DOI: 10.3901/JME.2014.16.006

基于广义 Rackwitz-Fiessler 方法的广义 一次可靠度方法*

周生通^{1,2} 李鸿光^{1,2}

(1. 上海交通大学振动、冲击、噪声研究所 上海 200240;
2. 上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室 上海 200240)

摘要: 传统 Rackwitz-Fiessler 方法是隐含 Gaussian copula 假设的, 而传统一次可靠度方法要求在独立标准正态空间中计算。为此, 基于椭圆 copula 族给出广义的 Rackwitz-Fiessler(R-F)方法。广义 R-F 方法可实现随机矢量由物理随机空间至标准球空间的变换。为使一次可靠度方法适合于在标准球空间中计算, 将一次可靠度指标在独立标准正态空间中的几何意义推广至标准球空间, 即所谓的广义一次可靠度方法。算例表明: 广义方法相对于传统方法具有更广的适用性; 在条件充足的情况下, 可得到更符合真实情况的失效概率。

关键词: 广义 Rackwitz-Fiessler 方法; Gaussian copula 假设; 椭圆 copula 假设; 广义一次可靠度方法

中图分类号: TU318; TB114

Generalized FORM Based on the Generalized Rackwitz-Fiessler Method

ZHOU Shengtong^{1,2} LI Hongguang^{1,2}

(1. Institute of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240;
2. State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240)

Abstract: Gaussian copula hypothesis is used for the traditional Rackwitz-Fiessler method; Meanwhile, the traditional reliability calculations in first order reliability methods(FORM) always have to be conducted in independent standard normal space. So the generalized Rackwitz-Fiessler method is presented based on the elliptical copula family. This generalized Rackwitz-Fiessler method can accomplish the transformation of random vector from physical random space to the standard spherical space. In order to make the FORM be suitable to this new standard spherical space, the geometrical interpretation of reliability index in independent standard normal space is extended to standard spherical space. Examples show that the generalized method is more applicable than traditional method, and the calculated failure probability is also closer to the real case under the sufficient dependence information.

Key words: generalized Rackwitz-Fiessler method; Gaussian copula hypothesis; elliptical copula hypothesis; generalized first order reliability method

0 前言

复杂机械结构的可靠度估算是一项很有挑战性的任务, 尤其是对具有高可靠性的航空、航天产品。一般来说, 机械结构失效模式在数学上是以极限状态函数 $G(\mathbf{X}): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 的形式表征, 其中, $\mathbf{X}$ 为随机因素组成的矢量且当 $G(\mathbf{X}) \leq 0$ 时结构失效。

之后, 机械结构可靠性分析的主要任务就是求解失效概率 $P_f = P(G(\mathbf{X}) \leq 0)$ 。在很多时候, 这个求解任务是非常困难的, 原因如下: ① 高可靠性产品的失效概率 P_f 非常小; ② 极限状态函数 $G(\mathbf{X})$ 的计算量往往比较高; ③ 随机矢量 $\mathbf{X}$ 的完全概率信息缺乏且不易获取。前两者使得一些精确求解方法, 如积分法、Monte Carlo 方法等, 在实际应用中变得有气无力^[1-3]。而在工程中, 随机矢量 $\mathbf{X}$ 的概率信息也多局限在已知边缘分布函数和变量间的线性相关系数, 且多是根据有限的样本数据或专家经验得到。

* 国家高技术研究发展计划资助项目(863 计划, 2012AA040106)。
20140116 收到初稿, 20140620 收到修改稿

由于边缘分布函数和线性相关系数矩阵并不能唯一确定矢量 $\mathbf{X}$ 的联合概率分布函数, 这样, 当使用具体的可靠度算法估算结构失效概率时, 也就不可避免地对其未知的依赖信息做出了假设。Nataf 变换就是这一方面比较好的例子, 它已在文献[4-6]中被详细地剖析。相比于已知的部分相关信息, 这些假设多是隐含的, 也往往被非专业设计人员忽略。事实上, 随机因素间的依赖关系是非常重要的, 对依赖关系的不恰当假设即使在可靠度求解方法上采用了精确方案也往往会使得结构失效概率的估算严重地偏离真实失效概率^[7]。因而, 将这些可靠度算法中的隐含假设呈现出来并进行改进和广义化在工程实际中是非常有意义的。

