DOI: 10.3901/JME.2014.13.059

修形对齿轮系统动力学特性的影响规律*

陈思雨 唐进元 王志伟 胡泽华

(中南大学高性能复杂制造国家重点实验室 长沙 410083)

摘要: 在考虑实际齿轮啮合刚度及静态传递误差的基础上, 研究含不同修形量和修形长度齿轮的动态行为。利用有限单元方法得到不同修形齿轮的啮合刚度及静态传递误差, 将啮合刚度及静态传递误差引入到动力学分析模型中, 并提出以齿轮副的振动幅值及动态因子来衡量齿轮修形优劣的方法。数值分析表明: 该方法可以有效地鉴别不同修形时齿轮的动态性能的差异; 考虑修形及轮齿侧隙的齿轮动态行为分析, 有助于了解齿轮的真实运行性能; 宽转速范围内的齿轮副动力学分析, 对理解修形齿轮的动态性能, 并择优确定修形的长度及修形量具有重要的意义。

关键词: 齿轮; 修形; 动态因子; 啮合刚度; 传递误差

中图分类号: TH212; TH213

Effect of Modification on Dynamic Characteristics of Gear Transmissions System

CHEN Siyu TANG Jinyuan WANG Zhiwei HU Zehua

(State Key Laboratory of High Performance Complex Manufacturing,
Central South University, Changsha 410083)

Abstract: The effects of modification on the nonlinear dynamic characteristics are analyzed. The accurate mesh stiffness and static transmission error are calculated by using finite element method. The mesh stiffness and static transmission error are introduced in the nonlinear dynamic gear transmission system directly. And the general Fourier series is not adopted to approximate the mesh stiffness and static transmission error in order to avoid confusion between the modification and approximate error. The vibration amplitude and dynamic factor are proposed to indicate the effects of modification on the gear nonlinear dynamics characteristics. The numerical results show that the proposed method can be used to discriminate the effect of modification; the dynamic analysis based on nonlinear system with backlash and modification can provide comprehensive understanding on the transmission characteristic; the effects of modification are analyzed in a broadband rotation speed, which are helpful to determine the modification length and amplitude.

Key words: gear; modification; dynamic factor; mesh stiffness; transmission error

0 前言

齿轮传动系统的振动和噪声问题是齿轮传动系统设计与研究者关心的热点问题之一^[1-9]。提高重载齿轮传动工作平稳性、降低动载荷和噪声的主要方法有^[10]: ① 改变支撑轴的弹性, 可以使动载荷系数降低, 但是比较微弱; ② 降低齿轮的啮合刚度, 可以使圆周动载力显著降低。改变轮体结构可以使啮合刚度降低, 但是轮体结构的改变有可能削弱其强度; ③ 齿廓修形, 是提高齿轮传动使用指标并在

实践中广泛使用的一种方法。

航空传动中对齿轮的高精度、高承载能力和高可靠性要求, 使研究齿轮的动态特征更加迫切。制造误差、安装误差、重载时支撑系统导致的偏差, 均会使轮齿出现不正常啮合, 为此对齿轮进行修形成为一个更加重要的手段^[11-13]。国外, CAI 和 HAYASHI^[14]以齿轮的扭转振动为目标函数, 提出了一种齿轮修形优化方法。MAATAR 和 VELEX^[2]通过建立 3D 模型和 36 自由度的扭转振动模型 (不考虑间隙), 研究了窄齿斜齿轮的修形对其动态传递性能的影响。ZHANG 和 FANG^[15]研究了齿面修形、安装误差和轮齿接触变形对传递误差的影响。LITVIN^[16]给出了齿高及齿宽方向的鼓形修形方法,

* 国家重点基础研究发展计划(973计划, 2011CB706800)和国家自然科学基金(51305462)资助项目。20130808收到初稿, 20140505收到修改稿

优化了齿轮的传递误差。WAGAJ 等^[4,17]试验研究了斜齿轮的修形对齿轮的承载寿命的影响规律。国内,许多学者对齿轮的几何齿面修形原理^[18-22]、修形导致的啮合冲击^[23-29]等做了非常深入的研究。

