

DOI: 10.3901/JME.2015.02.084

金属橡胶非成形方向迟滞特性力学模型研究*

曹凤利 白鸿柏 李冬伟 路纯红 李国璋

(机械工程学院车辆与电气工程系 石家庄 050003)

摘要: 金属橡胶是一种各向异性材料,其非成形方向与成形方向的力学特性存在显著不同。依据金属橡胶非成形方向变形的主要特征,对金属丝螺旋卷的空间位形、接触模式进行分析,揭示金属橡胶非成形方向变形的细观物理机制。结合螺旋卷的弹性变形特征和金属橡胶内部摩擦力接触点分布规律,建立金属橡胶非成形方向的力学模型,实现不同预变形下金属橡胶加载和卸载过程迟滞力学特性的预测。该模型包含金属丝直径和弹性模量、螺旋卷直径、材料相对密度等基本材料结构参数,从理论上解释金属橡胶非成形方向的弹性特性和多点接触的干摩擦特性产生的机理。通过不同相对密度的金属橡胶试件对所建模型进行试验验证,发现理论计算和试验结果有较好的一致性,为分析和预测金属橡胶非成形方向的刚度和阻尼提供理论依据。

关键词: 金属橡胶; 力学模型; 曲梁; 阻尼材料

中图分类号: TG146

Research on Mechanical Model of Metal Rubber for Hysteresis Characteristic in the Non-forming Direction

CAO Fengli BAI Hongbai LI Dongwei LU Chunhong LI Guozhang

(Department of Vehicle and Electric Engineering, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003)

Abstract: Metal rubber is a kind of anisotropic material, and its mechanical properties in the non-forming direction are significantly different from those in the forming direction. According to the main deformation characteristic of metal rubber in the non-forming direction, the configuration and contact mode of wire helixes are analyzed to reveal the mesoscopic physical mechanism of its non-forming direction. Combined with the elastic deformation characteristic of wire helixes and the regularity of distribution of frictional contact points, a mechanical model of the non-forming direction of metal rubber is established, which can describe the hysteresis characteristic of its loading and unloading process under different pre-deformation. In the model the basic structural parameters of metal rubber are included which are the diameter and elastic modulus of wire, the diameter of wire helix, the relative density of material, and so on, so it is easy to explain the physical nature of the elastic characteristic and the damping characteristic of dry friction of multipoint contact of metal rubber in the non-forming direction. The experiments on metal rubber specimens with different relative densities are carried out to verify the theory model. The results show that the theoretic calculations are consistent with the experimental data. It provides the theoretical basis for studying and predicting the stiffness and damping of the non-forming direction of metal rubber.

Key words: metal rubber; mechanical model; curved beam; damping material

0 前言

随着现代工业的飞速发展,机械设备趋于高速、高效和自动化,由此引起的振动、噪声和疲劳断裂问题亦越来越突出,消除振动和噪声最有效的方法之一是采用阻尼材料^[1]。金属橡胶作为一种干摩擦阻尼材料,其内部结构是金属丝之间相互嵌入、

勾联而形成的类似于橡胶分子结构的网状结构,其工作机理是通过金属丝之间的相互作用而引起缓冲减振的作用。它具有阻尼大、吸收冲击能力强、耐高低温作用、不易老化等特点^[2-3]。这种材料在许多领域得到越来越广泛的应用,尤其是在尖端武器装备和航空航天领域中具有广泛的应用前景^[4]。

金属橡胶是一种各向异性材料,其成形方向与非成形方向的力学特性存在显著不同^[5]。但现有的关于金属橡胶力学特性的研究大都集中于金属橡胶的成形方向,例如,陈艳秋等^[6]提出用小曲梁的串

