DOI: 10.3901/JME.2019.11.176

一类平面对心折展机构的构造方法*

孙学敏¹ 姚燕安¹ 李锐明² 刘 然¹ 魏超然¹

(1. 北京交通大学机械与电子控制工程学院 北京 100044;

2. 北京航空航天大学机器人研究所 北京 100191)

摘要: 通过多个广义折弯杆组构造具有同一缩放中心的折展机构, 给出了平面对心折展机构的一般化构造方法。分析了第一类广义折弯杆组(GAE I)和第二类广义折弯杆组(GAE II)的约束条件, 对两个广义折弯杆组进行了对心构造, 并用几何方法得到了两个广义折弯杆组对心构造条件, 给出了两类折弯杆组的运动分析。在此基础上, 分析了 n 个 GAE I 和 n 个 GAE II 组成的对心机构的构造条件, 得到具有 n 个广义折弯杆组的对心折展机构的回环连接方法。通过对 GAE I 和 GAE II 折弯杆组的展开与折叠状态的分析, 给出了两类折弯杆组的折展比。分别对由 6 个 GAE I 和 6 个 GAE II 组成的对心折展机构, 建立了三维模型, 给出了典型的运动状态; 制作了两款机构模型, 验证了所提出构造方法的可行性。

关键词: 折展机构; 对心; 广义折弯杆组; 约束条件

中图分类号: TH112; TP242

A Method for Constructing Planar Center-coincident Deployable Mechanisms

SUN Xuemin¹ YAO Yanan¹ LI Ruiming² LIU Ran¹ WEI Chaoran¹

(1. School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044;

2. Robotics Institute, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract: Based on multiple generalized angulated elements, a class of deployable mechanisms with the same deployable center is constructed, and the general method of constructing planar center-coincident deployable mechanisms is proposed. The construction conditions of the type I generalized angulated elements (GAE I) and the type II generalized angulated elements (GAE II) are analyzed. The two generalized elements are center-coincident, and the conditions of the center-coincident deployable mechanism are obtained by using the geometric method, the motion of two types of angulated elements is given. On this basis, the circular ring connection conditions of n GAE I and n GAE II are analyzed, and the method of circular ring connection is obtained. By analyzing the unfolding and folding state of the GAE I and GAE II, the folding ratios of the angulated elements are given. For the center-coincident deployable mechanism that consists of 6 GAE I and 6 GAE II, two 3D models are established, and a serial typical motion state are given. Two prototypes are fabricated, which verifies the feasibility of the construction method.

Key words: deployable mechanism; center-coincident; generalized angulated elements; constraint condition

0 前言

折展机构因其优良的折叠伸展性能被广泛应用于折叠帐篷、桌椅、折叠屋顶、折展天线以及太阳能帆板等日常生活和航空航天领域。PINERO^[1]将直线剪叉机构应用于建筑, 设计出可折叠展开的移动剧院。ZEIGLER^[2]解决了 PINERO 设计的机构需要其它支撑才能保证结构稳定的问题, 提出了基于剪叉机构的自稳定屋顶。ESCRIG 等^[3-4]通过对剪叉折展机构几何和运动特性的深入分析得到了剪叉折叠

机构有多种组合方式, 并得到一维、二维和三维空间内具有折展特性的复杂组合体。廖启征等^[5-6]给出将多个平行四边形组合连接构造平面图形放缩机构的方法, 并给出单层以及多层平面放缩机构的构造方法。李端玲等^[7]通过对球面折展机构的自由度特性的分析, 得到构造任意球面剪叉单元和任意个支链构成的球面折展机构的方法。SUN 等^[8-9]基于螺旋理论的方法, 对剪叉单元组成的可展机构进行了运动学和自由度的分析。

在直线剪叉机构的基础上, HOBBERMAN^[10-11]将剪叉机构的直杆变为具有角度的折弯杆构造了折弯杆组(Angulated elements, AE), 并构造了包括 Hobberman 球、世博会的穹顶在内的一系列平面和空

* 中国博士后科学基金(2018M631300)和国家自然科学基金(51505022)资助项目。20181021 收到初稿, 20190102 收到修改稿

间折展机构。YOU等^[12]分析了AE构造条件,并提出了两类一般化的折弯杆组,即第一类广义折弯杆组(Type I generalized angulated elements, GAE I)和第二类广义折弯杆组(Type II generalized angulated elements, GAE II)。PATEL等^[13]通过对平面耦合运动的PRRP机构的运动学的求解,描述出径向运动机构的运动轨迹,通过计算给出了AE、GAE I和GAE II在四个末端铰接点被约束在两条成角度的直线上时,中间铰接点的轨迹。白国超等^[14]提出直杆-弯杆组合单元,可以构造环形放缩机构或沿有固定曲率的曲线型放缩机构。李锐明等^[15-16]构造并分析了可重构折弯杆组、双折弯杆组和三折弯杆组,并以此构造了可重构柏拉图多面体、半正多面体机构和Johnson多面体机构。杨毅等^[17]基于六面体提出一种新型六面体向心机构,串联组合成一种新型同步展开伸展臂机构。

