

DOI: 10.3901/JME.2013.23.117

轴向运动功能梯度梁的横向振动*

姚晓莎¹ 王忠民¹ 赵凤群²

(1. 西安理工大学土木建筑工程学院 西安 710048; 2. 西安理工大学理学院 西安 710048)

摘要: 新型非均匀复合材料, 功能梯度材料具有防止脱层和减缓热应力等优良性能, 将其应用于功能梯度梁的结构有着非常重要的工程应用价值。基于 Euler-Bernoulli 梁理论和 Hamilton 原理, 建立轴向运动功能梯度梁横向自由振动的运动微分方程, 其中假设功能梯度梁的材料特性沿梁厚度方向按各组分材料体积分数的幂函数连续变化; 再对运动微分方程和边界条件进行量纲一处理, 采用微分求积法对其进行离散化, 导出系统的广义复特征方程, 然后计算分析轴向运动功能梯度简支梁横向振动复频率的实部和虚部随量纲一轴向运动速度、梯度指标等参数的变化情况, 并讨论量纲一轴向运动速度和梯度指标对功能梯度梁的横向振动特性以及失稳形式的影响。

关键词: 功能梯度材料 轴向运动梁 横向振动 微分求积法

中图分类号: O326

Transverse Vibration of Axially Moving Beam Made of Functionally Graded Materials

YAO Xiaosha¹ WANG Zhongmin¹ ZHAO Fengqun²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048;

2. School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048)

Abstract: As a new type of heterogeneous composite materials, the functionally gradient materials with preventing the delaminating and slowing down the heat stress are applied to the engineering structure of the beams, which has an important engineering value. Based on Euler-Bernoulli beam theory and the Hamilton's principle, the differential equations of motion of the transverse free vibration of the axially moving beam made of functionally gradient materials is derived, where the materials properties of the functionally gradient beam are assumed to vary continuously follows a power law distribution of the volume fraction of the constituents along the thickness of the beam. Dimensionless parametrization is carried out for the differential equations and boundary conditions, and the nondimensional differential equations are discretized by differential quadrature method, and then the system complex characteristic equation is derived. With the change of the dimensionless axial movement speed and gradient index, the complex frequencies of transverse vibration of the axially moving beam made of functionally gradient materials with simply supported are analyzed, and the influences of the dimensionless axial movement speed and gradient index on the transverse vibration characteristics and instability forms of the axially moving beam made of functionally gradient materials are discussed.

Key words: Functionally graded materials Axially moving beam Transverse vibration Differential quadrature method

0 前言

随着科学与技术的发展, 工程结构中许多关键构件因其特殊的工作环境和承受的荷载而对材料性

能提出了相应的特殊要求, 所以具有性能可设计的功能梯度材料(Functionally gradient materials, FGM)被广泛应用在这类工程构件中。近二十多年来, 对功能梯度材料及其构件的力学行为的研究已取得不少成就。HUANG 等^[1]对功能梯度各向异性弹性悬臂梁在线性分布载荷作用下的弯曲问题进行了研究。PIOVANA 等^[2]研究了具有环形截面的轴向运动 FGM 梁的振动特性, 并用有限元法求解。LI^[3]考虑

* 国家自然科学基金(11272254)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20106118110006)和陕西省教育厅专项科研基金(11JK0850)资助项目。20120802 收到初稿, 20130924 收到修改稿