* 武器装备预先研究“十二五”计划资助项目(51312060404)。20140126收到初稿,20140708收到修改稿

并联来描述金属橡胶的总体刚度, 其中小曲梁是一端固支一端自由的半圆环, 然后由试验总结出本构关系; 李宇燕等^[7]以多孔材料理论为基础, 以干摩擦非线性理论为依据, 并结合小曲梁模型建立了金属橡胶的非线性本构关系; 朱彬等^[8]根据金属丝螺旋卷之间不同的接触状态, 以圆柱压缩螺旋弹簧理论为基础, 考虑金属橡胶加工工艺流程的特点, 建立了金属橡胶迟滞特性的本构模型; 曹凤利等^[9]提出了基于变长度悬臂曲梁的单匝螺旋卷细观结构单元, 并结合接触作用模型建立了金属橡胶的本构模型。这些模型较好地揭示了金属橡胶的变形特征, 在一定程度上实现了对金属橡胶成形方向力学特性的预测。然而在许多隔振器的实际结构中, 金属橡胶阻尼元件是工作在其成形方向垂直的非成形方向上, 比如金属橡胶阻尼环、承受径向载荷金属橡胶阻尼器中的金属橡胶元件等。在这些情况下, 金属橡胶元件在载荷作用下显现出来的弹性阻尼特性明显不同于成形方向, 因此有必要对金属橡胶非成形方向的力学特性进行进一步的研究。

本文在参考前期关于金属橡胶成形方向力学特性研究的基础上, 基于金属橡胶非成形方向变形的主要特征, 对金属橡胶基本结构单元螺旋卷的弹性变形进行分析, 结合金属橡胶内部摩擦力接触点分布规律, 建立了金属橡胶非成形方向的力学模型, 为金属橡胶非成形方向刚度和阻尼的预估提供了理论依据。

1 金属橡胶的压缩特性及变形机理

成形后的金属橡胶元件实物照如图 1 所示, 对其进行加载和卸载试验, 由此得到了金属橡胶不同方向的迟滞恢复力曲线, 如图 2 所示。可以看出金属橡胶非成形方向和成形方向的力学特性并不一致, 非成形方向的平均刚度明显大于成形方向, 说明金属橡胶是一种各向异性材料。

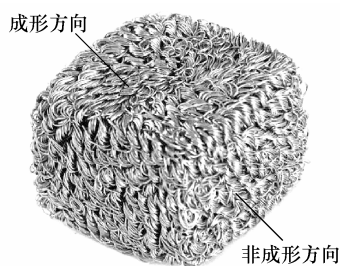


图 1 金属橡胶元件

金属橡胶的这一特性与其内部螺旋卷的空间分布状态和取向有关。金属橡胶成形后, 螺旋卷之

间的相对位置并不完全是随机的, 大部分螺旋卷的平面平行于压力成形方向的法面。当金属橡胶承受载荷时, 螺旋卷之间相互挤压并产生变形, 随着变形的增加, 螺旋卷之间的接触会发生相对滑动, 已发生滑动的接触点由于螺旋卷几何位置的改变及其他螺旋卷的限制约束, 螺旋卷在接触点处被分为多段曲梁, 这些曲梁相互交错、扣锁勾连在一起, 曲梁的弹性变形力以及曲梁间的相互作用力共同形成宏观上金属橡胶总的弹性阻尼特性。

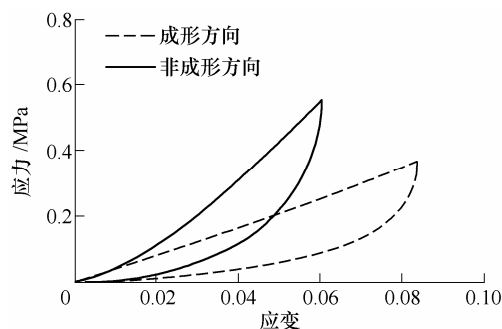


图 2 金属橡胶的迟滞恢复力曲线

在非成形方向, 曲梁主要在其自身平面内产生变形, 而不是成形方向曲梁的压缩变形, 由于在这个方向曲梁的刚度总体上大于成形方向, 从而使得金属橡胶非成形方向的平均刚度大于成形方向。对于金属橡胶成形方向的力学特性, 作者已在文献[9]中进行了详细分析, 为此本文主要对非成形方向的力学特性作进一步研究。

2 金属橡胶非成形方向细观变形模型

由于在实际条件下很难准确地确定金属橡胶内部的作用力, 有必要建立非成形方向细观结构的变形模型, 使其能在一定比例上准确模拟曲梁间的相互作用机制。为此, 结合金属橡胶压缩变形机理分析, 建立了非成形方向的细观变形模型。模型以单匝螺旋卷为金属橡胶细观基本结构单元, 将金属橡胶等效成被接触点分割的多段曲梁组成的单匝螺旋卷按一定的规则组合而成的复合体, 其承受压缩载荷变形的过程, 看成螺旋卷接触点数量逐渐增多曲梁长度逐渐变短的过程。在这一过程中, 曲梁长度变化主要改变材料的整体刚度, 而接触点数量主要改变材料的阻尼耗能, 两者共同作用形成了金属橡胶的力学特性。下面对这一细观变形模型进行理论建模。

