

DOI: 10.3901/JME.2015.03.045

基于虚位移分解与伺服轨迹约束的机械系统跟踪控制*

张新荣 孟为来

(长安大学道路施工技术装备教育部重点实验室 西安 710064)

摘要: 建立在 Udwadia 和 Kalaba 方程上的伺服约束跟踪控制方法要求系统的初始条件必须与跟踪约束方程相容。针对该问题, 利用广义虚位移投影分解方法, 将跟踪约束误差转化为广义坐标误差与广义速度误差, 通过提出系统跟踪控制总误差的概念, 提出一种可以消除该误差的控制力计算方法。该方法可以实现对系统初始误差的补偿。利用该算法对系统初始跟踪误差的可控性, 将其与基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的伺服约束跟踪控制算法结合, 实现了不相容初始条件下的约束系统轨迹跟踪控制。以平面 2 自由度机械手臂为仿真算例, 对该控制算法在轨迹跟踪控制中的应用进行仿真研究。仿真结果表明, 该方法可以解决机械系统跟踪控制中的初值不相容问题, 同时对约束违约进行了抑制, 提高了控制精度及稳定性。

关键词: 虚位移分解; 约束跟踪; 初始条件不相容; 轨迹跟踪控制

中图分类号: TH113

Trajectory Tracking Control of Mechanical Systems Based on Virtual Displacement Decomposition and Servo Constraint Following

ZHANG Xinrong MENG Weilai

(Key Laboratory of Road Construction Technology and Equipment of MOE, Chang'an University, Xi'an 710064)

Abstract: The servo constraint following control algorithm based on Udwadia and Kalaba equation requires the consistent initial conditions. To solve this problem, the principle of generalized virtual displacement decomposition is used to transform constraint errors into generalized coordinate errors and generalized velocity errors. The concept of total error of trajectory tracking for mechanical systems is proposed, and the explicit control forces formulae are deduced to eliminate this error. The method proposed here can compensate the initial tracking errors. Because of the controllability of this tracking control algorithm on initial errors, it can be combined with servo constraint following control which is based on the Udwadia and Kalaba equation. This method can handle the trajectory tracking control under inconsistent initial conditions effectively. The numerical simulation of a mechanical manipulator with two degrees of freedom is made and the results show that the algorithm can solve problems caused by the inconsistent initial conditions, also solve constraint violation problem, and improve the control precision and stability.

Key words: virtual displacement decomposition; constraint following; inconsistent initial condition; trajectory tracking control

0 前言

大多数情况下, 机械系统往往是一种高度非线性, 强耦合的复杂系统, 轨迹跟踪控制问题是机械系统运动控制中的一个重要研究方向。目前, 对于非线性机械系统的跟踪控制研究大多采用线性化处理方法, 或把精力放在基于自适应学习、智能控制

等方面^[1-7], 控制算法比较复杂。

由 UDWADIA 等^[8]提出的约束系统动力学基本方程是一种较新的动力学建模方法, 该方法适用的约束类型具有普遍性, 包括完整或非完整、独立或非独立的约束, 可较为简单地用于非线性系统的精确跟踪控制, 实现实时最优控制^[9], 为非线性机械系统的轨迹跟踪问题提供了一种新的控制方法。此外, 该方法在对非理想约束机械系统的动力学建模与控制研究方面也有重要进展^[9-11]。

建立在上述基本方程基础上的伺服约束轨迹

* 国家自然科学基金(51205029)、中央高校基本科研业务费专项资金(CHD2011TD016)和教育部留学回国人员科研启动基金(201011174)资助项目。20140221 收到初稿, 20141211 收到修改稿

跟踪控制方法要求系统的初始条件要与轨迹约束相容^[8]。针对该问题, UDWADIA^[12]提出了一种非线性系统的渐进跟踪控制方法。该方法以 Baumgarte 约束违约稳定法为基础, 通过修改约束方程有效解决了初始条件不相容问题^[13-15]。然而, 该方法适用于相对简单的轨迹跟踪, 在复杂轨迹跟踪控制中应用比较困难, 并且最优反馈参数的确定无规律可循。