通过修形来优化齿轮副的平稳性,并降低动载荷和噪声是一个复杂的系统性的工作。修形设计时要考虑实际载荷历程、齿轮安装方式、转速等因素。而准确确定一对轮齿的修形量也将是一个非常困难的问题。一个齿轮的修形量往往根据齿轮的载荷设定,当改变转速、载荷后,修形有可能导致系统动载荷增大、系统振动加剧^[10]。因此,至今修形设计没有形成一个普适性标准。另外,现有的修形设计中,主要是以齿轮传动系统的静态传递误差、准静态范畴内的冲击速度为目标函数,与实际动态行为有一定的差距。为此,在计算修形量时,应该尽量使齿轮在比较大的载荷与速度范围内均有效。这也是本文研究的出发点,希望研究和认识不同的修形量对齿轮副的动态行为的影响规律,为齿轮的修形设计提供一种新的思路。

从研究文献分析可知,将轮齿修形量与静态传递误差、轮齿传动侧隙、内外参数激励、时变刚度等非线性因素进行耦合,全面分析齿轮修形与传动非线性性能关联规律的文献很少。修形量是一个非常小的量。而现有的动力学分析时,对时变啮合刚度及静态误差激励均作了近似,并不能真实地将修形的影响引入到动力学分析模型中。基于以上问题,下文在建立修形齿轮精确 3D 模型的基础上,研究工作主要是:① 基于有限单元方法的齿轮啮合刚度及静态传递误差的计算;② 考虑实际啮合刚度和静态传递误差的齿轮动力学特性分析。

1 修形对刚度及静态传递误差的影响

1.1 修形模型及刚度计算

为了得到精确的齿轮分析模型,本文基于 CATIA 的齿轮虚拟加工过程加工制造齿轮副,其参数如表 1 所示。齿轮过渡曲线由刀具圆角部分切出,圆角半径为 1 mm。

表 1 齿轮副几何参数

参数	数值
小齿轮齿数	25
大齿轮齿数	33
模数/mm	4
压力角/(°)	25
齿顶高系数	1
顶隙系数	0.25
齿宽/mm	28

图1 齿轮修形形式

齿轮修形长度和修形量大小 Δ 通常可以根据啮合点位置确定,如图 1 所示。根据其修形长度及修形量的大小分别建立如表 2 所示的 7 对修形齿轮模型。根据以上 3D 模型,建立齿轮有限元分析模型如图 2 所示。在主动轮和从动轮圆心处建立两个参考点,并将主动轮和从动轮的内圈与参考点耦合在一起。主动轮施加转速或者位移,从动轮施加扭矩。通常有限单元模型的振动方程可以表示为^[30]

$$m\ddot{\delta} + c\dot{\delta} + k\delta = F \quad (1)$$

式中 m ——结构质量矩阵;

c ——结构阻尼矩阵;

k ——结构刚度矩阵;

F ——外力;

δ ——单元节点的位移。

本文基于准静态接触下的齿轮综合啮合刚度有限元计算方法,忽略惯性力和阻尼力的影响,式(1)改写为

$$k\delta = F \quad (2)$$

表 2 修形参数

代号	初始角度/(°)	修形量/ μm
A1	33.0	0
B1	33.0	21
C1	33.0	27
B2	30.4	21
C2	30.4	27
B3	22.7	21
C3	22.7	27

如若仅仅考虑齿轮两个参考点的转动角度位移,则式(2)可以进一步改写为

$$k_m(R_p\theta_p - R_g\theta_g) = T_g/R_g \quad (3)$$

式中 θ_i ——齿轮 i 转角(有限单元法), $i=p,g$;

R_i ——齿轮 i 基圆半径, $i=p,g$;

T_g ——齿轮负载扭矩;

k_m ——齿轮啮合刚度。

值得注意的是, 当齿轮副不存在几何误差、安装误差, 无负载时的传递误差为 0 时, 式(3)才能成立。因为当齿轮引入修形时, 会使齿轮副引入无负载静态传递误差(No load transmission error, NLTE), 则负载作用下, 轮齿的变形或传递误差(Transmission error, TE) 为^[30]

$$TE = R_p \theta_p - R_g \theta_g - NLTE \quad (4)$$

图2 有限单元模型

基于有限单元方法的齿轮综合啮合刚度可以表示为

$$k_m = \frac{T_g}{R_g} \frac{1}{TE} = \frac{T_g}{R_g (R_p \theta_p - R_g \theta_g - NLTE)} \quad (5)$$