2.1 曲梁的受力分析

在金属橡胶的非成形方向, 由于螺旋卷分布方向的不同, 使得每个曲梁接触作用力的方向也各不

相同, 其分布规律很难从统计学的角度给出合理解释。由于不同方向的接触作用力总可分解为平行于载荷方向和垂直于载荷方向的作用力, 由于垂直于载荷方向的作用力在材料变形过程中相互抵消, 可不予考虑; 而平行于载荷方向的作用力才是材料的主要变形力, 该力的大小取决于曲梁的刚度, 由于不同方向曲梁的刚度并不一致, 这为曲梁的受力分析带来了困难, 为此对其进行适当简化, 规定当曲梁作用力的方向与曲梁接触点的径向或切向的夹角小于 45° 时, 近似地认为该曲梁作用力方向的刚度即为曲梁的径向或切向刚度, 这样可将曲梁简化为承受径向载荷和切向载荷的两类。

取一段曲梁进行受力分析, 不考虑螺旋角的影响, 将曲梁简化为一段直径为 D 的圆弧, 在坐标系 $Oxyz$ 中建立曲梁受力模型, 如图 3 所示。曲梁位于 Oxy 平面内, 其中 c_1 点固定, c_2 点受到径向载荷 F_r 或切向载荷 F_t 的作用。

取垂直于曲梁的截面 c_3 , 当曲梁受到径向载荷 F_r 时截面的弯矩

$$M = F_r \overline{c_3 O_2} = \frac{1}{2} F_r D \sin \theta \quad (1)$$

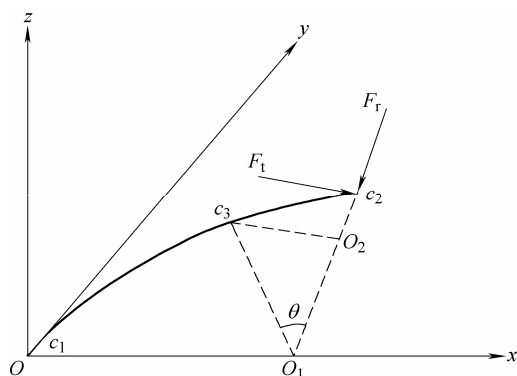


图 3 曲梁的受力模型图

由卡氏定理^[10]得到曲梁沿载荷方向的变形为

$$\Delta r = \int_0^l \frac{\partial M}{\partial F_r} \frac{M}{EI} ds \quad (2)$$

式中 $ds = Dd\theta/2$;

θ ——极角 ($0 < \theta < 2\pi$);
 E ——金属丝的弹性模量;
 I ——金属丝截面惯性矩;
 $I = \pi d^4/64$ 。

将各参数代入式(2), 积分得

$$\Delta r = \frac{2F_r D^3}{\pi E d^4} (2\theta - \sin 2\theta) \quad (3)$$

则曲梁的径向刚度为

$$k_r = \frac{\pi E d^4}{2D^3} (2\theta - \sin 2\theta)^{-1} \quad (4)$$

同理, 曲梁在 c_2 端受到切向载荷 F_t 时, 曲梁的切向刚度为

$$k_t = \frac{\pi E d^4}{2D^3} (6\theta - 8\sin \theta + \sin 2\theta)^{-1} \quad (5)$$

2.2 螺旋卷的等效刚度

考虑到螺旋卷受载变形的对称性, 近似地认为螺旋卷中两类曲梁的数量相同。若单匝螺旋卷包含的曲梁数为 β , 则由式(4)、(5)和曲梁的串并联关系确定单匝螺旋卷的等效刚度为

$$k_d = \frac{\beta}{8} (k_r + k_t) = \frac{\pi E d^4 \beta}{16D^3} \lambda(\theta) \quad (6)$$

$$\lambda(\theta) = (2\theta - \sin 2\theta)^{-1} + (6\theta - 8\sin \theta + \sin 2\theta)^{-1}$$