BLAJER^[16]提出的投影分析法通过将约束误差量转换为广义坐标和广义速度的误差量, 用于修正数值积分运算对微分代数运动方程的破坏^[17-19]。文献[17]对约束违约投影抑制法与 Baumgarte 约束违约稳定法进行了比较研究。与 Baumgarte 约束违约稳定法不同的是投影法不存在反馈参数的确定问题, 能够适用于轨迹约束比较复杂的机械系统。

本文基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的伺服约束控制问题, 针对系统初始条件与需要跟踪的轨迹不相容情况, 提出一种与投影分解法相结合的控制算法。该算法利用投影法将约束误差分解为广义坐标和广义速度的误差, 再通过施加一个误差控制力来补偿该误差, 从而完成轨迹跟踪误差的消除, 实现了不相容初始条件下的伺服约束系统轨迹跟踪控制。最后, 对关节式平面 2 自由度机械臂的轨迹跟踪控制进行仿真以验证该方法的控制效果。仿真试验结果表明, 该方法有效解决了伺服约束控制中初值条件不相容引起的系统控制不稳定问题, 同时还可以消除数值积分过程中的累积误差。

1 问题描述

利用拉格朗日动力学建模方法, 无约束机械系统的运动方程可以描述为

$$M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

式中 q ——描述系统的 n 维广义坐标;
 M —— $n \times n$ 维对称正定广义质量阵;
 Q ——已知的广义主动力。

如果该机械系统需要跟踪一组轨迹, 此处将该轨迹作为约束对待(下面称为轨迹约束)。假设该系统要求跟踪的目标轨迹可用 m_1 个完整约束和 m_2 个非完整约束方程表示为

$$\Phi_H(q, t) = 0 \quad (2)$$

$$\Psi_{NH}(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (3)$$

式中 Φ_H —— m_1 维列矢量;
 Ψ_{NH} —— m_2 维列矢量;
 $m = m_1 + m_2$ 。

假设轨迹约束式(2)、(3)足够光滑, 将式(2)对时间一次求导并与式(3)联立, 可得

$$\Psi = \begin{pmatrix} \dot{\Phi}_H \\ \Psi_{NH} \end{pmatrix} = A(q, t)\dot{q} + b(q, t) = 0 \quad (4)$$

式中 A —— $m \times n$ 维矩阵, 即系统约束雅可比矩阵;

b —— m 维列矢量。

式(4)对时间再次求导可得

$$A(q, t)\ddot{q} = \gamma(q, \dot{q}, t) \quad (5)$$

现在问题变为对于系统式(1), 要求跟踪轨迹约束式(5), 此时系统的运动方程可表示为

$$M\ddot{q} = Q + Q_c \quad (6)$$

式中 Q_c ——使系统式(1)满足式(5)需要施加的伺服控制力。

根据文献[8], 若系统初始条件与轨迹约束方程式(2)、(3)相容, 则有伺服控制力的封闭解

$$Q_c = M^{1/2} \left(AM^{-1/2} \right)^+ (\gamma - AM^{-1}Q) \quad (7)$$

式中, 上标“+”表示 Moore-Penrose 广义逆。将式(7)代入式(6)中即是 Udwadia 和 Kalaba 基本方程。式(7)的解便是无约束系统满足轨迹约束条件式(2)、(3)所需的精确控制力。

上述伺服约束控制方法存在的问题是要求系统初始条件与轨迹约束相容, 另外即使初始条件满足要求, 该算法也会出现约束违约问题, 即会出现低阶轨迹约束式(2)、(3)不满足的情况, 从而出现轨迹跟踪控制误差变大甚至不稳定现象。