利用HOBERMAN^[10-11]提出的对称折弯杆组可以构造一类具有同一缩放中心的折展机构,这类折展机构所有杆件的运动轴线相交于一点,具有唯一的缩放中心,此类折展机构可称为对心构造的折展机构。对心折弯机构的一般约束以及构造条件尚未有相关研究。本文提出基于多个广义折弯杆组的对心折展机构一般化构造方法。通过约束条件分析,对第一类广义折弯杆组和第二类广义折弯杆组的对心构造方式进行讨论,得到两个广义折弯杆组满足杆长和角度的约束条件,给出平面对心折展机构的回环连接方法,并且制作机构模型进行验证。

1 第一类广义折弯杆组对心构造

如图1a所示,折弯杆组L的末端铰接点A和C沿直线OC运动,末端铰接点E和F沿直线OF运动,并且两条直线交于点O,即以点O为缩放中心;如图1b所示,折弯杆组R的末端铰接点A'和C'沿直线O'C'运动,末端铰接点G和H沿直线O'H运动,并且两条直线交于点O',即以点O'为缩放中心;如图1c所示,令折弯杆组L和折弯杆组R的点A与点A'铰接于点A(A'),点C与点C'铰接于点C(C')处,并且点O和点O'重合于点O(O')。下面讨论两个GAE I折弯杆组以点O(O')为缩放中心,组合之后仍然可以满足运动的对心构造约束条件。

1.1 两个GAE I对心构造条件

考虑两个第一类广义折弯杆组满足对心构造的约束条件,如图2所示,已知GAE I-L满足条件:轴线夹角(即为直线OF与直线OC之间的夹角) $\angle COF = \theta_1$,杆长 $BE = BF = l_1$,杆长 $BC = BA = l_2$,折弯杆夹

图1 两个折弯杆的对心构造

角 $\alpha_1 = \angle ABF \neq \angle CBE = \beta_1$,且轴线夹角 $\theta_1 = \pi - (\alpha_1 + \beta_1)/2$; GAE I-R满足条件:轴线夹角 $\angle COH = \theta_2$,杆长 $DC = DA = l_3$,杆长 $DH = DG = l_4$,折弯杆夹角 $\alpha_2 = \angle ADH \neq \angle CDG = \beta_2$,且轴线夹角 $\theta_2 = \pi - (\alpha_2 + \beta_2)/2$ 。

图2 第一类广义折弯杆组坐标系建立

建立如图2所示的坐标系,O为坐标原点,OC所在的直线为y轴,根据右手法则,垂直于OC且过点O的直线为x轴。设点A的坐标为(0,a),点C的坐标为(0,c), $\angle BAC = \varphi$, $\angle DAC = \phi$,其中a,c, φ , ϕ 均为变量。随着点A和点C的运动,设点B的坐标为(b_x, b_y),点D的坐标为(d_x, d_y),由已知 $BC = BA$, $DC = DA$ 得到

$$b_y = \frac{a+c}{2} = d_y \quad (1)$$

即 BD 垂直 CA 且平分 CA , 所以有

$$AM = l_2 \cos \varphi \quad (2)$$

$$AM = l_3 \cos \phi \quad (3)$$

则有

$$l_2 \cos \varphi = l_3 \cos \phi \quad (4)$$

由于 GAE I 折弯杆组中间点 B 和 D 的运动轨迹均为椭圆, 并且点 B 的坐标为 $(-l_2 \sin \varphi, a + l_2 \cos \varphi)$, 点 D 为 $(l_3 \sin \phi, a + l_3 \cos \phi)$, 可设点 B 的轨迹方程为

$$p_1 b_x^2 + p_2 b_x b_y + p_3 b_y^2 + p_4 b_x + p_5 b_y + p_6 = 0 \quad (5)$$

可得到点 D 的轨迹方程为

$$p_1 d_x^2 - p_2 \sqrt{(l_2^2 - l_3^2) + d_x^2} d_y + p_3 d_y^2 - p_4 \sqrt{(l_2^2 - l_3^2) + d_x^2} + p_5 d_y + p_1 (l_2^2 - l_3^2) + p_6 = 0 \quad (6)$$

由于点 D 的运动轨迹为椭圆, 所以有

$$l_2 = l_3 \quad (7)$$

将式(7)代入式(4)可得

$$\varphi = \phi \quad (8)$$

因此三角形 BAO 与三角形 DAO 全等, 故有 $\theta_1'' = \theta_2'$ 。即点 B 和点 D 均关于 y 轴对称, 它们在运动过程中的轨迹也关于 y 轴对称。通过计算可得点 B 的轨迹方程

$$Ab_y^2 + Bb_x b_y + Cb_x^2 + D = 0 \quad (9)$$

$$A = l_2^2 \tan^2 \theta_1$$

$$B = 2l_1 l_2 \tan^2 \theta_1 \sin \alpha_1 -$$

$$2l_1 l_2 \tan \theta_1 \cos \alpha_1 + 2l_2^2 \tan \theta_1$$

$$C = l_1^2 + l_1^2 \tan^2 \theta_1 + l_2^2 -$$

$$2l_1 l_2 \cos \alpha_1 + 2l_1 l_2 \tan \theta_1 \sin \alpha_1$$

$$D = -l_1^2 l_2^2 (\tan \theta_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1)^2$$