转动惯量和剪切变形的影响,研究了功能梯度材料的层合梁、Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的静态特性,并给出了 Euler-Bernoulli 梁理论和 Rayleigh 梁理论等都可由 Timoshenko 梁理论退化得来。李世荣等^[4]研究了功能梯度材料 Euler 梁在温度场作用下的屈曲和自由振动行为,并分析和讨论梁的材料梯度参数、温度场分布参数等因素对过屈曲变形和振动响应的影响。MESUT^[5]基于各种不同的梁理论,分析了在移动载荷作用下功能梯度梁的动态特性。PIOVANA 等^[6]研究了功能梯度薄壁梁在受到轴向表面外载荷作用下并考虑剪切变形和热弹性的影响下的动态响应。YAN 等^[7]在考虑横向剪切变形下,研究了弹性地基上具有边界裂缝的功能梯度梁在以常速运动的横向载荷作用下的动态响应问题。MOHANTY 等^[8]利用有限元法求解了在温克勒弹性地基上功能梯度梁和功能梯度夹层梁的动态稳定性,并给出了功能梯度梁的材料特性参数的不稳定分布的对计算结果的影响。KOCATURK 等^[9]基于 Timoshenko 梁理论,利用有限元法结合牛顿-森迭代法分析了功能梯度悬臂梁在非伴随横向均布载荷下产生大位移和大转角的非线性静态特性,并得出几何非线性和材料分布对 FGM 梁的静态响应影响甚大。MA 等^[10]基于一阶剪切变形梁理论,研究了功能梯度梁在平面热载荷作用下非线性静态响应的精确解;WEI 等^[11]考虑轴向载荷、转动惯量和剪切变形的影响,提出了对具有边界裂缝的功能梯度梁自由振动特性的分析方法。上述研究中,很少考虑到轴向运动速度对 FGM 梁的横向振动的影响。

本文基于 Euler-Bernoulli 梁理论,研究了轴向运动 FGM 梁的横向自由振动的振动特性。假设功能梯度梁的材料特性是沿厚度方向按各组分材料的体积分数的幂函数连续变化,应用 Hamilton 原理,建立了轴向运动 FGM 梁横向振动的运动微分方程,采用微分求积法(Differential quadrature method, DQM)进行数值求解,讨论了 FGM 梁量纲一轴向运动速度、梯度指标等参数对轴向运动 FGM 梁的横向振动特性的影响。

1 轴向运动 FGM 梁的运动微分方程

设一轴向运动 FGM 梁,长度为 L ,横截面为矩形,宽度为 b ,高度为 h ,坐标系的选取如图 1 所示。假设梁的轴向运动速度 η 恒定,仅考虑梁的横向振动。

1.1 功能梯度梁的材料特性

假设 FGM 梁由陶瓷(上层)和金属(下层)制成,

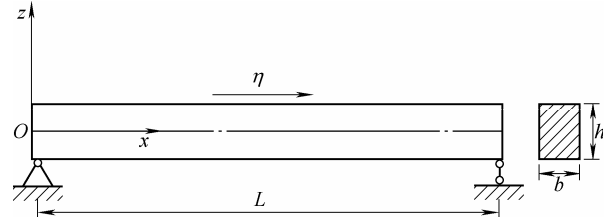


图 1 轴向运动 FGM 简支梁

可将其材料的有效材料特性表示为^[12]

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m = P_m \left[(\beta_p - 1) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + 1 \right] \quad (1)$$

式中, $\beta_p = P_c/P_m$, P_c 、 P_m 分别表示组成 FGM 的金属和陶瓷材料材料特性,即弹性模量 E_m 、切变模量 G_m 和密度 ρ_m 。

1.2 运动微分方程

根据 Euler-Bernoulli 梁理论,梁上任意一点的位移分量可表示为

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) - zw_{,x}(x, t) + \eta t \quad (2a)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t) \quad (2b)$$

式中, $u(x, t)$, $w(x, t)$ 分别为梁轴线上任一点的轴向位移和横向位移; ηt 为轴向运动速度 η 产生的轴向刚体位移; “,” 表示对坐标 x 的导数。

由几何方程,应变分量为

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx} \quad (3)$$

根据 Hooke 定律有

$$\sigma_x = E(z)\varepsilon_x = E(z)(u_{,x} - zw_{,xx}) \quad (4)$$

式中, ε_x , σ_x 分别是正应变和正应力,则梁的应变能

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \sigma_x \varepsilon_x dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ D_1(u_{,x})^2 - 2D_2 u_{,x} w_{,xx} + D_3 (w_{,xx})^2 \right\} dx \quad (5)$$