目前, 基于 Rackwitz-Fiessler 方法(亦即当量正态化方法)的一次可靠度算法在工程中应用比较广泛, 也已经作为标准或规范指导结构的可靠性设计^[8]。然而, 传统的一次可靠度方法是通过在标准独立正态空间下得到失效面上距离空间原点最近的点, 即设计点, 进而求得结构的一次可靠度指标和一次近似失效概率的。在另一方面, 按照传统 Rackwitz-Fiessler 方法将实际物理空间中的随机变量变换到独立标准正态空间中实际上隐含了 Gaussian copula 假设。这一隐含的假设最终可能导致计算的一次失效概率严重偏离实际的失效概率。

为了能够克服以往方法中单一的 Gaussian copula 假设, 文中将从 copula 理论出发, 给出一种基于椭圆 copula 族的广义 Rackwitz-Fiessler 方法, 并基于广义 Rackwitz-Fiessler 方法进一步扩展得到广义的一次可靠度方法。

1 方法原理

1.1 传统方法及其隐含的假设

传统的 Rackwitz-Fiessler 方法(简写 R-F 方法)是由 RACKWITZ 和 FIESSLER 在 1978 年提出的, 用于将非正态的随机变量等效为正态随机变量, 亦即所谓的“当量正态化方法”^[1]。将 Rackwitz-Fiessler 方法同一次可靠度迭代算法结合, 即实现可处理任意随机变量的一次可靠度方法^[2], 本文将其称为传统一次可靠度方法。

在文献[9-10]中, 已经指出传统 R-F 方法的相关性变化可以用 der KIUREGHIAN 等^[11]提出的线性相关系数计算公式得到, 即

$$r_{ij}^X = \frac{1}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(F_{X_i}^{-1}(\Phi(y_i)) - \mu_{x_i} \right) \times \left(F_{X_j}^{-1}(\Phi(y_j)) - \mu_{x_j} \right) \times \varphi_2(y_i, y_j, r_{ij}^0) \right] dy_i dy_j \quad (1)$$

式中 r_{ij}^X ——变量 X_i 和 X_j 间的线性相关系数, 而所有变量间的线性相关系数组成矩阵 $\mathbf{R}^X$;

$F_{X_i}(\cdot)$ —— X_i 的累计分布函数(Cumulative distribution function, CDF);

$f_{X_i}(\cdot)$ —— X_i 的概率密度函数(Probability density function, PDF);

μ_{X_i} —— X_i 的均值;

σ_{X_i} —— X_i 的标准差;

$\Phi(\cdot)$ ——标准正态分布的 CDF;

$\varphi_2(\cdot)$ ——二维标准正态矢量的联合概率密度函数;

r_{ij}^0 ——待求的变量 Y_i 和 Y_j 间的线性相关系数, 且所有的元素组成矩阵 $\mathbf{R}_0$ 。

事实上, 正如文献[9-10]指出的那样, R-F 方法在将实际随机变量由物理 X 空间变换到标准正态 Y 空间过程中是符合等概率变换准则的, 换句话说, 变量 X_i 与变量 Y_i 间的函数关系在正变换中是呈严格单调递增关系的。而另一方面, 变换得到的随机矢量 $\mathbf{Y}$ 在标准正态 Y 空间中是被完全当作多维的标准正态随机矢量来使用的。因而, 综合上述两个方面, 并按照严格递增变换时随机矢量的依赖结构, 即 copula, 仍保持不变的性质^[4, 12], 可以推知传统 R-F 方法实际上是隐含有 Gaussian copula 假设的。这样一隐含假设, 对某些可靠度计算问题可能会造成严重的误差, 因为随机矢量的真实 copula 性质可能与 Gaussian copula 性质相差甚远。例如具有 Gumbel copula 依赖结构的随机可靠度问题, 由于随机变量间具有上尾部依赖性, 而传统的方法中的 Gaussian copula 假设又无法考虑这一性质, 就会在小失效概率问题的计算中发生结果严重偏离实际失效概率的情况。

如果能够根据已知的变量依赖信息, 进一步选用合适的 copula 假设, 而不是仅局限于 Gaussian copula 假设就有可能改善传统方法的缺陷。这也就是下面实现传统 Rackwitz-Fiessler 方法和一次可靠度方法广义化的初衷。椭圆分布族可看成 Gaussian copula 族扩展 Rackwitz-Fiessler 方法和一次可靠度方法是非常自然而合理的。