点 D 的轨迹方程为

$$A_1 d_y^2 + B_1 d_x d_y + C_1 d_x^2 + D_1 = 0 \quad (10)$$

$$A_1 = l_3^2 \tan^2 \theta_2$$

$$B_1 = -2l_3 l_4 \tan^2 \theta_2 \sin \alpha_2 +$$

$$2l_3 l_4 \tan \theta_2 \cos \alpha_2 - 2l_3^2 \tan \theta_2$$

$$C_1 = l_4^2 + l_4^2 \tan^2 \theta_2 + l_3^2 -$$

$$2l_3 l_4 \cos \alpha_2 + 2l_3 l_4 \tan \theta_2 \sin \alpha_2$$

$$D_1 = -l_3^2 l_4^2 (\tan \theta_2 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2)^2$$

由于点 B 和点 D 的运动轨迹关于 y 轴对称, 即

$A = A_1$, $B = -B_1$, $C = C_1$, $D = D_1$, 所以得到

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_2 \\ l_1 = l_4 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases} \quad (11)$$

因此, 对于两个 GAE I 满足对心构造的约束条件是完全相同的两个 GAE I, 并且折弯杆组所对的角相等, 约束条件即为式(7)和式(11)。

1.2 GAE I 对心杆组的运动分析

为了给出 GAE I 对心杆组的运动分析, 以折弯杆 EBC 的杆 BC 与直线 OA 的夹角 γ 为输入变量, 以 OA 、 OB 、 OC 、 OE 和 OF 的长度为输出值, 其中 $\gamma = \pi - \angle OCB$ 。如图 3 所示, 为 GAE I 对心杆组在运动中随着变量 γ 变化的两种位置情况, 图 3a 为 $\gamma \leq \pi/2$ 时的运动情况, 当点 C' 与交点 O 重合时, γ' 即为 γ 的最小值, 可表达为

$$\gamma' = \theta - \arcsin \left(\frac{l_1 \sin \alpha}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \alpha}} \right) \quad (12)$$

图 3b 为 $\gamma > \pi/2$ 时的运动情况, 当点 A' 与交点 O 重合时, γ'' 即为 γ 的最大值, 可表达为

$$\gamma'' = \pi - \theta + \arcsin \left(\frac{l_1 \sin \beta}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \beta}} \right) \quad (13)$$

图 3 GAE I 对心杆组运动分析

根据角度 γ 的变化, 通过计算分别给出 OA 、 OB 、 OC 、 OE 和 OF 关于 γ 的长度公式

$$OA = \begin{cases} -f \csc \theta \sin(\beta + \theta + \gamma + f_1) & \gamma \leq \frac{\pi}{2} \\ g \csc \theta \sin(\alpha + \theta - \gamma + g_1) & \gamma > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (14)$$

$$OB = \sqrt{OA^2 + l_2^2 - 2l_2 OA \cos \gamma} \quad (15)$$

$$OC = OA - 2l_2 \cos \gamma \quad (16)$$

$$OE = h \csc \theta \sin(\gamma + h_1) \quad (17)$$

$$OF = f \csc \theta \sin(\gamma - f_2) \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \beta} \\
 f_1 &= \arccos((l_1 - l_2 \cos \beta) / f) \\
 f_2 &= \arccos((l_2 - l_1 \cos \beta) / f) \\
 g &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1l_2 \cos(\alpha - 2\gamma)} \\
 g_1 &= \arccos((l_1 + l_2 \cos(\alpha - 2\gamma)) / g) \\
 h &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \alpha} \\
 h_1 &= \arccos((l_2 - l_1 \cos \alpha) / h)
 \end{aligned}$$

2 第二类广义折弯杆组对心构造

如图 1c 所示, 讨论两个 GAE II 折弯杆组以点 $O(O)$ 为缩放中心, 组合之后仍然可以满足运动的对心构造约束条件。

2.1 两个 GAE II 对心构造条件

如图 4 所示, 对于两个 GAE II, 已知 GAE II-L 满足条件: 轴线夹角 $\angle COF = \theta_1$, 折弯杆夹角 $\angle ABF = \angle CBE = \pi - \theta_1$, 杆长 $BF = l_1$, 杆长 $AB = l_2$, 杆长 $BE = m_1l_1$, 杆长 $BC = m_1l_2$, 其中 m_1 称为比值; GAE II-R 满足条件: 轴线夹角 $\angle COH = \theta_2$, 折弯杆夹角 $\angle ADH = \angle CDG = \pi - \theta_2$, 杆长 $AD = l_3$, 杆长 $DH = l_4$, 杆长 $DC = m_2l_3$, 杆长 $DG = m_2l_4$ 。