由于成形后金属橡胶曲梁的长度一般小于 0.8 圈^[11], 通过 Matlab 软件求解并拟合 $\lambda(\theta)$, 可将其近似表示为

$$\lambda(\theta) \approx a\theta^{-9/2} \quad (7)$$

式中 a ——与成形压力相关的比例系数。

当极角为 θ 时, 曲线梁的长度为

$$l = \frac{1}{2} D\theta \quad (8)$$

由式(8)确定单匝螺旋卷包含的曲梁数为

$$\beta = \frac{\pi D}{l} \quad (9)$$

将式(7)~(9)代入式(6)得

$$k_d = \frac{a\pi^2 E d^4 D^{5/2}}{362} l^{-11/2} \quad (10)$$

在变形过程中, 若曲梁的长度随着压缩应变 ε 的增大而减小, 且与 ε 呈线性关系^[12], 则 l 表示为

$$l = l_0 (1 - b\varepsilon) \quad (11)$$

式中 l_0 ——曲梁的原始长度;

b ——与应变 ε 相关的比例系数。

将式(11)代入式(10), 并令 $l_0 = \pi\eta D$ 得

$$k_d = \frac{aE d^4}{362\pi^{7/2}\eta^{11/2}D^3} (1 - b\varepsilon)^{-11/2} \quad (12)$$

式中 η ——比例常数 ($\eta > 0$)。

3 金属橡胶非成形方向的力学模型

3.1 金属橡胶非成形方向的弹性力

为评估金属橡胶非成形方向的力学特性, 在金属橡胶中取一代表性的单元体。假设在单位面积上有 n 个螺旋卷单元, 在单位长度上有 m 层螺旋卷单元, 每层上的螺旋卷单元相互关系为并联, 各层之间的螺旋卷单元为串联关系^[6], 在应变 ε 时金属橡胶的弹性力等效刚度为

$$k_e = \left(\frac{4\bar{\rho}_{MR}}{\pi^2 D d^2} \right)^{1/3} k_d \quad (13)$$

式中 $\bar{\rho}_{MR}$ ——金属橡胶的相对密度;

$$\bar{\rho}_{MR} = \rho_{MR} / \rho;$$

ρ_{MR} ——金属橡胶的密度;

ρ ——金属丝的密度。

由式(12)、(13)得

$$k_e = \delta E \left[\left(\frac{d}{D} \right)^{10} \bar{\rho}_{MR} \right]^{1/3} (1 - b\varepsilon)^{-11/2} \quad (14)$$

式中 δ ——比例系数;

$$\delta = 3.7 \times 10^{-5} a \eta^{-11/2}.$$

从而金属橡胶非成形方向的弹性应力和应变关系为

$$\frac{d\sigma_e}{d\varepsilon} = \delta E \left[\left(\frac{d}{D} \right)^{10} \bar{\rho}_{MR} \right]^{1/3} (1 - b\varepsilon)^{-11/2} \quad (15)$$

积分此表达式, 由条件 $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$ 确定积分常数, 并引入考虑螺旋卷分布状态的综合比例系数 A 、 B 确定金属橡胶非成形方向的弹性力为

$$\sigma_e = AE \left[\left(\frac{d}{D} \right)^{10} \bar{\rho}_{MR} \right]^{1/3} \left[(1 - B\varepsilon)^{-9/2} - 1 \right] \quad (16)$$

3.2 金属橡胶非成形方向的迟滞恢复力

金属橡胶非成形方向承受压缩载荷时典型的迟滞特性曲线如图 4 所示, 其中大迟滞回线 OBO 为最大位移时的加载卸载过程, 而图中小迟滞回线 CAC 为在大迟滞回线任意边界点进行的加载卸载过程。

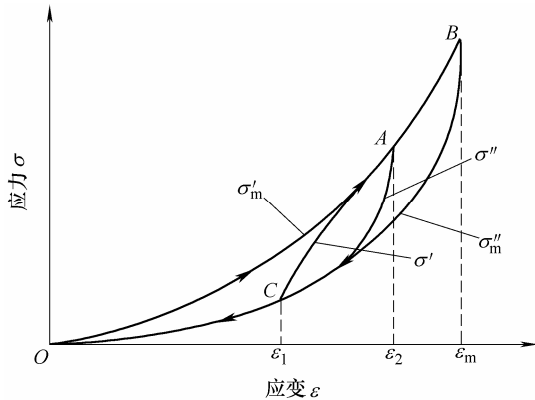


图 4 金属橡胶典型的迟滞特性曲线

对于金属橡胶的大迟滞回线, 文献[12]提出了一个简单的力学模型(图 4), 该模型将一个周期的迟滞恢复力曲线分解为非线性弹性部分和摩擦阻尼部分, 将大迟滞回线表示为

$$\begin{cases} \sigma'_m = \sigma_e + \sigma_f = \sigma_e(1 + \xi) \\ \sigma''_m = \sigma_e - \sigma_f = \sigma_e(1 - \xi) \end{cases} \quad (17)$$