2 跟踪约束误差分离

根据文献[19], 基于约束流形切空间中广义虚位移的分解方法可以应用于系统的广义速度, 分解结果为

$$\dot{q} = P_c \dot{q} + P_a \dot{q} \quad (8)$$

式中 $P_c \dot{q}$ ——约束方向的分解;

$P_a \dot{q}$ ——约束允许方向的分解;

$$P_c = R^{-1} \left(AR^{-1} \right)^+ A;$$

$$P_a = I - R^{-1} \left(AR^{-1} \right)^+ A;$$

R —— M 的 Cholesky 分解上三角矩阵;

$$M = R^T R。$$

令 $W = R^{-1} \left(AR^{-1} \right)^+$, 结合式(4)可得, 如果 $\Psi = \hat{\Psi} \neq 0$, 则广义速度的误差项为

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W} \hat{\Psi} \quad (9)$$

式(9)的成立是因为广义速度约束式(4)为关于速度的线性约束。因为几何约束多数情况下是非线性的, 不能直接应用对广义速度误差的处理方法, 但这里可以将一个小步长 h 上的广义坐标增量视为在约束流形切空间的两个垂直方向上的线性增量之和。因此, 如果完整约束 $\Phi_H = \hat{\Phi} \neq \mathbf{0}$, 根据广义速度误差处理方法, 可用式(10)计算广义坐标的误差

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \hat{\Phi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (10)$$

右边项中的 $\mathbf{0}$ 是与非完整约束对应的 m_2 维列矢量。式(9)、(10)是利用投影法将约束误差分解为广义速度和广义坐标误差的关系式。

3 轨迹约束误差控制

考虑到广义速度误差对广义坐标误差的影响, 为提高轨迹跟踪控制效果, 提出误差总量的概念。

定义 $\mathbf{E} = \Delta \mathbf{q} + \Delta \dot{\mathbf{q}} \Delta t$, \mathbf{E} 为广义坐标误差和广义速度误差在微小时间段 Δt 上产生的误差之和, 即系统轨迹约束跟踪误差总量。

为了消除跟踪轨迹约束误差, 假设给系统式(1)添加一个控制力 \mathbf{Q}_{ci} , 该力将使系统在 Δt 时间内产生一个可以消除 \mathbf{E} 的位移和速度。

系统在控制力 \mathbf{Q}_{ci} 作用下, 产生的广义加速度为 $\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}_{ci}$ 。假设在微小时间段 Δt 内, 该广义加速度的变化可以忽略, 则 Δt 时间后, 系统广义速度和广义坐标的误差将变为

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}' = \Delta \dot{\mathbf{q}} + \ddot{\mathbf{q}}_i \Delta t \quad (11)$$

$$\Delta \mathbf{q}' = \Delta \mathbf{q} + \Delta \dot{\mathbf{q}} \Delta t + \frac{\ddot{\mathbf{q}}_i (\Delta t)^2}{2} \quad (12)$$

此时, 约束系统误差总量变为

$$\mathbf{E}' = \Delta \mathbf{q}' + \Delta \dot{\mathbf{q}}' \Delta t \quad (13)$$

令 $\mathbf{E}' = \mathbf{0}$, 由式(11)~(13), 可得

$$\mathbf{Q}_{ci} = -\frac{2\mathbf{M}[\Delta \mathbf{q} + 2\Delta \dot{\mathbf{q}} \Delta t]}{3(\Delta t)^2} \quad (14)$$

\mathbf{Q}_{ci} 便是为消除轨迹约束总误差所需提供的伺服控制力, 它对初始条件不相容引起的误差和数值积分计算的累积误差都有消除与抑制作用。

4 轨迹跟踪伺服约束控制方法

基于 Udwadia 和 Kalaba 方程的伺服约束控制式(7)在一定的条件下可以实时完成非线性系统的轨迹跟踪控制^[12], 而式(14)是基于跟踪误差而得到的, 对于初值误差具有一定的可控性, 因此, 将两者结合起来, 便能用来解决系统具有初始误差的精确跟踪控制(相对于渐进跟踪控制)问题。将式(6)改写为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_{ci} \quad (15)$$