1.2 广义 Rackwitz-Fiessler 方法

广义 Rackwitz-Fiessler 方法同样分为如下两步。

(1) 依据广义 Rackwitz-Fiessler 条件(简写 R-F 条件)实现随机矢量 $\mathbf{X}$ 从随机物理 x 空间到椭圆 z 空间的变换, 记为 T_1^{GRF} , 即得到多维椭圆随机矢量 $\mathbf{Z}$ 。

(2) 根据椭圆分布的放射变换性质实现随机矢量 $\mathbf{Z}$ 到多维标准球 u 空间的变换, 记为 T_2^{GRF} , 即得到多维标准球随机矢量 $\mathbf{U}$ 。

同传统 R-F 条件的等效原理类似, 广义的 R-F 条件将任意类型的随机变量 X_i 在设计点处等效成一个服从椭圆分布的随机变量 Z_i , 即两个随机变量的累计分布函数和概率密度函数满足在设计点处分别相等的条件

$$F_{X_i}(x_i^*) = E_{\mu_{Z_i}, \sigma_{Z_i}, \psi}(z_i^*) = E_{0,1,\psi}\left(\frac{z_i^* - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}}\right) \quad (2)$$

$$f_{X_i}(x_i^*) = \mathcal{E}_{\mu_{Z_i}, \sigma_{Z_i}, \psi}(z_i^*) = \frac{1}{\sigma_{Z_i}} \mathcal{E}_{0,1,\psi}\left(\frac{z_i^* - \mu_{Z_i}}{\sigma_{Z_i}}\right) \quad (3)$$

式中 $E_{\mu_{Z_i}, \sigma_{Z_i}, \psi}(\cdot)$ ——等效椭圆随机变量 Z_i 的 CDF;

$\mathcal{E}_{\mu_{Z_i}, \sigma_{Z_i}, \psi}(\cdot)$ ——等效椭圆随机变量 Z_i 的 PDF;

μ_{Z_i} ——等效椭圆随机变量 Z_i 的位置参数;

σ_{Z_i} ——等效椭圆随机变量 Z_i 的尺度参数;

ψ ——等效椭圆随机变量 Z_i 的特征函数;

$E_{0,1,\psi}(\cdot)$ ——标准椭圆分布的 CDF;

$\mathcal{E}_{0,1,\psi}(\cdot)$ ——标准椭圆分布 PDF。

这样, 根据式(2)、(3)即可得到等效椭圆随机变量 Z_i 的参数 μ_{Z_i} 和 σ_{Z_i}

$$\mu_{Z_i} = z_i^* - \sigma_{Z_i} E_{0,1,\psi}^{-1}(F_{X_i}(x_i^*)) \quad (4)$$

$$\sigma_{Z_i} = \frac{E_{0,1,\psi}^{-1}(F_{X_i}(x_i^*))}{f_{X_i}(x_i^*)} \quad (5)$$

由于变量等效运算在每一个迭代步都存在, 因而在实际使用时公式中的设计点 x_i^* 应由迭代设计点 $x_i^{*(k)}$ 替代。所有等效椭圆随机变量 Z_i 即组成了一组服从椭圆分布的多维随机矢量 $\mathbf{Z}$ 。

在广义 R-F 条件的基础上, 进一步进行仿射变换, 即可将随机物理 x 空间变换为标准球 U 空间。

不过, 仿射变换可以分解为两个连续的变换分别实现由 Z 空间到标准椭圆 Y 空间的变换, 记为 T_{2-1}^{GRF} ; 和由 Y 空间到标准球 U 空间的变换, 记为 T_{2-2}^{GRF} 。总结广义 R-F 方法的变换过程, 其正变换公式为

$$T_1^{GRF}: \text{supp}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) \rightarrow \mathbf{R}^n$$

即由 x 空间到 z 空间

$$\mathbf{x}^{(k)} \mapsto \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} \sim E_{\mu_Z^{(k)}, \sigma_Z^{(k)}, \mathbf{R}_0, \psi} \quad (6)$$