式中 σ'_m ——加载曲线;

σ''_m ——卸载曲线;

σ_e ——非线性弹性力;

σ_f ——非线性摩擦阻尼力;

ξ ——比例常数, 与 σ_e 的乘积表示非线性摩擦阻尼力 σ_f 。

该模型是在金属橡胶接触点数量恒定, 摩擦力方向发生变化, 所有接触点同时产生反方向滑移的理想状态下对迟滞回线的近似描述, 不能反映金属橡胶加载到卸载过渡阶段的力学特性和摩擦力依赖于变形幅值变化的这一根本特征, 也不能对小迟滞回线进行合理描述和理论预测。

实际上, 在发生相对滑移时, 并不是所有的接触点之间都会发生相对滑移。敖宏瑞等^[13]认为存在摩擦力的接触点满足泊松分布, 即存在摩擦力的接触点数目 n_f 与弹性元件中所有接触点数目 n_w 之间的关系为

$$\frac{n_f}{n_w} = 1 - \exp(-\lambda\varepsilon) \quad (18)$$

式中 λ ——与接触点数量相关的比例系数。

为此, 结合摩擦点的分布规律, 由式(17)、(18)确定大迟滞回线的加载曲线为

$$\sigma'_m = \sigma_e \left[1 + \xi(1 - \exp(-\lambda\varepsilon)) \right] \quad (19)$$

根据文献[13], 将金属橡胶的循环加卸载过程看成可任意提高载荷阶段且接触点连续变化的过程, 这样卸载曲线和重复加载曲线均可在初始加载曲线(即大迟滞回线的加载曲线)的基础上获得, 据此确定图 4 中任意卸载点 $A(\varepsilon_2, \sigma_2)$ 和任意加载点 $C(\varepsilon_1, \sigma_1)$ 的卸载和加载过程的迟滞恢复力为

$$\begin{cases} \sigma'' = \sigma_e \left\{ 1 + \xi(1 - \exp(-\lambda\varepsilon_2)) - 2\xi[1 - \exp(-\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon))] \right\} \\ \sigma' = \sigma_e \left\{ 1 + \xi(1 - \exp(-\lambda\varepsilon_2)) - 2\xi[1 - \exp(-\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_1))] + 2\xi[1 - \exp(-\lambda(\varepsilon - \varepsilon_1))] \right\} \end{cases} \quad (20)$$

由式(16)、(20)得

$$\begin{cases} \sigma'' = AE \left[\left(\frac{d}{D} \right)^{10} \bar{\rho}_{MR} \right]^{1/3} \left[1 - \xi - \xi \exp(-\lambda\varepsilon_2) + 2\xi \exp(-\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon)) \right] \times \left[(1 - B\varepsilon)^{-9/2} - 1 \right] \\ \sigma' = AE \left[\left(\frac{d}{D} \right)^{10} \bar{\rho}_{MR} \right]^{1/3} \left[1 + \xi - \xi \exp(-\lambda\varepsilon_2) + 2\xi \exp(-\lambda(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)) - 2\xi \exp(-\lambda(\varepsilon - \varepsilon_1)) \right] \times \left[(1 - B\varepsilon)^{-9/2} - 1 \right] \end{cases} \quad (21)$$

式(21)即为金属橡胶非成形方向的迟滞特性力学模型,可反映金属丝径 d 、金属丝弹性模量 E 、螺旋卷直径 D 、材料相对密度 $\bar{\rho}_{MR}$ 等基本结构参数的影响。通过该模型可以确定金属橡胶非成形方向任意加载、卸载点的变形曲线,由此也就可以获得存在预变形时的金属橡胶的变形曲线。式中参数 A 、 B 、 ξ 、 λ 可通过最小二乘法拟合大迟滞回线的加载和卸载试验数据获得。

4 金属橡胶试验及模型验证

4.1 试验设备及试件

本试验采用济南天辰 WDW-T200 型电子万能试验机(图 5),适用于材料的拉伸、压缩及弯曲等力学特性试验,位移分辨率为 0.001 mm,最大载荷为 200 kN。试验采用等速位移控制模式对试件进行位移加载和卸载,速度均为 2 mm/min。