图 4 第二类广义折弯杆组坐标系建立

建立如图 4 所示的坐标系, O 为坐标原点, OC 所在的直线为 y 轴, 根据右手法则, 垂直于 OC 且过点 O 的直线为 x 轴。当 AC 、 EF 分别沿直线运动时, 点 B 的轨迹为直线。设点 A 的坐标为 $(0, a)$, 点 C 的坐标为 $(0, c)$, $\angle BAC = \varphi$, $\angle DAC = \phi$, 其中 a, c, φ, ϕ 均为变量。随着点 A 和点 C 的运动, 设点 B 的坐标为 (b_x, b_y) , 则 $\angle BOC$ 为定值, 令 $\angle BOC = \theta_1''$, $\angle BOF = \theta_1'$, 可得到点 B 的轨迹——直线 BO 的方程为

$$-\tan \theta_1'' b_y = b_x \quad (18) \quad (19)$$

可得点 B 的坐标为 $(-\tan \theta_1'' b_y, b_y)$, 所以得到关于点

B 的纵坐标的方程为

$$\begin{aligned}
 (1 + \tan^2 \theta_1'')(1 - m_1^2)b_y^2 - 2b_y(c - m_1^2a) + \\
 (c^2 - m_1^2a^2) = 0
 \end{aligned} \quad (20)$$

同理设点 D 的坐标为 (d_x, d_y) , 因此得到关于点 D 的纵坐标的方程为

$$\begin{aligned}
 (1 + \tan^2 \theta_2'')(1 - m_2^2)d_y^2 - \\
 2d_y(c - m_2^2a) + (c^2 - m_2^2a^2) = 0
 \end{aligned} \quad (21)$$

显然点 B 和点 D 的方程有一个解或者有两个相等的解, 所以有两种情况。

(1) 当 $m_1 = m_2 = 1$ 时, 有

$$b_y = \frac{a+c}{2} = d_y \quad (22)$$

即 BD 垂直 CA 且平分 CA , 所以有

$$BN = ON \tan \theta_1'' \quad (23)$$

$$DN = ON \tan \theta_2'' \quad (24)$$

在直角三角形 BCN 和 DCN 中有

$$l_2^2 = BN^2 + CN^2 \quad (25)$$

$$l_3^2 = DN^2 + CN^2 \quad (26)$$

所以有

$$l_2^2 - l_3^2 = BN^2 - DN^2 = ON^2(\tan^2 \theta_1'' - \tan^2 \theta_2'') \quad (27)$$

因为式(27)的左边 $l_2^2 - l_3^2$ 为定量, 右边 ON^2 为变量, $\tan^2 \theta_1'' - \tan^2 \theta_2''$ 为定量, 为保证等式恒成立, 所以有 $l_2^2 - l_3^2 = 0$, $\tan^2 \theta_1'' - \tan^2 \theta_2'' = 0$, 即

$$\theta_1'' = \theta_2'' \quad (28)$$

$$l_2 = l_3 \quad (29)$$

由于点 B 沿 BO 方向运动, CA 沿 CO 方向运动, 故 EF 沿 FO 方向运动。同理, GH 沿 HO 方向运动。因此两个特殊的第二类广义折弯杆组满足对心构造的约束条件为

$$\begin{cases} l_2 = l_3 \\ \theta_1'' = \theta_2'' \end{cases} \quad (30)$$

(2) 当 $A_B = A_D = 0$ 时

$$\frac{\tan^2 \theta_1''}{\tan^2 \theta_2''} = \frac{m_1^2(m_2^2 - 1)(c^2 - m_2^2a^2)}{m_2^2(m_1^2 - 1)(c^2 - m_1^2a^2)} \quad (31)$$

由 θ_1'' 、 θ_2'' 、 m_1 、 m_2 均为定量, a 和 c 为变量, 所

以令 $T = \frac{\tan^2 \theta_1''}{\tan^2 \theta_2''} \frac{m_2^2(m_1^2 - 1)}{m_1^2(m_2^2 - 1)}$, 则由式(31)可得

$$T = \frac{c^2 - m_2^2 a^2}{c^2 - m_1^2 a^2} \Rightarrow (T-1)a^2 = (Tm_1^2 - m_2^2)c^2 \quad (32)$$

因为式(32)恒成立, 所以应满足

$$\begin{cases} T-1=0 \\ Tm_1^2 - m_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T=1 \\ m_1 = m_2 \end{cases} \quad (33)$$

所以

$$T = \frac{\tan^2 \theta_1''}{\tan^2 \theta_2'} \frac{m_2^2(m_1^2 - 1)}{m_1^2(m_2^2 - 1)} = \frac{\tan^2 \theta_1''}{\tan^2 \theta_2'} = 1 \quad (34)$$

即

$$\theta_1'' = \theta_2' \quad (35)$$

代入式(20)和式(21)可得

$$b_y = d_y \quad (36)$$

$$b_x = d_x \quad (37)$$

所以有

$$l_2 = l_3 \quad (38)$$

由于点 B 沿 BO 方向运动, CA 沿 CO 方向运动, 因为是 GAE II, 所以 EF 沿 FO 方向运动。同理, GH 沿 HO 方向运动。所以 GAE II 满足对心构造的约束条件为

$$\begin{cases} l_2 = l_3 \\ \theta_1'' = \theta_2' \\ m_1 = m_2 \end{cases} \quad (39)$$