1.2 修形对刚度及静态传递误差的影响

表2 所示的齿轮的设计载荷为 $473.8 \text{ N} \cdot \text{m}$ (小轮输入扭矩), 利用有限元法计算无负载静态传递误差时, 齿轮的负载为 $0.02 \text{ N} \cdot \text{m}$, 此时载荷引起的弹性变形可以忽略。随后将载荷调整至设计载荷值, 得到不同修形量值及修形长度时的齿轮啮合刚度及静态传递误差如图3和图4所示。修形量用齿顶处法向长度 Δ 表示。修形长度用修形起始点的滚动角度 α 表示。无修形时, 齿轮综合啮合刚度近似为矩形波, 单双齿交替时啮合刚度变化比较陡峭。当 $\alpha=33^\circ$ 时, 在单齿啮合区内啮合刚度变化比较微弱, 单齿啮合区长度增大。同时使轮齿啮出时比较平稳过渡, 啮合刚度变化也比较平缓。当修形长度增加至 $\alpha=30.4^\circ$ 时, 单齿区的长度没有变化, 但是使轮齿啮出时刚度变陡峭。修形长度为 $\alpha=22.7^\circ$ 、修形量为 $\Delta=21 \mu\text{m}$ 时, 为齿廓长修形, 修形对理论单齿区及双齿区有比较大的影响。单齿区增大, 在啮入点附近有比较短的双齿啮合区, 啮合刚度变成一个尖峰。平均啮合刚度明显降低。但是当修形量 $\Delta=27 \mu\text{m}$ 时, 修形导致过多的材料去除, 单齿区啮合刚度有非常明显的降低, 传递误差急剧增大。

图3 $\Delta=21 \mu\text{m}$ 时, 修形长度对刚度及传递误差的影响

图4 $\Delta=27 \mu\text{m}$ 时, 修形长度对刚度及动态传递误差的影响

2 修形对齿轮副动态行为的影响

2.1 动力学模型

单对齿轮副的动力学方程可以表示为^[32]

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + c r_{b1} (\dot{r}_{b1} \dot{\theta}_1 - \dot{r}_{b2} \dot{\theta}_2) + \\ r_{b1} k(t) f(r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(t)) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - c r_{b2} (\dot{r}_{b1} \dot{\theta}_1 - \dot{r}_{b2} \dot{\theta}_2) - \\ r_{b2} k(t) f(r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(t)) = -T_2 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 I_i ——小齿轮、大齿轮转动惯量, $i=1,2$;
 r_{bi} ——小齿轮、大齿轮基圆半径, $i=1,2$;
 θ_i ——小齿轮、大齿轮转动角度, $i=1,2$;
 T_i ——输入、输出扭矩, $i=1,2$;
 c ——材料阻尼系数;

$k(t)$ ——时变啮合刚度。

$e(t)$ 为静态误差激励,可表达为

$$e(t) = \sum_{i=0}^N e_i \cos(2\pi z_p \Omega t) \quad (7)$$

式中 Ω ——输入转速;

z_p ——齿轮 P 的齿数。

值得注意的是以下几个方面。

(1) 式(6)中的阻尼力中,静态传递误差的影响可以忽略,并将静态传递误差当作真正的位移激励耦合到间隙函数中,即

$$b = B + e(t) \quad (8)$$

(2) 为了真实反映修形对齿轮副动态行为的影响,将利用有限元法得到的时变啮合刚度及静态传递误差直接当作系统激励,研究修形对齿轮副动态行为的影响规律,避免由于刚度及静态传递误差的近似导致的误差。

这里,定义动态传递误差

$$x = r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 \quad (9)$$

则动力学方程(式(6))变为

$$\ddot{x} + \frac{c}{m_e} \dot{x} + \frac{1}{m_e} k(t) f(x) = F_m \quad (10)$$

式中, $m_e = \frac{I_1 I_2}{I_1 r_{b2}^2 + I_2 r_{b1}^2}$, $F_m = \frac{r_{b1} T_1}{I_1} + \frac{r_{b2} T_2}{I_2}$ 。