$T_{2-1}^{GRF}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 即由 Z 空间到 Y 空间

$$\mathbf{z}^{(k)} \mapsto \mathbf{y}^{(k)} = (\mathbf{D}^{(k)})^{-1}(\mathbf{z}^{(k)} - \mu_Z^{(k)}) \sim E_{0,1,\mathbf{R}_0, \psi} \quad (7)$$

$T_{2-2}^{GRF}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 即由 Y 空间到 U 空间

$$\mathbf{y}^{(k)} \mapsto \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{y}^{(k)} \sim S_\psi \quad (8)$$

广义 R-F 方法的逆变换公式为

$$T_{2-2}^{-1GRF}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

即由 U 空间到 Y 空间

$$\mathbf{u}^{(k+1)} \mapsto \mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{u}^{(k+1)} \sim E_{0,1,\mathbf{R}_0, \psi} \quad (9)$$

$T_{2-1}^{-1GRF}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 即由 Y 空间到 Z 空间

$$\mathbf{y}^{(k+1)} \mapsto \mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{(k)} \mathbf{y}^{(k+1)} + \mu_Z^{(k)} \sim E_{\mu_Z^{(k)}, \sigma_Z^{(k)}, \mathbf{R}_0, \psi} \quad (10)$$

$T_{1*}^{-1GRF}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 即由 Z 空间到 X 空间

$$\mathbf{z}^{(k+1)} \mapsto \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} \sim E_{\mu_Z^{(k)}, \sigma_Z^{(k)}, \mathbf{R}_0, \psi} \quad (11)$$

式中 $\text{supp}(\cdot)$ ——随机变量的区间范围;

$\mathbf{D}$ ——以随机矢量 $\mathbf{Z}$ 中各变量的尺度参数为对角元素的矩阵;

$\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_{Z_i})$

$\mathbf{R}_0$ ——随机矢量在 Z 空间和 Y 空间中的线性相关系数矩阵, 是对称正定的;

$\mathbf{L}$ ——矩阵 $\mathbf{R}_0$ 的 Cholesky 分解得到的下三角矩阵, 即 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$, 而

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{L}^{-1}.$$

广义方法中, $\mathbf{R}_0$ 的求解仍然采用式(1), 但是由于 copula 假设已经转变为椭圆 copula 族, 因而相应公式也需要重写为

$$r_{ij}^X = \frac{1}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \iint_{[0,1]^2} (F_{X_i}^{-1}(u_i) - \mu_{X_i}) \times (F_{X_j}^{-1}(u_j) - \mu_{X_j}) dC_{ij}(u_i, u_j, r_{ij}^0) \quad (12)$$

式中 $C_{ij}(u_i, u_j, r_{ij}^0)$ ——变量 X_i 和 X_j 的 copula 依赖结构函数;

r_{ij}^0 ——待求参数, 并以 copula 参数的形式存在于具体选取的椭圆 copula 中。

另外, 式(12)也是根据线性相关系数 r_{ij}^X 求解任意 copula 类型的 copula 参数 θ 的公式。

1.3 广义一次可靠度方法

经过广义 R-F 方法后, 随机矢量 $\mathbf{X}$ 由实际物理 X 空间变换至标准球 U 空间。在标准球 U 空间中, 若选用的椭圆 copula 是 Gaussian copula, 那么此时的 U 空间和传统一次可靠度方法中的独立标准空间是一致的。若是其他类型的椭圆 copula, 如 Student t copula, 则得到的 U 空间就不再相同, 但此时的 U 空间仍然是球形的。为了与广义 R-F 方法相适应, 传统的一次可靠度方法也需要进行广义化, 使之适合 U 空间。故将 Hasofer 和 Lind 对设计点在独立标准正态空间中的几何解释进行广义化, 即: 在标准球 U 空间中将失效面到 U 空间原点最近的距离作为可靠度指标, 并将之称之为广义可靠度指标

$$\beta_G = \text{sgn}(\alpha^T \mathbf{u}^*) \|\mathbf{u}^*\| \quad (13)$$

式中 $\mathbf{u}^*$ ——设计点;

α ——极限状态函数 $G_U(\mathbf{u})$ 在设计点 $\mathbf{u}^*$ 处的负梯度方向;