式中, A 是梁的横截面面积,且有

$$(D_1, D_2, D_3) = \int_A E(z)(1, z, z^2) dA \quad (6)$$

在轴向运动梁的横向振动中,梁上任意一点的速度

$$v_x = \dot{u}_x(x, z, t) = \dot{u}(x, t) - z\dot{w}_{,x}(x, t) + \eta \quad (7)$$

$$v_z = \dot{w}(x, t) + \eta w_{,x}(x, t) \quad (8)$$

式中, “ $\dot{}$ ” 表示对时间 t 的导数。

梁的动能

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho(z) (v_x^2 + v_z^2) dA dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ I_1 (\dot{u}^2 + \eta^2 + 2\eta\dot{u} + \dot{w}^2 + \eta^2 (w_{,x})^2 + 2\eta\dot{w}w_{,x}) - 2I_2\dot{w}_{,x} - 2I_2\dot{u}\dot{w}_{,x} + I_3(\dot{w}_{,x})^2 \right\} dx \quad (9)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_A \rho(z) (1, z, z^2) dA \quad (10)$$

根据 Hamilton 原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - U) dt = 0$ 可得

$$D_2 w_{,xxx} - I_2 \ddot{w}_{,x} - D_1 u_{,xx} + I_1 \ddot{u} = 0 \quad (11)$$

$$D_3 w_{,xxxx} + I_1 (\ddot{w} + \eta^2 w_{,xx} + 2\eta\dot{w}_{,x}) - I_3 \ddot{w}_{,xx} + D_2 u_{,xxx} - I_2 \ddot{u}_{,x} = 0 \quad (12)$$

在给定的轴向运动速度 η 下, 梁的轴向惯性力 $I_1 \ddot{u}$ 和轴向惯性力产生的横向分布载荷 $I_2 \ddot{u}_{,x}$ 相对较小, 故忽略这两项的影响。式(11)、(12)可写为

$$D_2 w_{,xxx} - I_2 \ddot{w}_{,x} - D_1 u_{,xx} = 0 \quad (13)$$

$$D_3 w_{,xxxx} + I_1 (\ddot{w} + \eta^2 w_{,xx} + 2\eta\dot{w}_{,x}) - I_3 \ddot{w}_{,xx} + D_2 u_{,xxx} = 0 \quad (14)$$

把式(13)对 x 求一阶偏导数, 求出 $u_{,xxx}$, 再代入式(14), 得轴向运动 FGM 梁的运动微分方程为

$$\left(D_3 - \frac{D_2^2}{D_1} \right) w_{,xxxx} - \left(I_3 - I_2 \frac{D_2}{D_1} \right) \ddot{w}_{,xx} + I_1 (\ddot{w} + \eta^2 w_{,xx} + 2\eta\dot{w}_{,x}) = 0 \quad (15)$$

简支梁的边界条件为

$$\begin{cases} w(0, t) = 0 & w(L, t) = 0 \\ w_{,xx}(0, t) = 0 & w_{,xx}(L, t) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

1.3 系数的计算

由式(6)、(10)分别得

$$I_1 = \int_A \rho(z) dA = \rho_m A \alpha_1 \quad (17a)$$

$$I_2 = \int_A \rho(z) z dA = \rho_m S \alpha_2 \quad (17b)$$

$$I_3 = \int_A \rho(z) z^2 dA = \rho_m I \alpha_3 \quad (17c)$$

$$D_1 = \int_A E(z) dA = E_m A \gamma_1 \quad (18a)$$

$$D_2 = \int_A E(z) z dA = E_m S \gamma_2 \quad (18b)$$

$$D_3 = \int_A E(z) z^2 dA = E_m I \gamma_3 \quad (18c)$$

$$S = \frac{bh^2}{2} \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad \alpha_1 = \frac{\beta_\rho - 1}{k + 1} + 1$$

$$\alpha_2 = (\beta_\rho - 1) \left(\frac{2}{k + 2} - \frac{1}{k + 1} \right)$$

$$\alpha_3 = (\beta_\rho - 1) \left(\frac{3}{k + 1} - \frac{12}{k + 2} + \frac{12}{k + 3} \right) + 1$$

$$\gamma_1 = \frac{(\beta_E - 1)}{k + 1} + 1$$

$$\gamma_2 = (\beta_E - 1) \left(\frac{2}{k + 2} - \frac{1}{k + 1} \right)$$

$$\gamma_3 = (\beta_E - 1) \left(\frac{3}{k + 1} - \frac{12}{k + 2} + \frac{12}{k + 3} \right) + 1$$