间隙函数 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x, b) = \begin{cases} x - b & x > b \\ 0 & |x| \leq b \\ x + b & x < -b \end{cases} \quad (11)$$

2.2 数值分析

假设轮齿间隙参数 $B=5 \mu\text{m}$,并代入其他系统参数,利用 Runge-kutta 方法求解微分方程(式(10))可以得到齿轮副的动态传递误差。积分计算时,根据齿轮的平均转动角度确定每一时刻的啮合刚度及静态传递误差值。图5给出了转速 $\Omega_D=9\ 280 \text{ r/min}$ 时,齿轮对 A1-C3 的动态响应的频率曲线。图5中横坐标为啮合频率的谐波次数。从图5可以看出,齿轮 B3 的一次谐波分量的幅值最小。与未修形齿轮 A1 相比,其他5种修形均使振动的幅值有不同程度的增加,齿轮 C3 的一次谐波分量的幅值最大。

从以上分析结果看出,在设计速度下,采用齿轮 B3 形式的修形可以有效地降低传动系统的振动幅值。但是齿轮在实际运行过程中,不可避免的存在转速波动,为此将齿轮放在比较宽的转速范围内来衡量修形的好坏是有必要的。

图5 转速 $\Omega_D=9\ 280 \text{ r/min}$ 时,系统的频率响应

图6和图7分别给出了不同修形时齿轮响应的均方值及动态因子随转速变化的曲线。从图6、7可以看出:① 修形使系统的固有频率发生了偏移,根据图3和图4,修形导致齿轮的综合啮合刚度发生改变,固有频率 $\omega_n = \sqrt{k_0/m_e}$ 也随之发生变化;② 在转速 $500 \sim 15\ 000 \text{ r/min}$ 范围内,齿轮 B1、B2、C1 和 C2 与未修形齿轮 A1 相比,在某些转速范围内振动幅值有明显的减小,有些转速范围内振动幅值增大,客观地说, B1、B2、C1 和 C2 四对修形齿轮并没有起到改善齿轮动态性能的目的;③ 在设计速度以下动态因子如图8所示,不合适的修形使齿轮 C3 的振动幅值急剧增大,动态因子也有明显的增加变为 $D_{\max}=2.53$,而齿轮 B3 在考虑的转速范围内,振动幅值有明显的降低,动态因子 $D_{\max}=1.54$,系统的动态性能得到了明显的改善;④ 虽然 B3 修形齿轮在所考虑的转速范围内,系统的动态性能有明显的改善,但是从其均方值图和动态因子图(图6和图7)可以看出,设计转速 $\Omega_D=9\ 280 \text{ r/min}$ 已经处于主共振的边缘。在转速为 $5\ 000 \text{ r/min}$

图6 振动响应的均方值随转速变化的曲线

附近, B3 修形齿轮的动态因子反而增加。这可能的原因是 B3 修形导致系统出现次谐波共振。图 9 给出了不同修形齿轮动态响应的前四次谐波分量的幅值(H1~H4)。从图 9 可以看出 B3 齿轮的一次谐波分量幅值比其他修形形式的齿轮的幅值要小。但是在次谐波共振频率 $\Omega_n/2$ 、 $\Omega_n/3$ 、 $\Omega_n/4$ 附近, B3 齿轮的振动幅值与其他齿轮的幅值的差异比较小, 并没有明显的优势。

图 7 动态因子随转速变化的曲线

图 8 设计转速下的动态因子

3 结论

(1) 基于齿轮精确几何模型, 给出不同修形量和修形长度的齿轮啮合刚度和静态传递误差计算方法。

(2) 将真实的齿轮啮合刚度及静态传递误差引入到含有间隙的齿轮非线性动力学模型中, 在动力学范畴内分析研究了不同修形对齿轮副振动及动态因子的影响规律。

(3) 对本文所给工况, 过小的修形并不能达到改善系统性能的目的, 但是过量的修形可以降低啮合刚度, 反而使系统的振动及动态因子显著增大。

(4) 宽转速范围内的齿轮副动力学分析, 对理解修形齿轮的动态性能并择优确定修形的长度及修形量具有重要的意义。

(5) 研究发现修形长度 $\alpha=22.7^\circ$ 、修形量 $\Delta=21 \mu\text{m}$ 的 B3 齿轮最好, 动态因子最小为 $D_{\max}=1.54$, 与未修形齿轮相比降低了 22.2%。