综上可得, 两个 GAE II 满足对心构造的约束条件是式(39)。

2.2 GAE II 对心杆组的运动分析

下面给出 GAE II 对心杆组的运动分析, 以折弯杆 ABF 的杆 BA 与直线 OA 的夹角 φ 为输入变量, 以 OA 、 OB 、 OC 、 OE 和 OF 的长度为输出值, 其中 $\varphi = \angle BAC$ 。如图 5 所示, 为 GAE II 对心杆组在运动中随着变量 φ 变化的两种位置情况, 图 5a 为

图 5 GAE II 对心杆组运动分析

$\varphi \leq \pi/2$ 时的运动情况, 当点 E' 与交点 O 重合且 φ' 为锐角时, φ' 即为 φ 的最小值, 可表达为

$$\varphi' = \arcsin \left[m \sin \left[\theta - \operatorname{arccot} \left[\cot \theta + \frac{l_1}{l_2 \sin \theta} \right] \right] \right] \quad (40)$$

图 5b 为 $\varphi > \pi/2$ 时的运动情况, 当点 E' 与交点 O 重合且 φ'' 为钝角时, φ'' 即为 φ 的最大值, 可表达为

$$\varphi'' = \pi - \varphi' \quad (41)$$

随着角度 φ 的变化, 通过计算分别给出 OA 、 OB 、 OC 、 OE 和 OF 关于 φ 的长度公式

$$OA = OC - l_2 \sqrt{1 + m^2 + 2m \cos(\varphi + q)} \quad (42)$$

$$OB = \sqrt{OA^2 + l_2^2 + 2l_2 OA \cos \varphi} \quad (43)$$

$$OC = mp \csc \theta \sin(p_1 + q) \quad (44)$$

$$OE = -mp \csc \theta \sin(\alpha + p_1 + q) \quad (45)$$

$$OF = OE + l_1 \sqrt{1 + m^2 + 2m \cos(\varphi + q)} \quad (46)$$

$$p = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \alpha}$$

$$p_1 = \arccos((l_1 - l_2 \cos \alpha) / p)$$

$$q = \arcsin(\sin \varphi / m)$$

3 平面对心折展机构的回环连接

把 GAE 中的一个折弯杆看作是一个 PRRP 机构, 即由两个移动副(P)和两个转动副(R)组成, 一个 GAE 折弯杆组即为两个 PRRP 机构铰接, 且自由度为 1, 组成的回环的自由度也为 1^[13]。本文把两个 GAE I 和两个 GAE II 作为一个构造单元, 因此讨论对于多个广义折弯杆组对心折展机构的回环连接均需要偶数个折弯杆组, 下文文中用 n 表示。

3.1 GAE I 对心折展机构的回环连接

对于两个 GAE I 满足对心构造的约束条件是每个折弯杆组所对的角相等且每个折弯杆组完全相同, 即 $l_1 = l_4$, $l_2 = l_3$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\theta_1 = \theta_2$ 。所以对于 n 个顺序相连的折展机构来说, 如果满足对心构造条件, 相邻两个折弯杆组均需要满足对应的角相等, 且折弯杆组完全相同, 即

$$\begin{cases} l_{2i} = l_{2i+1} \\ l_{2i-1} = l_{2i+2} \\ \alpha_i = \alpha_{i+1} \\ \beta_i = \beta_{i+1} \\ \theta_i = \theta_{i+1} \end{cases} \quad (47)$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

式中, l_{2i} 、 l_{2i-1} 、 l_{2i+1} 和 l_{2i+2} 为杆长; α_i 、 α_{i+1} 、 β_i 和 β_{i+1} 为折弯杆夹角; θ_i 和 θ_{i+1} 为轴线夹角。

对于 n 个 GAE I 对心折展机构的回环连接, 需要首尾相连, 这样会带来新的约束条件。如图 6 所示, 回环连接满足对心构造的条件可以总结为: 过圆心的轴线把圆平分成 n 等份, n 个折弯杆组完全相同, 即

$$\begin{cases} l_{2i} = l_{2i+1} \\ l_{2i-1} = l_{2i+2} \\ \alpha_i = \alpha_{i+1} \\ \beta_i = \beta_{i+1} \\ \theta_n = \theta_i = 2\pi/n \\ l_{2n} = l_1 \end{cases} \quad (48)$$

$i = 1, \dots, n-1$

式中, l_1 、 l_{2n} 、 l_{2i-1} 、 l_{2i} 、 l_{2i+1} 和 l_{2i+2} 为杆长, α_i 、 α_{i+1} 、 β_i 和 β_{i+1} 为折弯杆夹角, θ_i 和 θ_{i+1} 为轴线夹角。