将式(17)、(18)代入方程式(15), 得

$$E_m [I \gamma_3 - (S^2 \gamma_2^2) / (A \gamma_1)] w_{,xxxx} + \rho_m A \alpha_1 (\ddot{w} + \eta^2 w_{,xx} + 2\eta\dot{w}_{,x}) - \rho_m [I \gamma_3 - (S^2 \alpha_2 \gamma_2) / (A \gamma_1)] \ddot{w}_{,xx} = 0 \quad (19)$$

1.4 量纲一表示

引入下列量纲一变量

$$W = \frac{w}{L} \quad X = \frac{x}{L} \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{E_m I}{\rho_m A}} \quad \nu = \eta L \sqrt{\frac{\rho_m A}{E_m I}}$$

$$\lambda = L/h \quad P = (\gamma_1 \gamma_3 - 3\gamma_2^2) / (\alpha_1 \gamma_1)$$

$$Q = (\alpha_3 \gamma_1 - 3\alpha_2 \gamma_2) / (12\lambda^2 \alpha_1 \gamma_1)$$

则方程式(19)的量纲一形式为

$$P \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \nu^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2\nu \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial \tau} - Q \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial \tau^2} = 0 \quad (20)$$

设式(20)的解为 $W(X, \tau) = W(X) \exp(i\Omega\tau)$, 则

$$PW''' + (\nu^2 - Q\Omega^2)W'' + 2\nu\Omega W' + \Omega^2 W = 0 \quad (21)$$

式中, Ω 是量纲一复频率; 边界条件为

$$\begin{cases} W(0) = 0 & W(1) = 0 \\ W''(0) = 0 & W''(1) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

2 微分求积法

采用微分求积法^[13-14]求解微分方程式(21)。选取非均匀网点共 N 个, 网点的坐标为

$$X_1 = 0 \quad X_2 = \delta \quad X_{N-1} = 1 - \delta \quad X_N = 1$$

$$X_i = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{i-2}{N-3} \pi \right) \quad i = 3, 4, \dots, N-2$$

对方程式(21)、边界条件式(22)离散化, 并按 Ω 的降幂排列, 则可得到模拟方程为

$$(W_i - Q \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} W_j) \Omega^2 + 2\nu \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} W_j \Omega + P \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} W_j + \nu^2 \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} W_j = 0$$

$$i = 3, 4, \dots, N-2 \quad (23)$$

$$W_1 = 0 \quad W_N = 0 \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{2j}^{(2)} W_j = 0 \quad \sum_{j=1}^N A_{N-1,j}^{(2)} W_j = 0 \quad (25)$$

式(23)、(24)、(25)可写为矩阵形式

$$(\Omega^2 \mathbf{m} + \Omega \mathbf{c} + \mathbf{k}) \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (26)$$

式中, \mathbf{m} , \mathbf{c} , \mathbf{k} 均为 $(N-2) \times (N-2)$ 矩阵, $\mathbf{W} = (W_3 \ W_4 \ \dots \ W_{N-2})^T$ 为列阵。

3 数值算例与分析

设梁的参数如下。长高比 $\lambda = 10$ 。金属材料的特性: $E_m = 210 \text{ GPa}$, $\rho_m = 7800 \text{ kg/m}^3$ 。陶瓷材料特性: $E_c = 390 \text{ GPa}$, $\rho_c = 3960 \text{ kg/m}^3$ 。 $\beta_E = E_c / E_m = 1.86$, $\beta_\rho = \rho_c / \rho_m = 0.51$ 。

3.1 无运动速度的 FGM 梁

在式(21)中, 令轴向速度 $\nu = 0$, 分别取梯度指标 $k \rightarrow \infty$ 和 $k = 0$, 即材料退化得到无轴向运动的均质金属和陶瓷材料梁。本文计算了均质金属和陶瓷材料简支梁的前六阶固有频率(表), 通过与精确解的比较, 说明了 DQM 法求解梁横向振动特性方面有很高的精度, 是一种很有效的计算方法。

