DOI: 10.3901/JME.2019.01.081

基于数字图像处理方法的弹塑性倾斜接触冲击动力学试验与数值分析*

王尧^{1,2} 孟文俊^{1,2} 项丹³ 李淑君^{1,2}

- (1. 太原科技大学机械工程学院 太原 030024;
2. 太原科技大学智能物流装备山西省重点实验室 太原 030024;
3. 太重集团油膜轴承分公司 太原 030024)

摘要: 针对弹塑性倾斜冲击问题, 测量和预测冲击对象在接触冲击过程中的运动参数及接触力仍然是一个难点。考虑振动响应的影响, 结合假设模态法和广义动量定理建立冲击对象的运动模型; 根据 Jackson-Green 模型, 将振动响应考虑到接触变形中, 系统探讨和研究了弹塑性接触冲击过程中的接触力变化; 基于数字图像处理方法, 通过设计多标识点的冲击试验, 描述与跟踪冲击对象在接触冲击过程中的运动规律, 并对恢复系数和冲击后的运动参数进行试验与仿真对比分析。试验与仿真结果表明: 滑动摩擦判断条件 Δ 呈 W 形分布, 且存在 3 个临界冲击角, 分别为 27.5° 、 42.5° 和 58.4° ; 对于初始冲击角 $\theta=45^\circ$, 接触点冲击后反弹速度、角速度和恢复系数的仿真与试验结果基本吻合, 其相对误差均小于 5%, 验证了所建模型的正确性。
关键词: 数字图像处理; 倾斜冲击; 弹塑性材料; 接触力学; 恢复系数
中图分类号: TB122; TP751

Experimental and Numerical Analysis of the Elasto-plastic Oblique Contact-impact Dynamics Using Digital Image Processing Method

WANG Yao^{1,2} MENG Wenjun^{1,2} XIANG Dan³ LI Shujun^{1,2}

- (1. School of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024;
2. Key Laboratory of Intelligent Logistics Equipment of Shanxi Province, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024;
3. Oil-film Bearing Branch, Taiyuan Heavy Machinery Group Co., Ltd., Taiyuan 030024)

Abstract: For the elasto-plastic oblique impact problems, it is still difficult to measure and predict the motion parameters and contact force of the impact object during the contact impact events. With consideration of vibration responses, the kinetic model of impact object is established based on the assumed mode method and generalized momentum theorem. Considering the vibration responses in the contact deformation, the changes of contact force during the elasto-plastic contact impact has been studied theoretically based on the Jackson-Green model. The impact test with multi-markers is performed. The digital image processing method is used to describe and track the motion law of the impact object during the contact impact. Experimental results for the coefficient of restitution and the motion parameters after impact have been compared with simulations. The experimental and simulation results show that the judgment condition for sliding friction, Δ , presents the W-distribution; and, three critical initial impact angles, 27.5° , 42.5° , and 58.4° are found to determine whether the impact object slides or not. For the impact angle $\theta=45^\circ$, simulation results are found to be in good agreement with the experimental data in terms of the rebound velocity of the contact point, the angular velocity and the coefficient of restitution. All the relative error is less than 5%. Thus, it can be verified that the established model is relatively accurate.

Key words: digital image processing; oblique impact; elastic-plastic material; contact mechanics; coefficient of restitution

0 前言

冲击(或碰撞)与振动问题大量普遍存在于机械

系统的设计与应用之中, 如航天空间结构^[1-2]、人造仿生结构^[3-4]、精密智能结构^[5-7]、梁杆构件系统^[8-10]、啮合传动系统^[11]等。冲击现象是瞬时的, 通常在极短的时间内发生, 并伴随有较大的接触力和冲击对象明显的速度变化^[12-13]。同时, 为了满足工程精度的高要求或者获得高保真度的数值仿真结果, 冲击