$\mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_{ci}$ 即为式(1)所述的无约束系统跟踪目标轨迹式(2)、(3)并消除初始条件不相容的影响所需的控制力, 采用伺服控制来实现。其中 \mathbf{Q}_{ci} 对 \mathbf{Q}_c 起辅助控制作用。

观察式(14)可知: 当系统跟踪误差较大, 而 Δt 的值较小时, 会导致 \mathbf{Q}_{ci} 很大, 在实际应用中 Δt 可根据具体情况取稍大的值, 以适当减小 \mathbf{Q}_{ci} 对控制系统的影响。

另外, 此计算方法计算的 $\mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_{ci}$ 只是理论值, 实际中可能由于该值过大而超出系统最大的驱动能力。为解决此问题, 这里采用饱和控制方法, 将得到的伺服控制运动方程改为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + (\mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_{ci})^* \quad (16)$$

处理后的伺服控制力 $(\mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_{ci})^*$ 小于或等于系统相应的最大驱动力或力矩。

由以上分析可知, 两种控制方法的结合, 解决了伺服约束控制在系统初始条件与目标轨迹约束不相容情况下难以直接应用的问题, 同时抑制了约束违约, 提高了控制精度。

5 仿真算例

5.1 系统模型

如图 1 所示为平面 2 自由度关节式机械臂, 由连杆 1 和连杆 2, 关节处的电动机 1 和电动机 2 及末端夹持器组成。假设两连杆均为匀质刚性杆, 分别由两个关节处的伺服电动机驱动, 取关节角度 θ_1 和 θ_2 为广义坐标 $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2)^T = (\theta_1 \ \theta_2)^T$, 考虑关节处的黏性摩擦力, 运用动力学建模方法可得运动方程式(1)变为^[7]

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (17)$$

式中 \mathbf{F} ——摩擦力矢量;

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0.4\dot{q}_1 \\ 0.4\dot{q}_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix};$$

$$M_{11} = J_1 + J_2 + al_1^2 + bl_2^2 + 2cl_1l_2c_2;$$

$$M_{12} = J_2 + bl_2^2 + cl_1l_2c_2;$$

$$M_{22} = J_2 + bl_2^2;$$

$$Q_1 = cl_1l_2s_2(2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - cgl_2c_{12} - dgl_1c_1;$$

$$Q_2 = -cl_1l_2s_2\dot{q}_1^2 - cgl_2c_{12};$$

$$a = 0.25m_1 + m_2 + m_3 + m_4;$$

$$b = 0.25m_2 + m_4;$$

$$c = 0.5m_2 + m_4;$$

$$d = 0.5m_1 + m_2 + m_3 + m_4;$$

$$c_1 = \cos\theta_1;$$

$$s_2 = \sin\theta_2;$$

$$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2);$$

$$J_i = m_i l_i^2 / 12 \quad i=1, 2。$$

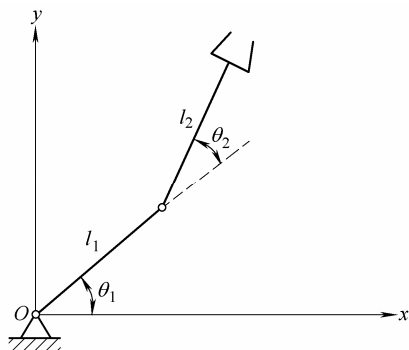


图1 机械手臂模型

算例中，机械臂相关参数如下： $l_1=l_2=1.0$ m， $m_1=2.0$ kg， $m_2=m_3=m_4=1.0$ kg，其中 m_3 为关节 2 处电动机质量， m_4 为末端夹持器质量。