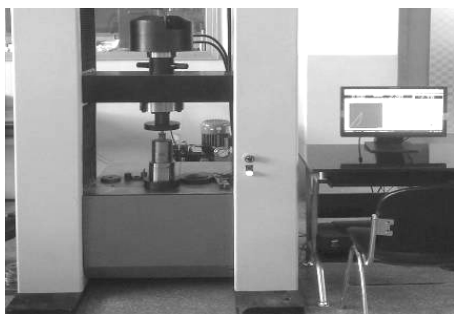
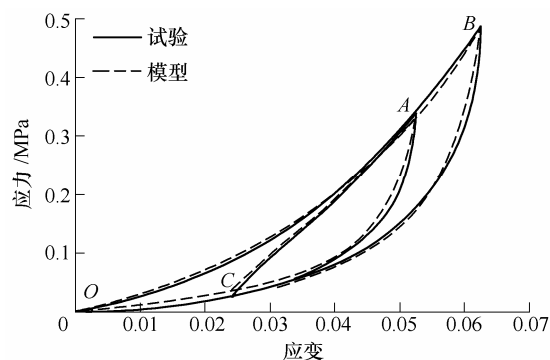


图 5 试验设备实物照片

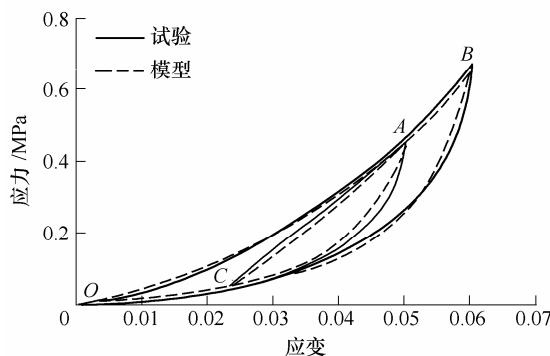
金属橡胶试件选用牌号为 0Cr18Ni9Ti 的奥氏体不锈钢丝,其丝径 $d=0.3$ mm,密度 $\rho=7.9$ g/cm³,弹性模量 $E=210$ GPa,螺旋卷直径 $D=3.2$ mm。试验共制备长方形试件 2 件,其相对密度 $\bar{\rho}_{MR}$ 分别为 0.24 和 0.29。

4.2 试验及验证

将已知的工艺参数代入式(19)、(21),结合试件非成形方向加载 OAB 段和卸载 BCO 段试验数据分别获得 4 个修正系数。图 6 给出金属橡胶试件本文模型拟合结果及理论预测结果与试验结果的比较,其中 OBO 段为大迟滞回线的拟合结果, CAC 段为不同预变形的小迟滞回线的理论预测结果。由 OBO 段可以看出,本文模型大迟滞回线的拟合结果与试验数据基本吻合,较好地反映了大迟滞回线加载到卸载的过渡阶段的力学特性。由 CAC 段可以看出,本文模型对大迟滞回线内部的小迟滞回线有较好的预测,反映了不同预变形时金属橡胶试件小迟滞回线的变形趋势。说明该理论模型能够描述金属橡胶非成形方向承受压缩载荷时的迟滞力学特性。



(a) 相对密度为 0.24



(b) 相对密度为 0.29

图 6 模型理论预测与试验结果对比

5 结论

(1) 金属橡胶压缩试验表明,金属橡胶是一种各向异性材料,其非成形方向的平均刚度明显大于成形方向。

(2) 根据非成形方向金属橡胶内部螺旋卷的接触状态,结合螺旋卷接触点间曲梁的弹性变形特性和接触点的分布规律,建立了金属橡胶非成形方向的迟滞特性力学模型,为金属橡胶元件的快速设计与制作奠定了理论基础。

(3) 结合金属橡胶非成形方向压缩变形试验数据,运用最小二乘法对试验数据进行参数拟合,得到迟滞特性力学模型,将理论预测迟滞回线与试验迟滞数据进行对比,二者吻合较好,表明该模型可以预估金属橡胶变形允许范围内任意加载和卸载过程中的变形与恢复力的非线性关系。