$\text{sgn}(\cdot)$ ——符号函数。

然后式(3)的得到可靠度概率 P_s 或失效概率

$$P_s = 1 - P_f = E_{0,1,\psi}(\beta_{GHL}) \quad (14)$$

基于上述过程估计可靠度的方法本文称为广义一次可靠度方法。表 1 给出了一些常见的二维 copula 函数^[4]。其中, $T_v(x)$ 为标准的 Student t 分布; 而 Gaussian 和 Student t copula 均属于椭圆 copula 族。

表 1 常见的二维 Copula 类型

Copula 类型	$C_{12}(u_1, u_2, \theta)$ 函数
独立情况	$u_1 u_2$
Gaussian	$\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) ds dt$
Student t	$\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{-(v+2)/2} ds dt$
Gumbel	$\exp\left(-\left((-\log_2(u_1))^\theta + (-\log_2(u_2))^\theta\right)^{1/\theta}\right)$

2 算例验证

某机械结构失效模式的极限状态函数

$$G(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + \sqrt{2}d$$

式中, 变量 $d \in [0, \infty)$ 控制 X 空间原点到直线 $G(x_1, x_2) = 0$ 的距离, 亦即控制着结构失效概率的大小; 随机变量 x_1 和 x_2 服从标准正态分布且真实依赖结构服从 Gumbel copula。图 1 给出了该极限状态函数失效面在 x 空间的形状。

图 1 极限状态函数的失效面在 x 空间中形状

取两种情况进行研究: ① 根据统计数据或专家经验估计出 x_1 和 x_2 间的线性相关系数 $r_p = 0$; ② 根据统计数据或专家经验估计出 x_1 和 x_2 间的线性相关系数 $r_p = 0.5233$ 。同时计算两种失效概率结果: 一种是采用积分方法求得的精确失效概率, 简称积分失效概率; 另一种是基于传统和广义一次可靠度方法求解的一次可靠度指标和一次近似失效概率, 简称一次失效概率。

2.1 情形 1, 独立情况

在情况 1 下, x_1 和 x_2 的线性相关系数 $r_p = 0$ 。

由于 x_1 和 x_2 都是标准正态随机变量且真实依赖结构为 Gumbel copula, 那么根据式(12)可求出此时 Gumbel copula 的参数 $\theta = 1$ 。而 Gumbel copula 在 $\theta = 1$ 时代表相互独立, 故在情况 1 下, x_1 和 x_2 是一对相互独立的随机变量。

当采用传统方法时, 由于 x_1 和 x_2 的依赖结构被假设为 Gaussian copula, 故根据式(12)可求得其 copula 参数 $\rho = 0$ 。同样 Gaussian copula 在 $\rho = 0$ 时代表相互独立, 因而可以预计: 在情形 1 下, 以 Gaussian copula 为假设的方法得到的结果应该与真实的 Gumbel copula 结果一致。这一点可以从图 2 和表 2 中的积分失效概率结果得以验证。

当采用广义方法时, x_1 和 x_2 的依赖结构是以椭圆 copula 族假设为基础的, 需要选用一个合适的椭圆 copula 进行计算。如果选取 Gaussian copula, 则广义方法就退化为传统方法。这里根据 Gumbel copula 具有上尾部依赖性的特点, 本文采用椭圆 copula 族中同样具有上尾部依赖性性质的 Student t copula 进行计算, 并分别取自由度为 3 和自由度为 10 的两种情况, 并标记为 Student t 3 和 Student t 10。同样, 根据式(12)可求得 Student t 3 和 Student t 10 的参数 ρ 分别为 -2.279×10^{-8} 和 -7.916×10^{-9} 。可见, 两个值都非常接近零, 但 $\rho = 0$ 对于 Student t copula 并不意味着独立。

在得到 copula 参数后,即可对情形 1 的可靠性经过进行分析。图 2 给出了在参数 d 变化时不同 copula 假设计算的积分失效概率的变化情况。显然, Gaussian copula 结果和真实的 Gumbel copula 结果此时是完全一致的,得到的两条积分失效概率曲线也完全重合;而 Student t copula 的结果在参数 d 超过 2 之后就逐渐偏离真实 Gumbel copula 的结果,误差逐渐增大,尤其是在小失效概率(d 较大)情况下,结果呈现数量级的差别。表 2 给出的是在 $d=6$ 时,各 copula 下计算的积分失效概率和一次失效概率。从数据上看,以 Student t copula 假设得到的积分失效概率与真实的 Gumbel copula 结果相差了约三四个数量级,而 Gaussian copula 下的结果则与真实失效概率一致,都为 $9.851\ 5\times 10^{-10}$ 。一次可靠度结果是分别采用传统方法和广义方法得到。由于标准球空间的不同,一次可靠度指标的结果相差比较大也不具有比较性,但得到的一次失效概率却与积分失效概率的规律一致且数值上比较接近,这说明广义方法是有效的、可信性的。另外,从图 3b 和图 3c 中可以看到,在 y 空间中,失效域都是凸向安全域的。而 Student t copula 在情形 1 时的 copula 参数