按照前面的理论，为使机械臂末端跟踪目标轨迹，关节处需要施加伺服力矩 τ_1 、 τ_2 ，于是有

$$\mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_{ci} = (\tau_1 \quad \tau_2)^T$$

5.2 目标轨迹

假设该机械臂系统末端需要跟踪的运动轨迹是以(1, 1)为圆心，半径为 0.5 m 的圆，并采用如下的方程组来描述

$$\begin{cases} x = 1 + 0.5 \sin t \\ y = 1 + 0.5 \cos t \end{cases} \quad (18)$$

通过坐标变换就可以将上述约束方程转化为广义坐标表示形如式(4)、(5)的形式，其相关项为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} & -l_2s_{12} \\ l_1c_1 - l_2c_{12} & l_2c_{12} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.5 \cos t \\ 0.5 \sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} l_1c_1\dot{q}_1^2 + l_2c_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - 0.5 \sin t \\ l_1s_1\dot{q}_1^2 + l_2s_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 - 0.5 \cos t \end{pmatrix}$$

$$s_1 = \sin\theta_1 \quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

设(x, y)为实际运动轨迹，(x_d, y_d)为理想目标轨迹，则轨迹跟踪误差为

$$e_x = x - x_d \quad e_y = y - y_d \quad (19)$$

5.3 系统仿真及结果分析

设该机械臂具有与目标轨迹式(18)不相容的初始状态

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \pi/2 & \theta_2(0) = -\pi/2 \\ \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \end{cases}$$

即起始位置在圆心处。

利用 Matlab 软件，取积分时间步长为 $h=0.01$ s， $\Delta t=0.1$ s，采用定步长四阶龙格库塔积分法对机械系统进行仿真。此外该机械臂系统的最大驱动力矩分别设为 $\tau_{1\max}=40$ N·m， $\tau_{2\max}=20$ N·m。仿真结果如下。

图 2 为机械臂系统从不相容初始状态跟踪目标圆的实际轨迹与期望轨迹的比较，其中图 2a 为 0~6 s 时间内机械臂末端的轨迹曲线，图 2b 为 0~30 s 内的轨迹曲线。可以看出，系统有较好的跟踪控制效果。图 3 为轨迹约束方程误差曲线。

根据仿真结果可知，本文所用轨迹跟踪伺服约束控制算法对不相容初值下的目标轨迹实现了跟踪控制，控制精度高，调节时间短，基本上 2 s 内就消除了初始值误差，约 3 s 时，跟踪误差便达到 10^{-8} 精度以内，之后误差曲线呈周期性保持下去。经验证，该仿真算法可长时间稳定地进行下去。

图 4 为机械臂系统跟踪目标轨迹需要对各连杆提供的控制力矩的变化曲线。由于存在初值误差， τ_2 的初始计算值较大，采用最大驱动力矩限制， τ_2 的值控制在 ± 20 N·m 范围内，之后逐渐稳定。在该算例中， τ_1 的值没有超过最大力矩 ± 40 N·m 的范围。

图 5 为机械臂两个连杆的角位移变化曲线。最终，杆 1 在竖直方向左右稳定运动，与水平方向的夹角 θ_1 范围为 $60^\circ \sim 120^\circ$ ，杆 2 在水平方向上下摆动，与杆 1 的夹角 θ_2 的范围为 $-150^\circ \sim -30^\circ$ 。