图6 n 个 GAE I 对心折展机构的回环连接

如表 1 所示, 为 $n=8, 10, 20$ 时 GAE I 对心折展机构回环连接的构型; 如图 7 所示, 为 $n=6$ 时,

图7 6 个 GAE I 对心折展机构的回环连接

GAE I 对心折展机构的回环连接的 γ 角分别为 120° 、 100° 、 90° 和 60° 时的形态, 且每个折弯杆组的末端铰接点沿着轴线运动; GAE I 对心折展机构的回环连接的约束为 n 个折弯杆组完全相同, 对 GAE I 对心杆组进行运动分析, 只需要计算一个折弯杆组即可。如图 8 所示, 为 $n=6$ 时, $l_1 = 60 \text{ mm}$, $l_2 = 90 \text{ mm}$, $\alpha = 130^\circ$, $\beta = 110^\circ$ 时, GAE I 对心折展机构中 OA , OB , OC , OE 和 OF 的长度随着 γ 角的变化曲线, 由式(12)和式(13)可得 γ 角的范围为: $40.33^\circ \leq \gamma \leq 147.03^\circ$, 坐标原点为 $(40.33^\circ, 0)$ 。

表 1 GAE I 对心折展机构回环连接的示例

$n=8$	$n=10$	$n=20$

图8 GAE I 对心杆组随着 γ 的变化曲线

3.2 GAE II 对心折展机构的回环连接

对于 n 个 GAE II 顺序相连的折展机构来说, 如果满足对心构造的约束条件, 相邻两个折弯杆组均需满足对心构造的约束条件, 即

$$\begin{cases} l_{2i} = l_{2i+1} \\ \theta_i'' = \theta_{i+1}' \\ m_i = m_{i+1} \end{cases} \quad (49)$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$

式中, l_{2i} 和 l_{2i+1} 为杆长, θ_i'' 和 θ_{i+1}' 为轴线夹角, m_i 和 m_{i+1} 为比值。

对于 n 个 GAE II 对心折展机构的回环连接, 需要首尾相连, 带来了新的约束条件, 如果满足对心构造的约束条件, 不仅相邻两个折弯杆组均需满足约束条件, 并且首尾需要满足约束条件, 如图 9 所示, 约束条件可以总结为

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{2i} = l_{2i+1} \\ l_{2n} = l_1 \\ m_i = m_{i+1} \\ \theta_i'' = \theta_{i+1}' \\ \theta_n'' = \theta_1' \\ \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i = 2\pi \\ i = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right. \quad (50)$$

式中, l_1 、 l_{2n} 、 l_{2i} 和 l_{2i+1} 为杆长, θ_1' 、 θ_n'' 、 θ_i'' 、 θ_{i+1}' 和 θ_i 为轴线夹角, m_i 和 m_{i+1} 为比值。

图 9 n 个 GAE II 对心折展机构的回环连接

如表 2 所示, 为 $n=8, 10, 20$ 时 GAE II 对心折展机构回环连接的构型; 如图 10 所示, 为 $n=6$ 时, GAE II 对心折展机构的回环连接的 φ 角分别为 120° 、 90° 、 60° 和 45° 时的形态, 每个折弯杆组的末端铰接点沿着直线运动, 并且每个中间铰接点也沿着直线运动; 对 GAE II 对心杆组进行运动分析, 由于杆长和角度不是完全相同, 需要计算不同的折弯杆组。如图 11 所示, 为 $n=6$ 时, $l_1=45\text{ mm}$, $m=1.2$, 角度 θ_i' 为等差数列关系时, GAE II 对心折展机构回环连接的其中两个折弯杆组随着 φ 角的变化曲线, 即 OA 、 OB 、 OC 、 OE 、 OF 、 OA' 、 OB' 、 OC' 、 OE' 和 OF' 的长度随着 φ 角的变化曲线。根据该机构的特点, 点 E' 与点 O 重合时取得 φ 角的范围, 由式(40)、(41)可得 φ 角的范围为: $39.49^\circ \leq \varphi \leq 140.51^\circ$, 坐标原点为 $(39.49^\circ, 0)$ 。通过图 11 可看出, OB 和 OB' 的长度变化曲线重合, 即 OB 和 OB' 时时相等。

表 2 GAE II 对心折展机构回环连接的示例

图 10 6 个 GAE II 对心折展机构的回环连接

图 11 GAE II 对心杆组随着 φ 的变化曲线

显然, 当 GAE I 的折弯杆夹角相等, 即当 $\alpha=\beta$ 时, GAE I 为 HOBBERMAN 所提出的折弯杆组(AE); 当 GAE II 的杆长的比值为 1 时, 即当 $AB=BC$, $EB=FB$ 时, GAE II 为 HOBBERMAN 所提出的折弯杆组(AE)。对心构造的约束条件可以总结为表 3。

表 3 对心构造的约束条件

	GAE I 型	GAE II 型
两个折弯杆组	$l_1 = l_4 \quad l_2 = l_3$ $\alpha_1 = \alpha_2 \quad \beta_1 = \beta_2$ $\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1'' = \theta_2' \quad l_2 = l_3$ $m_1 = m_2$
n 个折弯杆组的回环连接	$l_{2i} = l_{2i+1} \quad l_{2i-1} = l_{2i+2}$ $\alpha_i = \alpha_{i+1} \quad \beta_i = \beta_{i+1}$ $\theta_i = 2\pi/n \quad l_{2n} = l_1$	$l_{2i} = l_{2i+1} \quad l_{2n} = l_1$ $m_i = m_{i+1} \quad \theta_i'' = \theta_{i+1}'$ $\theta_n'' = \theta_1' \quad \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi$