接近零,这样在标准球 U 空间中失效域同样凸向安全域,因而表 2 中广义方法得到的一次失效概率大于积分失效概率是合理的。图 3a 中以 Gaussian copula 为假设得到的 Y 空间的极限状态失效面仍然为直线且与 X 空间保持一致,不难推得其一次失效概率理论上应与精确解一致,但由于迭代误差等原因,表 2 中两者结果是略有差异的。

图 2 $r_p=0$ 时,不同 copula 下计算的积分失效概率随参数 d 的变化情况

表 2 在 $r_p=0$ 情况下,当 $d=6$ 时不同计算方法得到的可靠性结果

方法	copula 类型	copula 参数	积分的失效概率	一次失效概率	一次可靠度指标	设计点 u^*
—	Gumbel	$\theta=1$	$9.851\ 5\times 10^{-10}$	—	—	—
传统方法	Gaussian	$\rho=0$	$9.851\ 5\times 10^{-10}$	$9.865\ 9\times 10^{-10}$	6	(4.242 64, 4.242 64)
广义方法	Student t 3	$\rho\approx 0$	$2.484\ 9\times 10^{-6}$	$3.908\ 4\times 10^{-6}$	65.568 4	(46.36 38, 46.36 38)
	Student t 10	$\rho\approx 0$	$3.321\ 3\times 10^{-7}$	$4.973\ 7\times 10^{-7}$	10.522 5	(7.440 53, 7.440 53)

(a) Gaussian copula 假设

(b) Student t 3 copula 假设

(c) Student t 10 copula 假设

图 3 三种 copula 假设下极限状态函数的失效面在 y 空间中的形状

2.2 情形 2, 相关情况

情形 2 与情形 1 的不同在于其线性相关系数不为零。同样根据式(12),可分别得到 Gumbel、

Gaussian、Student t 3 和 Student t 10 的 copula 参数,如表 3 所示。

表 3 在 $r_p=0.523\ 3$ 情况下,当 $d=6$ 时不同计算方法得到的可靠性结果

方法	copula 类型	copula 参数	积分的失效概率	一次失效概率	一次可靠度指标	设计点 u^*
—	Gumbel	$\theta=1.540\ 0$	$7.676\ 8\times 10^{-6}$	—	—	—
传统方法	Gaussian	$\rho=0.523\ 3$	$5.828\ 1\times 10^{-7}$	$5.828\ 9\times 10^{-7}$	4.861 4	(4.242 64, 2.373 37)
广义方法	Student t 3	$\rho=0.536\ 8$	$6.152\ 7\times 10^{-6}$	$7.442\ 6\times 10^{-6}$	52.891 5	(46.36 38, 25.45 39)
	Student t 10	$\rho=0.524\ 7$	$2.856\ 8\times 10^{-6}$	$3.371\ 4\times 10^{-6}$	8.521 7	(7.440 53, 4.154 28)

图 4 和图 5 分别给出了情形 2 时不同 copula 下计算的积分失效概率和相对误差随参数 d 的变化情况。可见, 在情形 2 时以 Student t 3 copula 为假设的结果与精确解最为接近, 而 Gaussian copula 假设的结果与精确解相差就比较大, 尤其是在小失效概率情形下。如表 3 所示, 在 $d=6$ 时 Gaussian copula 的积分失效概率与精确结果相差约有一个数量级, 而 Student t copula 假设的结果就比较接近精确解。同样, 以传统和广义一次可靠度方法得到的一次失效概率结果与积分失效概率结果类似, 反映出了广义方法的有效性和可信性。另外, 以 Student t copula 为假设得到的一次失效概率同样是大于积分失效概率, 这说明在情形 2 时 u 空间中的失效域也是凸向安全域的。不过在参数 $d < 2$ 时, 由于失效概率比较大, 各结果误差相差并不显著, 这也说明依赖结构对小概率问题影响是较大的。