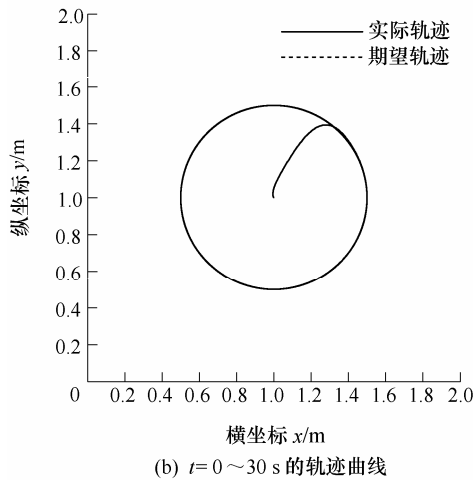
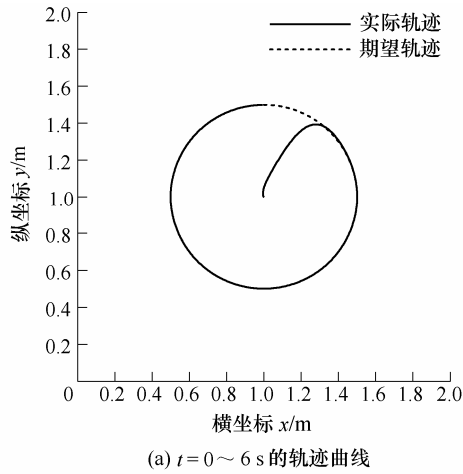


图2 实际运动轨迹及目标轨迹

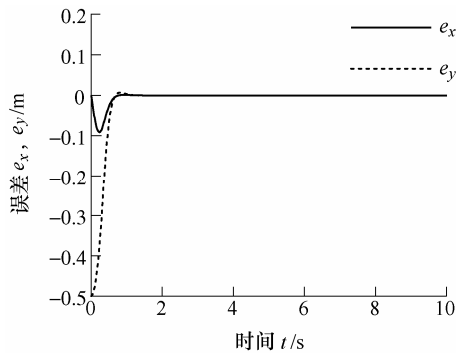
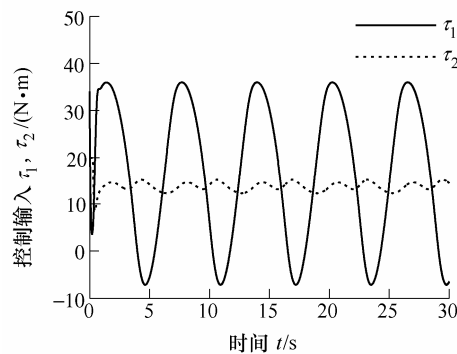
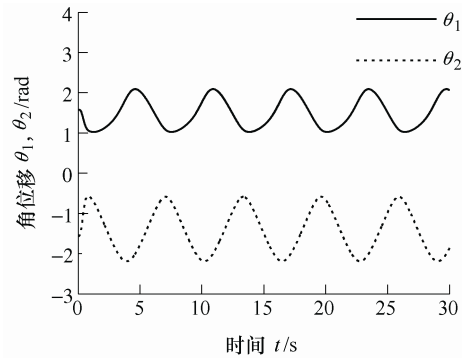
图3 误差 e_x 及 e_y 图4 控制输入 τ_1 及 τ_2 

图5 连杆1及连杆2角位移

6 结论

(1) 本文利用投影分解法将约束误差转化为广义坐标及广义速度的误差, 并提出误差处理方法, 从而与基于Udwadia和Kalaba方程的伺服约束控制结合, 实现了不相容初始条件下机械臂末端轨迹的跟踪控制。

(2) 基于轨迹约束误差的跟踪控制算法在处理跟踪误差时, 综合考虑了广义坐标误差和广义速度误差, 提出了误差总量的概念, 以误差总量为控制依据, 误差波动小。

(3) 大多数控制系统的初始值与目标轨迹约束条件是不相容的。对于初始误差, 误差总量较大, 计算所得误差控制力也大, 为了符合实际情况, 结合 Δt 的合理取值, 在仿真中增加了系统最大控制力或力矩的限制, 采用饱和控制法对系统进行控制。

