a_p]$ 范围内所对应的临界轴向切削深度。最终, 构建出临界轴向切削深度随主轴转速变化的函数关系图, 即为颤振稳定域叶瓣图。

5 试验验证与对比

5.1 试验验证

试验验证的机床为立式镗铣加工中心, 型号是

VF-3; 所用刀具为直径 10 mm, 螺旋角为 30° , 2 齿硬质合金球头铣刀; 刀轨行距设置为 0.5 mm; 工件材料为 45 钢; 由切削力系数辨识试验^[12]辨识出切削力系数, 具体结果如表 1 所示。

表1 切削力系数

切削力系数 $K_{tc}/(\text{N}/\text{mm}^2)$	径向力系数 $K_{rc}/(\text{N}/\text{mm}^2)$	轴向力系数 $K_{ac}/(\text{N}/\text{mm}^2)$
1 977	760	83

如图 14a 所示, 通过锤击试验, 获取刀具系统 X 和 Y 方向上的模态参数, 结果表 2 所示。

图14 验证试验

表2 刀具系统模态参数

阶数	方向	固有频率 $\omega_n / (\text{Hz})$	阻尼比 ζ	刚度 $K / (\text{N}/\text{m})$
一	x	388	0.002 3	5.68×10^7
	y	388	0.002 3	1.17×10^7
二	x	789	0.016 3	1.87×10^7
	y	789	0.016 3	1.03×10^7
三	x	1 165	0.029 9	8.04×10^6
	y	1 165	0.029 9	3.91×10^6

首先, 获得轴向切深为 R 时的接触区域; 其次, 选取刀具系统的第一阶模态参数; 构建出轴向切深范围为 $[0, R]$, 转速在 $2.5 \times 10^3 \text{ r/min}$ 到 $25 \times 10^3 \text{ r/min}$ 之间的切削稳定性叶瓣图, 结果如图 15 所示, 从中选取如表 3 所示的四点; 通过试验(图 14b)

图15 接触区域法构造出的颤振稳定域叶瓣图

获取各点多对应的切削力，分别对它们进行时域和频域分析。

表 3 四点切削信息

序号	主轴转速 $n/(r/min)$	轴向切深 $w/(mm)$	预测状态
A	5 800	3	稳定
B	6 400	0.8	稳定
C	4 700	1	颤振
D	4 800	0.5	颤振

由图 16 各点切削力的时域图可知，A、B 条件下的切削力比 C、D 条件下的切削力平稳可靠。

由图 16b、16d 频域图可知，A、B 点第一个刀齿和第二个刀齿的幅值随着各自的倍频增大而逐渐衰减，切削处于稳定状态，与预测状态相一致。

由图 16f、16h 频域图可知，C 点第一个刀齿的三倍频 391.65 Hz 幅值大于二倍频 235 Hz 幅值，未出现衰减。D 点第一个刀齿的三倍频 400 Hz 幅值大于二倍频 240 Hz 幅值，也未出现衰减。主要原因是 391.65 Hz、400 Hz 接近于系统固有频率 388 Hz，发生了切削颤振，与预测状态一致。

(a) A 点的切削力时域图

(b) A 点的切削力频域图

(c) B 点的切削力时域图

(d) B 点的切削力频域图

(e) C 点的切削力时域图

(f) C 点的切削力频域图

(g) D 点的切削力时域图

(h) D 点的切削力频域图

图 16 验证点处的切削力时域与频域图

通过以上分析可知,四点的试验结果与预测结果相一致,表明了该方法的正确性。

5.2 与传统方法对比

第5.1节中的参数不变,利用全离散法构造出文献[10]所提供的球头铣刀颤振稳定域建模方法所对应的叶瓣图,将其与图15进行对比,结果如下所示。

由图17可知,表3中的C、D点在由文献[10]所构建出的叶瓣图中为稳定点,这与第5.1节中的验证结果相矛盾,主要原因就是文献[10]中的模型将铣刀螺旋角视为零度,同时对球头铣刀的切入切除角判定标准进行了简化,而本文通过刀刃与接触区域的关系精准确定出切削刀刃的瞬时切削部位,故其预测精度较高。

图17 两种方法构造出的叶瓣图对比

5.3 颤振稳定性影响因素分析

5.3.1 刀轨行距对叶瓣图构造结果的影响

第5.1节中的其他参数不变,改变刀轨行距,获取所对应的叶瓣图,结果如图18所示。

图18 刀轨行距对叶瓣图构造结果的影响

对比不同刀轨间距叶瓣图构造结果可知,随着刀轨行距增大,叶瓣图下移,切削稳定区域减少,颤振区域增大,因此在切削效率保证的前提下,应尽量减少相邻刀轨之间的距离。

5.3.2 刀具系统模态参数对叶瓣图构造结果的影响

第5.1节中其他参数不变,改变刀具系统的模态参数,获取所对应的叶瓣图,分析不同模态值对

叶瓣图构造结果的影响,结果如图19所示。

图19 不同阶固有频率所对应的叶瓣图

对比不同阶的固有频率构造出的叶瓣图可知,二阶,三阶模态固有频率时,叶瓣图上移,切削稳定区域增大,颤振区域减小。

单独观察第一阶固有频率所构造出的叶瓣图可知,在刀具系统固有频率(388 Hz)的谐波频率(对应的主轴转速 1 1647 r/min, 5 823 r/min, 3 882 r/min等)处存在较大的稳定性叶瓣,且越靠近固有频率,稳定性叶瓣越大,工程价值越高。