3.3 对心折展机构的折展比

在本文中, GAE 型对心折展机构的折展比是指: 在展开的状态下最大折弯杆组单元的最远顶点到缩放中心的距离与在折叠状态下此顶点到缩放中心的距离的比值, 本文折展比只考虑一个折展过程, 不考虑奇异。

如图 12a 所示, 为 GAE I 对心折展机构的折弯

杆组在展开与折叠状态下的示意图, 连接 EC , 当 $EC \perp OF$ 时, 折弯杆组可得到最大展开状态, 即此时 OC 的长度达到最大值; 当点 A' 与点 O 重合时, 折弯杆组可得到最小折叠状态, 即 OC' 的长度达到最小值, 所以 GAE I 对心折展机构折展比为

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{\csc \theta \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \alpha}}{2l_2 \cos \left(\theta - \arcsin \frac{l_1 \sin \beta}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \beta}} \right)} \quad (51)$$

如图 12b 所示, 为杆长 $l_1 = 120 \text{ mm}$, $l_2 = 150 \text{ mm}$ 时, GAE I 对心折展机构中折弯杆组随着角度的变化折展比的变化示意图, 可以发现在杆长不变的情况下, 轴线夹角 θ 越小折展比越大。

(a) 展开与折叠状态 (b) 折展比随着 θ 的变化
图 12 GAE I 对心折展机构折展比

如图 13a 所示, 为 GAE II 对心折展机构的最大折弯杆组在展开与折叠状态下的示意图, 当 $BF \perp OF$ 且 $BA \perp OC$ 时, 折弯杆组可得到最大展开状态, 即此时 OC 的长度达到最大值; 当点 E' 与点 O 重合时, 折弯杆组可得到最小折叠状态, 即 OC' 的长度达到最小值, 通过计算可得折展比为

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{(l_1 + l_2 \cos \theta) \csc \theta + l_2 \sqrt{m^2 - 1}}{m \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \alpha}} \quad (52)$$

(a) 展开与折叠状态 (b) 折展比随着 θ 的变化
图 13 GAE II 对心折展机构折展比

图 13b 为杆长 $l_1 = 120 \text{ mm}$, $l_2 = 150 \text{ mm}$, $m = 1.5$ 时, GAE II 对心折展机构中最大折弯杆组随着角度的变化折展比的变化示意图, 可以发现在杆长不变的情况下, 轴线夹角 θ 越小折展比越大。

4 机构模型制作与验证

4.1 GAE I 对心折展机构模型

依据第 3.1 节的分析, 制作一个 $n = 6$ 的 GAE I 对心折展机构模型, 需要满足 n 个 GAE I 对心折展机构回环连接的约束条件, 具体参数满足表 4。如图 14 所示, γ 角分别为 120° 、 100° 、 90° 和 60° 时, 对应不同的形态, 并且每个折弯杆组的末端铰接点沿着直线运动, 有同一个缩放中心。发现在运动过程中的每个瞬时所有中间铰接点均在同一个圆上, 即中间铰接点到缩放中心的距离相同。

图 14 6 个 GAE I 对心折展机构模型

表 4 GAE I 对心折展机构模型的参数

折弯杆数	折弯杆类型	折弯杆夹角 $\alpha_i / (^\circ)$	折弯杆夹角 $\beta_i / (^\circ)$	杆长 l_{2i-1} / mm	杆长 l_{2i} / mm
12	2	130	110	60	90

4.2 GAE II 对心折展机构模型

依据第 3.2 节的分析, 制作一个 $n = 6$ 且角度 θ'_i 为等差数列关系的 GAE II 对心机构模型, 具体参数满足表 5。随着机构模型的运动, 每个折弯杆组的末端铰接点沿着直线运动, 每个中间铰接点也沿着直线运动, 有同一个缩放中心, 并且在运动过程中所有中间铰接点均在同一个圆上, 即中间铰接点到缩放中心的距离相同。如图 15 所示, 为对心折展机构回环的 φ 角分别为 120° 、 90° 、 60° 和 45° 时的不同形态。

图 15 6 个 GAE II 对心折展机构模型

表 5 GAE II 对心折展机构模型的参数

折弯杆数	折弯杆类型	轴线夹角 $\theta'_i / (^\circ)$	折弯杆夹角 $\alpha_i = \beta_i / (^\circ)$	杆长 l_{2i} / mm	比值 m_i
12	12	$\theta''_6 = \theta'_1 = 40$	$\alpha_1 = 104$	$l_2 = l_3 = 77.34$	1.2
		$\theta''_1 = \theta'_2 = 36$	$\alpha_2 = 112$	$l_4 = l_5 = 69.74$	
		$\theta''_2 = \theta'_3 = 32$	$\alpha_3 = 120$	$l_6 = l_7 = 61.77$	
		$\theta''_3 = \theta'_4 = 28$	$\alpha_4 = 128$	$l_8 = l_9 = 53.51$	
		$\theta''_4 = \theta'_5 = 24$	$\alpha_5 = 136$	$l_{10} = l_{11} = 45$	
		$\theta''_5 = \theta'_6 = 20$	$\alpha_6 = 120$	$l_{12} = l_1 = 84.57$	