表 均质梁横向自由振动的前六阶固有频率($\nu = 0$)

阶次	本文解		精确解 ^[15]
	$N=19 \ (k=10^5)$	$N=19 \ (k=0)$	
	$\delta=0.000\ 001$	$\delta=0.000\ 001$	
一阶	9.869 6	18.848	9.869 6
二阶	39.479 0	75.393	39.478
三阶	88.827 0	169.630	88.826
四阶	157.910 0	301.570	157.91
五阶	246.740 0	471.210	246.74
六阶	355.310 0	678.540	355.31

在表中, 对均匀陶瓷材料梁($k = 0$, $\nu = 0$), 其固有频率与精确解不同, 表现为每阶对应频率数据的比值都近似为 1.91, 主要原因是: 在引入量纲一时间变量 $\tau = \sqrt{\frac{E_m I}{\rho_m A}} \cdot \frac{t}{L^2}$ 时, 是以金属材料的 E_m 和 ρ_m 作为参量表述的, 而当以陶瓷材料作为参量表述时, 根据材料参数比值 $\beta_E = E_c / E_m = 1.86$,

$\beta_\rho = \rho_c / \rho_m = 0.51$, 在将其转化为陶瓷材料代入运算时会出现比值 1.91。

另外, 在轴向运动速度 $\nu = 0$ 时, 梯度指标对无运动速度的 FGM 梁横向自由振动固有频率的影响如图 2 所示。当梯度指标较小时, 其对 FGM 梁固有频率的影响较大, 当梯度指标 k 大于 7 以后, 其变化不再明显。

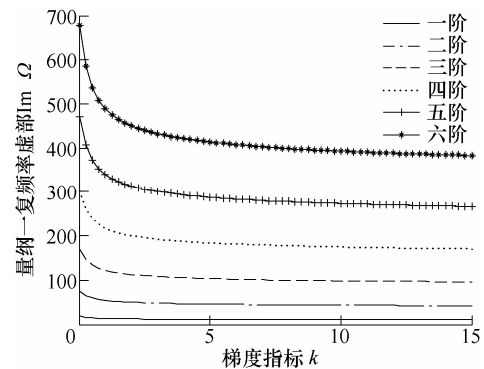
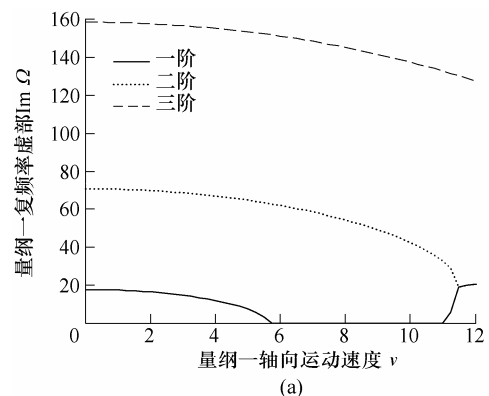


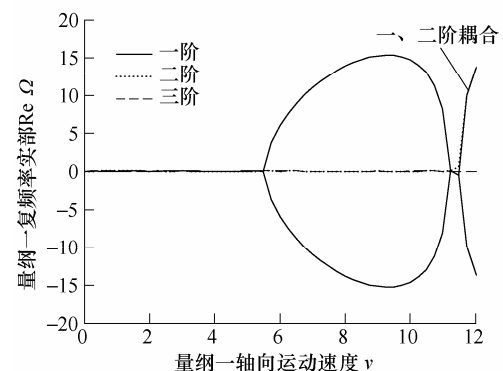
图 2 前六阶量纲一固有频率随梯度指标的变化曲线

3.2 有运动速度的 FGM 梁

图 3~5 是在取 $\delta = 0.000\ 001$ 、网点数 $N = 19$ 、梯度指标 k 分别为 0.1, 1 和 10 三种情况下, 轴向运动 FGM 梁横向振动的前三阶量纲一复频率的虚部及实部随量纲一轴向运动速度 ν 的变化曲线图。