(a) H₁ (b) H₂ (c) H₃ (d) H₄

图 9 动态响应的前 4 次谐波分量幅值

参 考 文 献

- [1] MOHAMAD E N, FANG Suping, KOMORI M, et al. Analysis of general characteristics of transmission

- error of gears with convex modification of tooth flank form considering elastic deformation under load[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(6): 1-9.
- [2] MAATAR M, VELEX P. Quasi-static and dynamic analysis of narrow-faced helical gears with profile and lead modifications[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1997, 119(4): 474-480.
- [3] LIN H H, TOWNSEND D P, OSWALD F B. Profile modification to minimize spur gear dynamic loading[C]// 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, 5th, April 25-28, 1989, Chicago, Illinois, US. New York, US: NASA, 1989: 455-465.
- [4] WAGAJ P, KAHRAMAN A. Influence of tooth profile modification on helical gear durability[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2002, 124(3): 501-510.
- [5] HOTAIT M, KAHRAMAN A. Experiments on root stresses of helical gears with lead crown and misalignments[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2008, 130(7): 1-5.
- [6] LITVIN F L, LIAN Qiming, KAPELEVICH A L, et al. Asymmetric modified spur gear drives: reduction of noise, localization of contact, simulation of meshing and stress analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000, 188: 363-390.
- [7] DUZCUKOGLU H. PA 66 spur gear durability improvement with tooth width modification[J]. *Materials and Design*, 2009, 30(4): 1060-1067.
- [8] KARPAT F, EKWARO-OSIRE S. Influence of tip relief modification on the wear of spur gears with asymmetric teeth[J]. *Tribology Transactions*, 2008, 51(5): 581-588.
- [9] DUZCUKOGLU H, IMREK H. A new method for preventing premature pitting formation on spur gears[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, 75(15): 4431-4438.
- [10] 耿坎. 提高重载齿轮传动的可靠性[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.
- GENG Kan. Research on improving the reliability of heavy load gear train[M]. Beijing: China Machine Press, 1986.
- [11] LIU J H, CHANG S L. Research on gear plunge shaving for gears with tooth modifications[C/CD]// Proceedings of the International Multi Conference of Engineers and Computer Scientists, March 18-20, 2009, Hong Kong.
- [12] LIN H H, OSWALD F B, TOWNSEND D P. Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(8): 1115-1129.
- [13] UMEZAWA K. The performance diagrams for the vibration of helical gears [C]// 1989 International Power Transmission and Gearing Conference, 5th, April 25-28, 1989, Chicago, Illinois, US. New York, US: NASA, 1989: 399-408.
- [14] CAI Y, HAYASHI T. The optimum modification of tooth profile for a pair of spur gears to make its rotational vibration equal zero[C]//ASME Proceedings of Power Transmission and Gearing Conference, 1992: 453-460.
- [15] ZHANG Y, FANG Z. Analysis of transmission errors under load of helical gears with modified tooth surfaces[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1997, 119(1): 120-126.
- [16] LITVIN F, FUENTES A. Gear geometry and applied theory[M]. London: Cambridge University Press, 2004.
- [17] KAHRAMAN A, BAJPAI P, ANDERSON N E. Influence of tooth profile deviations on helical gear wear[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2005, 127(4): 656-663.
- [18] 张永忠. 关于修形齿轮的计算方法[J]. *煤矿机械*, 1984(2): 2-6.
- ZHANG Yongzhong. The computing method of profile modifying gear[J]. *Coal Mine Machinery*, 1984(2): 2-6.
- [19] 王朝晋, 丁玉成. 关于齿廓修形的研究(二) [J]. *齿轮*, 1986, 10(3): 8-11.
- WANG Chaojin, DING Yucheng. The research on gear with modification (II)[J]. *Gear*, 1986, 10(3): 8-11.
- [20] 肖利民, 唐进元. 低噪声齿轮设计方法(三)[J]. *制造技术与机床*, 1995(7): 27-30.
- XIAO Limin, TANG Jinyuan. The design method of low noise gear(III)[J]. *Manufacturing Technology and Machine Tool*, 1995(7): 27-30.
- [21] 肖利民, 唐进元. 低噪声齿轮设计方法(一)[J]. *制造技术与机床*, 1995(1): 30-33.
- XIAO Limin, TANG Jinyuan. The design method of low noise gear(I)[J]. *Manufacturing Technology and Machine Tool*, 1995(1): 30-33.
- [22] 肖利民, 唐进元. 低噪声齿轮设计方法(二)[J]. *制造技术与机床*, 1995(6): 30-32.
- XIAO Limin, TANG Jinyuan. The design method of low noise gear(II)[J]. *Manufacturing Technology and Machine Tool*, 1995(6): 30-32.
- [23] 姚文席, 魏任之. 渐开线直齿轮的啮合冲击研究[J]. *振*