5 结论

(1) 分析了对心折展机构构造的约束条件, 给出了基于多个广义折弯杆组的对心折展机构一般化构造方法。

(2) 实现了多个广义折弯杆组的对心构造。通过分析得到了两个 GAE I 和两个 GAE II 满足对心构造的约束条件; 并且得到由 n 个 GAE I 和 n 个 GAE II 组成的折展机构回环连接满足对心构造的约束条件; 给出了 GAE I 和 GAE II 折弯杆组的折展比。

(3) 构造了由 6 个 GAE I 和 6 个 GAE II 构成的平面对心折展机构的三维模型, 制作出两款机构模型, 其中 GAE I 对心折展机构模型的角度和杆长均相等, GAE II 对心折展机构模型的角度是等差数列, 验证了构造方法的可行性。

(4) 基于多个折弯杆组构造了一类平面对心折展机构, 丰富了平面折展机构类型, 为折展机构的应用提供了新的选择, 也为空间对心折展机构的构造奠定了研究基础。

参 考 文 献

- [1] PINERO E P. Project for a mobile theatre[J]. Architectural Design, 1961, 12(1): 154-155.
- [2] ZEIGLER T R. Collapsible self-supporting structures and panels and hub therefor: US, 4290244[P]. 1981-09-22.
- [3] ESCRIG F. Expandable space structures[J]. International Journal of Space Structures, 1985, 1(2): 79-91.
- [4] ESCRIG F, VALCARCEL J P. Geometry of expandable space structures[J]. International Journal of Space Structures, 1993, 8(1): 71-84.
- [5] 廖启征, 李端玲. 平面图形放缩机构[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 140-143.
LIAO Qizheng, LI Duanling. Mechanisms for scaling planar graphs[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 140-143.
- [6] 廖启征, 李端玲. 单层及多层平面图形放缩机构的构造方法[J]. 机械工程学报, 2008, 44(6): 43-48.
LIAO Qizheng, LI Duanling. Construction method of monolayer and mechanism for scaling planar graphs[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(6): 43-48.
- [7] 李端玲, 张忠海, 于振. 球面剪叉可展机构的运动特性分析[J]. 机械工程学报, 2013, 49(13): 1-7.
LI Duanling, ZHANG Zhonghai, YU Zhen. Kinematics analysis of spherical scissors deployable mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(13): 1-7.
- [8] SUN Y, WANG S, MILLS J K, et al. Kinematics and dynamics of deployable structures with scissor-like-elements based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(4): 655-662.
- [9] SUN Y, WANG S, LI J, et al. Mobility analysis of the deployable structure of SLE based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(4): 793-800.
- [10] HOBERMAN C. Reversibly expandable doubly-curved truss structure: US, 4942700[P]. 1990-07-24.
- [11] HOBERMAN C. Radial expansion/retraction truss structures: US, 5024031[P]. 1991-06-18.
- [12] YOU Z, PELLEGRINO S. Foldable bar structures[J]. International Journal of Solids & Structures, 1997, 34(15): 1825-1847.
- [13] PATEL J, ANANTHASURESH G K. A kinematic theory for radially foldable planar linkages[J]. International Journal of Solids & Structures, 2007, 44(18): 6279-6298.
- [14] BAI G, LIAO Q, LI D, et al. Synthesis of scaling mechanisms for geometric figures with angulated-straight elements[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering

- Science, 2013, 227(12): 2795-2809.
- [15] LI R, YAO Y, KONG X. A class of reconfigurable deployable platonic mechanisms[J]. Mechanism & Machine Theory, 2016, 105: 409-427.
- [16] LI R, YAO Y, DING X. A family of reconfigurable deployable polyhedral mechanisms based on semiregular and Johnson polyhedral[J]. Mechanism & Machine Theory, 2018, 126: 344-358.
- [17] 杨毅, 丁希仑. 基于空间多面体向心机构的伸展臂设计研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(5): 26-34.
- YANG Yi, DING Xilun. Design and analysis of mast based on spatial polyhedral linkages mechanism along

radial axes[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(5): 26-34.

作者简介: 孙学敏, 女, 1988 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机构学与机器人学。

E-mail: 15116344@bjtu.edu.cn

姚燕安(通信作者), 男, 1972 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学与机器人学。

E-mail: yayao@bjtu.edu.cn

李锐明, 男, 1985 年出生, 博士。主要研究方向为机构学与机器人学。

E-mail: liruiming007@163.com

刘然, 女, 1991 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机构学与机器人学。

E-mail: 14116360@bjtu.edu.cn

魏超然, 男, 1994 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机构学与机器人学。

E-mail: 18116023@bjtu.edu.cn