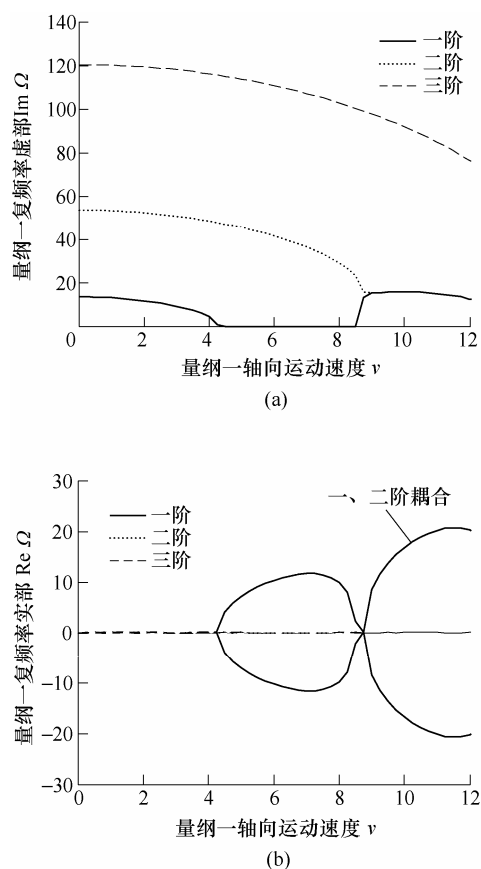
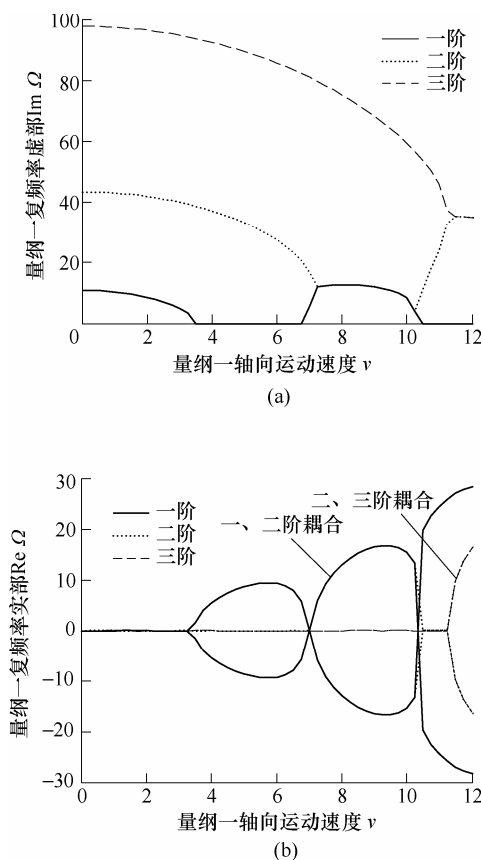


(a)



(b)

图 3 前三阶复频率随轴向速度的变化曲线($k = 0.1$)

图4 前三阶复频率随轴向速度的变化曲线($k=1$)图5 前三阶复频率随轴向速度的变化曲线($k=10$)

在图3中, 即 $k=0.1$ 时, 量纲一复频率的虚部在 $\nu=5.75$ 处第一阶模态出现发散失稳, 即为临界

发散速度。在 $\nu=11.25$ 处达到再稳定, 这段区间为发散失稳区间。在 $\nu=11.5$ 处第一阶模态和第二阶模态发生耦合模态颤振。第三阶模态随速度增大逐渐减小。图4中, 即 $k=1$ 时, 在 $\nu=4.5$ 处, 第一阶模态发散失稳, 在 $\nu=9$ 处, 第一阶模态和第二阶模态发生耦合模态颤振, 第三阶模态也是随速度的增大而减小。如图5所示, 即 $k=10$ 时, 第一阶模态在 $\nu=3.5$ 处就出现发散失稳, 在 $\nu=7.25$ 到 $\nu=10.25$ 之间第一阶和第二阶模态发生耦合模态颤振, 在 $\nu=10.5$ 处第一阶模态再次发散失稳, 且第二阶模态和第三阶模态在 $\nu=11.5$ 处发生耦合。由以上分析可见, 随着梯度指标和量纲一轴向运动速度的变化, 轴向运动 FGM 梁横向振动的临界发散速度和耦合速度有明显变化。