* 国家自然科学基金(51575370)、二〇一六山西省回国留学人员科研(2016-093、2016-094)和山西省研究生优秀创新(2016BY134)资助项目。
20180113 收到初稿, 20180928 收到修改稿

对象在冲击过程中的机械振动是一个不容忽视的重要因素^[14-15]。由于接触冲击相关理论的复杂性与局限性,接触冲击与振动问题受到了越来越多研究学者和工程技术人员的广泛关注。

动力学建模与分析是研究接触冲击问题时必不可少的环节。常见的动力学模型有:牛顿-欧拉方程(Newton-Euler)、凯恩方程(Kane)、拉格朗日方程(Lagrange)、吉布斯-阿佩尔方程(Gibbs-Appell)、哈密顿原理(Hamilton)等^[16-18]。上述动力学方程虽然表达形式不同,但是在理论上均可以相互等价推导。在接触冲击问题中,对冲击过程中接触力的求解至今仍是一个研究热点。目前,国内外诸多研究人员在理论分析、数值仿真及试验研究等方面对两构件接触冲击模型的研究已取得了较为显著的研究成果,主要可分为压陷和扁平两类接触模型;如压陷接触模型有:Kogut-Etsion 模型^[19-20]、Jackson-Green 模型^[21]、Thornton 修正模型^[22-23]等;而扁平接触模型有:Kogut-Komvopoulos 模型^[24]、Ye-Komvopoulos 模型^[25]、Brake 模型^[26]等。前者认为冲击对象是刚性的,被冲击对象发生变形;反之,后者则认为被冲击对象是刚性的,冲击对象发生变形。GHEADNIA 等^[27]则认为接触冲击的两个对象均发生变形,并基于有限元分析(Finite element analysis, FEA)和试验结果,对特定对象垂直冲击接触后永久变形的公式进行了修正与验证;之后,对圆杆在弹塑性倾斜冲击过程中的恢复系数和反弹速度进行了试验与已有模型的比较分析^[28]。对于弹性接触冲击,赫兹接触理论被公认为是最有价值的参考文献;而对于弹塑性倾斜冲击,各个模型构建了不同的接触力数学表达式,针对不同的应用对象各有优劣,并且鉴于当前的试验条件限制,接触力是无法从试验中获得的。因此,建立合适的接触冲击模型对于间接获得较准确的接触力是很重要的。

随着计算机科学与视觉技术的不断发展,数字图像处理技术在国民经济的许多领域已经得到广泛的应用,如气象遥感、生物医学、国防航测等^[29],其中数字图像相关法(Digital image correlation, DIC)和粒子图像测速法(Particle image velocimetry, PIV)技术在各学科领域具有广阔的应用前景。数百年来,由于极短的冲击时间(量级一般在微秒与毫秒之间)和微小的变形量(极低的冲击速度或冲击高度)是限制测量方法可行性的两个重要因素,因此,测量和预测冲击对象在接触冲击过程中的运动仍然是一个难题。数字图像处理技术已经被用于测量冲击对象的运动过程,如: CROSS 等^[30]研究了中空橡胶球与花岗岩表面的倾斜冲击,但仅限于较高的冲击速度

范围, REZAEI 等^[31]跟踪足球在倾斜冲击过程中的运动,发现球中心位置的误差为 2 个像素,但是没有得到冲击过程的试验结果等;可见,虽然单一像素精度可适用于跟踪冲击对象在垂直冲击过程中的位置变量,但是单一像素精度对于处理冲击对象在接触冲击中的旋转变量(冲击角)是远远不够的。

本文以弹塑性材料为研究对象,通过设计多标识点的冲击试验,并基于 Matlab 数字图像处理方法,描述与跟踪冲击对象在接触冲击过程中的运动规律;考虑振动响应的影响,根据广义动量定理建立冲击对象的运动模型,获得冲击前后的接触点速度和角速度;并在此基础上,结合 Jackson-Green 模型,系统地探讨和研究了弹塑性接触冲击过程中的接触力变化;最后重点对恢复系数和运动参数进行试验与仿真结果对比分析,以验证模型的正确性。