5.3.3 切削力系数对叶瓣图构造结果的影响

第5.1节中的其他参数不变,增大切削力系数至表4所示,构造其所出叶瓣图,将其与表1所对应的叶瓣图进行比较,分析切削力系数对叶瓣图构造结果的影响。

表4 合金钢切削力系数

切向力系数 $K_{te}/(\text{N}/\text{mm}^2)$	径向力系数 $K_{re}/(\text{N}/\text{mm}^2)$	轴向力系数 $K_{ae}/(\text{N}/\text{mm}^2)$
2 822	1 231	414

由图20可知,随着 K_{te} , K_{re} , K_{ae} 的增大,叶瓣图下移,切削稳定区域减少,颤振区域增大。

图20 表1与表4所对应的叶瓣图对比

切削力系数与刀具磨损状况有密切关系,从文献[12]可知,刀具磨损越严重,其所对应的切削力系数越大。而从图20可知,切削力系数越大,加工

过程中越容易发生颤振,因此在制定无颤振加工参数时,应根据刀具的实际状况来构建稳定域叶瓣图。

6 结论

(1) 本文利用分层离散化思想对球头铣刀与工件接触区域进行了高精度半解析建模,其中考虑了加工残余对接触区域的影响,将接触区域由传统的三条线扩展为四条线。通过球头铣刀-工件的接触区域投影和切削刃投影不同时刻的关系,确定出时域数值求解方程中所需要的瞬时参与切削的刀刃的实际切削部位,准确地构造出了球头铣刀颤振稳定域叶瓣图,与传统的球头铣刀叶瓣图构建方法相比,提高了预测精度。

(2) 分析了不同的径向切深,不同刀具系统的模态参数,不同切削力系数对叶瓣图构造结果的影响,获得了它们对叶瓣图的影响规律,为叶瓣图指导实际加工奠定了基础。

参 考 文 献

- [1] ALTINTAS Y, BUDAK E. Analytical prediction of stability lobes in milling[J]. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 1995, 44(1): 357-362.
- [2] MERDOL S, ALTINTAS Y. Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling[J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering, 2004, 126(3): 459-466.
- [3] INSERGER T, STEPAN G. Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(1): 117-141.
- [4] LI Z, YANG Z, PENG Y, et al. Prediction of chatter stability for milling process using Runge-Kutta-based complete discretization method[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 86(1): 943-952.
- [5] DING Y, ZHU L, ZHANG X, et al. Second-order full-discretization method for milling stability prediction[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010, 50(10): 926-932.
- [6] LI M, ZHANG G, HUANG Y. Complete discretization scheme for milling stability prediction[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 71(1-2): 187-199.
- [7] 李忠群. 复杂切削条件高速铣削加工动力学建模、仿真与切削参数优化研究[D]. 北京: 北京航空航天大学, 2008.
- LI Zhongqun. Dynamic modeling, simulation and optimization of high speed milling under complicated cutting conditions[D]. Beijing: Beihang University, 2008.
- [8] 李忠群, 刘强. 圆角铣削颤振稳定域建模与仿真研究[J]. 机械工程学报, 2010, 46(7): 181-186.
- LI Zhongqun, LIU Qiang. Modeling and simulation of chatter stability for circular milling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(7): 181-186.
- [9] 吴石, 刘献礼, 宋盛罡, 等. 铣刀磨损对铣削稳定性及表面位置误差的影响[J]. 振动、测试与诊断, 2015, 35(4): 763-769.
- WU Shi, LIU Xianli, SONG Shenggang, et al. The influence of wear loss of milling cutter on milling stability and surface location error[J]. Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis, 2015, 35(4): 763-769.
- [10] 宋盛罡. 薄板件铣削过程颤振稳定域预测及实验研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2015.
- SONG Shenggang. Prediction and experimental study on the chatter stability in milling of thin part[D]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2015.
- [11] 胡瑞飞, 殷鸣, 刘雁, 等. 切削稳定性约束下的铣削参数优化技术研究[J]. 机械工程学报, 2017, 53(5): 190-198.
- HU Ruifei, YIN Ming, LIU Yan, et al. Optimization of milling parameters under constrain of process stability, Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(5): 190-198.
- [12] 刘强, 李忠群. 数控铣削加工过程仿真与优化: 建模、算法与工程应用[M]. 北京: 航空工业出版社, 2011.
- LIU Qiang, LI Zhongqun. Simulation and optimization of CNC milling progress: Modeling, algorithms and applications[M]. Beijing: Aviation Industrial Publishing House, 2011.

作者简介: 代月帮, 男, 1989 年出生, 博士研究生。主要研究方向为颤振稳定域预报。

E-mail: daiyuebang@sohu.com

李宏坤(通信作者), 男, 1974 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械系统动态测控、微弱信号特征提取。

E-mail: lihk@dlut.edu.cn