参 考 文 献

- [1] 吴杰,上官文斌,潘孝勇. 采用超弹性-粘弹性-弹塑性本构模型的橡胶隔振器动态特性计算方法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(14): 109-114.
WU Jie, SHANGGUAN Wenbin, PAN Xiaoyong. Computational method for dynamic properties of rubber

- isolators using hyperelastic-viscoelastic-plastoelastic constitutive model[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46(14): 109-114.
- [2] 李胜波, 闫辉, 姜洪源, 等. 应用于高速转子系统的金属橡胶阻尼环动力特性分析[J]. *物理学报*, 2012, 61(1): 010702.
- LI Shengbo, YAN Hui, JIANG Hongyuan, et al. Analysis of dynamic performance of metal rubber damping ring applied in high-speed rotor system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(1): 010702.
- [3] 王尤颜, 白鸿柏, 侯军芳. 金属橡胶材料疲劳损伤性能研究[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(2): 65-71.
- WANG Youyan, BAI Hongbai, HOU Junfang. Fatigue damage performance of metal rubber material[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(2): 65-71.
- [4] 付密果, 刘源, 崔敏亮, 等. 空间飞行器用金属橡胶减振器[J]. *光学精密工程*, 2013, 21(5): 1174-1182.
- FU Migu, LIU Yuan, CUI Minliang, et al. Metal-rubber vibrator absorber for aircraft[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(5): 1174-1182.
- [5] 敖宏瑞, 姜洪源, 王树国, 等. 金属橡胶弹性阻尼元件各向异性特性的实验研究[J]. *材料工程*, 2003(9): 11-14.
- AO Hongrui, JIANG Hongyuan, WANG Shuguo, et al. Experimental research on anisotropic characteristics of elastic damping elements of metal rubber[J]. *Journal of Materials Engineering*, 2003(9): 11-14.
- [6] 陈艳秋, 朱梓根. 金属橡胶减振垫刚度特性及本构关系研究[J]. *航空动力学报*, 2002, 17(4): 416-420.
- CHEN Yanqiu, ZHU Zigen. The investigation of the stiffness characteristics and the stress-strain relation metal rubber[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2002, 17(4): 416-420.
- [7] 李宇燕, 黄协清. 金属橡胶材料的非线性刚度[J]. *兵工学报*, 2008, 29(7): 819-823.
- LI Yuyan, HUANG Xieqing. Nonlinear stiffness of metal-rubber[J]. *Acta Armamentarii*, 2008, 29(7): 819-823.
- [8] 朱彬, 马艳红, 张大义, 等. 金属橡胶迟滞特性本构模型研究[J]. *物理学报*, 2012, 61(7): 078101.
- ZHU Bin, MA Yanhong, ZHANG Dayi, et al. A constitutive model of metal rubber based on hysteresis property[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, 61(7): 078101.
- [9] 曹凤利, 白鸿柏, 任国全, 等. 基于变长度悬臂曲梁的金属橡胶材料本构模型[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(24): 61-66.
- CAO Fengli, BAI Hongbai, REN Guoquan, et al. A constitutive model of metal rubber material based on curved cantilever beam of variable length[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(24): 61-66.
- [10] 范钦珊. 工程力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
- FAN Qinshan. Engineering mechanics course[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002.
- [11] 宋凯. 金属橡胶非线性离散结构单元模型的理论与试验研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2004.
- SONG Kai. Investigation on theory and experiment of nonlinear discrete cell of metal-rubber[D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2004.
- [12] 切戈达耶夫. 金属橡胶构件的设计[M]. 李中郢, 译. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- CHEGODAE D. The design of metallic rubber component[M]. Translated by LI Zhongying. Beijing: National Defence Industry Press, 2000.
- [13] 敖宏瑞, 姜洪源, 夏宇宏, 等. 金属橡胶弹性迟滞回线的一种新的建模方法[J]. *中国矿业大学学报*, 2004, 33(4): 453-456.
- AO Hongrui, JIANG Hongyuan, XIA Yuhong, et al. Simplified description method of elasto-hysteresis loop of metal rubber material[J]. *Journal of China University of Mining & Technology*, 2004, 33(4): 453-456.

作者简介: 曹凤利, 男, 1978 年出生, 博士研究生。主要研究方向为兵器振动与冲击防护。

E-mail: zxhpjyscfl@sina.com

白鸿柏(通信作者), 男, 1964 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为非线性振动、混沌、模糊理论。

E-mail: bbbk11@163.com