(4) 通过仿真算例分析可知, 控制算法对机械系统跟踪控制中的约束违约也具有明显的抑制作用。

参 考 文 献

- [1] CHEAH C C, LIU C, SLOTINE J J E. Adaptive Jacobian tracking control of robots with uncertainties in kinematic, dynamic and actuator models[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(6): 1024-1029.
- [2] LIUZZO S, TOMEI P. A global adaptive learning control for robotic manipulators[J]. Automatica, 2008, 44(5): 1379-1384.
- [3] PEREZ J P, PEREZ J P, SOTO R, et al. Trajectory tracking error using PID control law for two-Link robot manipulator via adaptive neural networks[J]. Procedia Technology, 2012, 3(1): 139-146.
- [4] CAO Zhengcai, ZHAO Yingtao, WU Qidi. Adaptive trajectory tracking control for a nonholonomic mobile

- robot[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(4): 546-552.
- [5] HAO Qi, GUAN Liwen, WANG Jinsong, et al. Dynamic feedforward control of a novel 3-PSP 3-DOF parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2011, 24(4): 676-684.
- [6] 张文辉, 刘文艺, 叶晓平, 等. 自由漂浮空间机械臂基于神经网络的鲁棒自适应控制[J]. 机械工程学报, 2012, 48(21): 36-40.
- ZHANG Wenhui, LIU Wenyi, YE Xiaoping, et al. Robust adaptive control for free-floating space manipulators based on neural network[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(21): 36-40.
- [7] 吴玉香, 张景, 王聪. 机械臂的自适应神经网络控制与学习[J]. 机械工程学报, 2013, 49(15): 42-48.
- WU Yuxiang, ZHANG Jing, WANG Cong. Adaptive neural network control and learning for robot manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(15): 42-48.
- [8] UDWADIA F E, KALABA R E. A new perspective on constrained motion[J]. Proceedings: Mathematical and Physical Sciences, 1992, 439(1906): 407-410.
- [9] UDWADIA F E. Optimal tracking control of nonlinear dynamical systems[J]. Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2008, 464(2097): 2341-2363.
- [10] UDWADIA F E, KALABA R E. What is the general form of the explicit equations of motion for constrained mechanical systems[J]. Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(3): 335-339.
- [11] UDWADIA F E. Equations of motion for constrained multibody systems and their control[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 127(3): 627-638.
- [12] UDWADIA F E. A new perspective on the tracking control of nonlinear structural and mechanical systems[J]. Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2003, 459(2035): 1783-1800.
- [13] CHO H, UDWADIA F E. Explicit solution to the full nonlinear problem for satellite formation-keeping[J]. Acta Astronautica, 2010, 67(3): 369-387.
- [14] LAM T. New approach to mission design based on the fundamental equations of motion[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2006, 19(2): 59-67.
- [15] 林泰明, 李东旭, 陈浩. 基于约束运动理论的航天员舱外救生中的姿态运动控制[J]. 宇航学报, 2010, 31(2): 602-607.
- LIN Taiming, LI Dongxu, CHEN Hao. An attitude control method based on constrained motion theory for extravehicular activity rescue by astronaut[J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(2): 602-607.
- [16] BLAJER W. A geometric unification of constrained system dynamics[J]. Multibody System Dynamics, 1997, 1(1): 3-21.
- [17] BLAJER W. Methods for constraint violation suppression in the numerical simulation of constrained multibody systems-A comparative study[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(13): 1568-1576.
- [18] BLAJER W. Elimination of constraint violation and accuracy aspects in numerical simulation of multibody systems[J]. Multibody System Dynamics, 2002, 7(3): 265-284.
- [19] KÖVECSES J, PIEDBOEUF J. A novel approach for the dynamic analysis and simulation of constrained mechanical systems[C]// ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. September 2-6, 2003, Chicago, Illinois. USA: ASME, 2003: 143-152.

作者简介: 张新荣(通信作者), 男, 1968 年出生, 博士, 教授。主要研究方向为机械系统动力学与控制。

E-mail: zxr-68@126.com

孟为来, 男, 1986 年出生。主要研究方向为机械系统动力学与控制。

E-mail: mwlal@126.com