- 动与冲击, 1990, 9(4): 57-61.
- YAO Wenxi, WEI Renzhi. The study of mesh impact in the transmission of involute spur gear[J]. Journal of Vibration and Shock, 1990, 9(4): 57-61.
- [24] 方宗德, 张永才, 蔺天存. 斜齿轮的齿廓修形的实验研究[J]. 机械传动, 1992, 16(4): 27-30.
- FANG Zongde, ZHANG Yongcai, LIN Tiancun. Experimental investigation on the transmission of helical gear with profile modification[J]. Journal of Mechanical Transmission, 1992, 16(4): 27-30.
- [25] 姚文席, 魏任之. 渐开线直齿轮的啮合冲击响应[J]. 振动测试与诊断, 1992(4): 27-30.
- YAO Wenxi, WEI Renzhi. The study of mesh impact response in the transmission of involute spur gear[J]. Journal of Vibration Measurement and Diagnosis, 1992(4): 27-30.
- [26] 唐进元, 肖利民. 齿轮齿顶修缘时啮合冲击速度的计算[J]. 长沙铁道学院学报, 1995, 13(1): 26-30.
- TANG Jinyuan, XIAO Limin. The engagement shock velocity calculation of gear top modification[J]. Journal of Changsha Rail Way University, 1995, 13(1): 26-30.
- [27] 唐进元, 金培, 肖利民. 基于啮合冲击的修缘齿轮设计[J]. 工程设计, 1998(1): 38-40.
- TANG Jinyuan, JIN Pei, XIAO Limin. Gear tip relief design based on engagement shock[J]. Chinese Journal of Engineering Design, 1998(1): 38-40.
- [28] 唐进元, 刘希玲, 肖利民. 齿轮根部沉切尖点啮合冲击速度分析[J]. 机械设计, 1998(4): 25-26.
- TANG Jinyuan, LIU Xiling, XIAO Limin. The analysis of engaging shock velocity at the under-cut tip point of gear root[J]. Journal of Machine Design, 1998(4): 25-26.
- [29] 姚文席. 修形渐开线直齿轮的啮合冲击研究[J]. 北京机械工业学院学报, 2000, 15(2): 1-4.
- YAO Wenxi. The study of mesh impact in the transmission of modified spur gear[J]. Journal of Beijing Institute of Machinery, 2000, 15(2): 1-4.
- [30] LIU G R, QUEK S S. Finite element method: A practical course[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.
- [31] VELEX P, AJMI M. On the modeling of excitations in geared systems by transmission errors[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 290(3): 882-909.
- [32] 陈思雨, 唐进元. 间隙对含摩擦和时变刚度的齿轮系统动力学响应的影响[J]. 机械工程学报, 2009, 45(8): 119-124.
- CHEN Siyu, TANG Jinyuan. Effect of backlash on dynamics of spur gear pair system with friction and time-varying stiffness[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(8): 119-124.

作者简介: 陈思雨 (通信作者), 男, 1981 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为齿轮动力学。

E-mail: chsy1324@csu.edu.cn