图 4 $r_p = 0.5233$ 时, 不同 copula 下计算的积分失效概率参数 d 的变化情况

图 5 在 $r_p = 0.5233$ 情况下, 不同 copula 假设得到的积分失效概率与真实解的相对误差

总结本算例中的情形 1 和情形 2 可知, 在独立情况下, 传统的方法是能够准确地预计失效概率的;

但是对于存在相关性的情况时, 单一的 Gaussian copula 假设就有可能丢失一些重要的依赖信息, 导致计算的失效概率严重偏离真实概率; 而广义的方法则可突破限制, 能基于有限的依赖信息选取合适的椭圆 copula 去近似模拟真实的 copula, 使得计算结果与实际相接近。在本算例中, 就是利用了真实 Gumbel copula 和椭圆 copula 族中的 Student t copula 均具有 upper tail dependence 性质的特点, 才使得广义方法的计算结果与真实结果比较接近。

3 结论

(1) 从原理上看, 广义方法采用了椭圆 copula 族用于扩展传统方法。克服了传统方法仅依赖单一 Gaussian copula 假设计算可靠度的可能存在的缺陷, 可以有效杜绝在依赖信息相对充足下仍造成计算结果严重偏离实际失效概率的问题。

(2) 广义方法的缺点在于它需要比传统方法更多的信息来判断和选取合适的椭圆 copula 类型。当然, 这也是任何一类广义方法普遍需要面对的问题。

参 考 文 献

- [1] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003.
GONG Jinxin. Computational methods for reliability of engineering structures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003.
- [2] 吕震宇, 宋述芳, 李洪双, 等. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
LÜ Zhenyu, SONG Shufang, LI Hongshuang, et al. Reliability of structures and mechanisms and their reliability sensitivity analysis[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [3] 秦权, 林道锦, 梅刚. 结构可靠度随机有限元——理论及工程应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
QIN Quan, LIN Daojin, MEI Gang. Theory and application reliability stochastic finite element method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.
- [4] LEBRUN R, DUTFOY A. An innovating analysis of the Nataf transformation from the copula viewpoint[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24(3): 312-320.
- [5] LEBRUN R, DUTFOY A. A generalization of the Nataf transformation to distributions with elliptical copula[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24(2):

- 172-178.
- [6] LEBRUN R, DUTFOY A. Do Rosenblatt and Nataf isoprobabilistic transformations really differ?[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24(4): 577-584.
- [7] DUTFOY A, LEBRUN R. Practical approach to dependence modelling using copulas[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability, 2009, 223(4): 347-361.
- [8] 中华人民共和国住房和城乡建设部, 国家质量监督检验检疫总局. GB50153-2008 工程结构可靠性设计统一标准[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2008.
- Ministry of Housing and Urban-Rural Development of the People's Republic of China, General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of the People's Republic of China. GB50153-2008 Unified standard for reliability design of engineering structures[S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2008.
- [9] 周生通, 李鸿光. 考虑相关性的 Rackwitz-Fiessler 随机空间变换方法[J]. 工程力学, 2014, 31(12): 1-10.
- ZHOU Shengtong, LI Hongguang. The Rackwitz-Fiessler random space transformation method with variable dependence[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(12): 1-10.
- [10] ZHOU Shengtong, ZHONG Zuoyang, LI Hongguang, et al. Comprehensive comparisons of random space transformation methods between Rackwitz-Fiessler and Nataf-Pearson in theory and algorithm[C]//Proceedings of ASME 2013 International Mechanical Engineering Congress & Exposition (IMECE2013), San Diego, California, USA: 2013: 1-10.
- [11] der KIUREGHIAN A, LIU P. Structural reliability under incomplete probability information[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1986, 112(1): 85-104.
- [12] NELSEN R B. An introduction to copulas[M]. Berlin: Springer, 2006.
-
- 作者简介: 周生通, 男, 1984 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机械动力学、转子动力学以及随机可靠性等。
E-mail: zhoushengtong@live.cn
- 李鸿光(通信作者), 男, 1972 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为动力学分析与控制、信号处理和故障诊断、可靠性和寿命评估技术等。
E-mail: hgli@sjtu.edu.cn