4 结论

(1) 在无运动速度的情况下, 随着梯度指标的增加, FGM 梁横向自由振动的固有频率逐渐降低, 并在梯度指标较小时变化明显, 当梯度指标大于 7 时, 这种变化趋于平稳, 且各阶固有频率的变化趋势类似。

(2) 随着轴向运动速度的增加, FGM 梁横向振动的前三阶量纲一复频率的虚部逐渐减小并出现发散失稳和耦合模态颤振现象。随着梯度指标的增加, 轴向运动 FGM 梁的临界发散速度和耦合速度明显减小, 且发散失稳区间越来越小; 当梯度指标增大到某一数值时, 材料接近金属材料, 其复频率不再随着梯度指标的增加而明显变化。可见, 在一定范围内, 梯度指标对有轴向运动速度的 FGM 梁的横向振动特性影响较大, 因此研究有轴向运动速度的 FGM 梁的横向振动特性更有助于工程应用的分析。

(3) 本文采用 DQM 法对轴向运动 FGM 梁的横向振动特性进行数值求解, 其数学原理简单, 可操作性强, 易在计算机上实施, 精度较高, 是一种很好的计算方法。

参 考 文 献

- [1] HUANG Dejin, DING Haojiang, CHEN Weiqui. Analytical solution for functionally graded anisotropic cantilever beam subjected to linearly distributed load[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(7): 763-768.
- [2] PIOVANA M T, SAMPAIO R. Vibrations of axially moving flexible beams made of functionally graded materials[J]. Thin-Walled Structures, 2008, 46(16): 1155-1165.

- 112-121.
- [3] LI X F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 318(4): 1210-1229.
- [4] 李世荣, 苏厚德. 热环境中功能梯度材料 Euler 梁的自由振动[J]. 兰州理工大学学报, 2008, 34(4): 164-169. LI Shirong, SU Houde. Free vibration of Euler beams with functionally graded materials in thermal environment[J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2008, 34(4): 164-169.
- [5] MESUT S. Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories[J]. Composite Structures, 2009, 92(4): 904-917.
- [6] PIOVANA M T, MACHADO S P. Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beams with graded material properties[J]. Thin-Walled Structures, 2010, 49(3): 437-447.
- [7] YAN Ting, KITIPOMCHAI S, YANG Jie, et al. Dynamic behavior of edge-cracked shear deformable functionally graded beams on an elastic foundation under a moving load[J]. Composite Structures, 2011, 93(11): 2992-3001.
- [8] MOHANTY S C, DASH R R, ROUT T. Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's elastic foundation[J]. Nuclear Engineering and Design, 2011, 241(8): 2698-2715.
- [9] KOCATURK T, SIMSEK M, AKBAS S D. Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko beam composed of functionally graded material[J]. Science and Engineering of Composite Materials, 2011, 18(1-2): 21-34.
- [10] MA L S, LEE D W. Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in-plane thermal loading[J]. European Journal of Mechanics A-Solids, 2012, 31(1): 13-20.
- [11] WEI Dong, LIU Yinghua, XIANG Zhihai. An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks[J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(7): 1686-1700.
- [12] 沈惠申. 功能梯度复合材料板壳结构的弯曲、屈曲和振动[J]. 力学进展, 2004, 34(1): 53-60. SHEN Huishen. Bending, buckling and vibration of the functionally graded plates and shells[J]. Advances in Mechanics, 2004, 34(1): 53-60.
- [13] ZHOU Yinfeng, WANG Zhongmin. Transverse vibration characteristics of axially moving viscoelastic plate[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(2): 209-218.
- [14] ZHOU Yinfeng, WANG Zhongmin. Dynamic behaviors of axially moving viscoelastic plate with varying thickness[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 22(2): 276-281.
- [15] 方同, 薛璞. 振动理论及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998. FANG Tong, XUE Pu. Theory and application of vibration[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998.

作者简介: 姚晓莎, 女, 1988 年出生。主要研究方向为结构动力学。

E-mail: yaoxiaosha0219@163.com

王忠民(通信作者), 男, 1957 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械结构动力学。

E-mail: wangzhongm@xaut.edu.cn