1 试验方案

1.1 试验装置

试验测试装置(Source: Auburn University)主要由固定底座、3D 高速摄像机(NAC HotShot 512 SC)、两个背景光源(LOWEL DP Light)、两个吸盘电磁铁(ZYE1-P 20/15 DC 12V)、控制器、计算机、坠落装置、电源等组成,如图 1 所示。其中坠落装置可以调节冲击对象的坠落高度(H)和初始冲击角(θ)。

图 1 试验装置示意图

1.2 试验材料

冲击对象(圆形杆件)材质为 20 钢,长度 l 为 150 mm,直径 d 为 18 mm;被冲击对象(固体平面)材质为巴氏合金,牌号 ZSnSb11Cu6,外形尺寸为长方体(100 mm × 100 mm × 5 mm);接触面的表面粗糙度 R_a 不超过 1.6 μm 。试件在数控机床上加工完成之后,用酒精彻底清洗并烘干。

对冲击对象进行标识处理,具体步骤是:① 使用绝缘胶带(白色)将杆件两端头遮住,对杆件表面进行喷漆处理(黑色);② 喷漆完成后,去掉杆件两

端头的遮盖胶带,在试验用端头处保留 2~5 mm 的黑色区域,依次用绝缘胶带对其进行间隔标识,标识之间的间隙要尽量均匀,如图 2 所示。

图 2 标识处理

1.3 试验步骤

使用 3D 高速摄像机跟踪捕获冲击对象上各标识点的运动学数据,其帧速率可达到 10 000 帧/s;试验过程中周围环境用黑布遮挡,这样容易识别所采集视频图像中的标识点;试验完成后使用数字图像处理方法分析所采集的视频图像。试验步骤如下。

(1) 固定好被冲击对象(固体平面),调节好冲击对象与被冲击对象的相对位置。

(2) 调整设定初始冲击角度 θ 。

(3) 先调整坠落装置的坠落高度,再打开吸盘电磁铁开关,吸住冲击对象;用标尺测量并调节接触点与被冲击对象表面的高度 H ,误差在 ± 2 mm 内。

(4) 打开数据采集软件(HotShot SC Link),调整 3D 高速摄像机的位置与焦距,以获得高质量的视频样本;选择帧速率为 8 000 帧/s,可以清晰显示出冲击对象的第 1 个标识点与被冲击对象的接触面。

(5) 在试验记录开始之前,要进行预试验与采集视频图像的质量检测;打开 DP 背景光,先按下视频采集按钮,再切断吸盘电磁铁开关,两者时间间隔不宜过长,之后关掉 DP 背景光。

(6) 在数据采集软件中,对所采集的视频进行剪辑处理,并保存转化为.avi 格式。

(7) 重复步骤(2)~(7),每组试验至少测试 3 次。

2 数字图像处理

基于 Matlab 软件编辑数字图像处理程序,分析所采集的视频图像,获得各标识点接触冲击前后的运动数据。每个所采集的视频图像至少包含大约 1 500 帧数据,每帧数据包含 512 像素 $\times$ 252 像素。根据颜色深浅范围介于 0~255 之间,对每个像素点分配其相应的灰度值,0 代表纯黑色,255 代表纯白色。以初始冲击角 $\theta=45^\circ$ 、坠落高度 $H=100$ mm 的某一组试验数据为例,对其进行数字图像处理过程的详细分析与说明如下。

2.1 读取和剪辑视频

使用 Matlab 中的 VideoReader 函数读取采集的视频图像,采集视频帧的总数为 1 785,初始化一个

结构体变量(如 `mov(i).cdata` 是表示第 i 个 RGB 的帧);使用一个 for 语句对每一帧(i)的高度和宽度进行裁剪并存储为 cell 细胞型变量(如 `frame_orig{i}`);调用 `rgb2gray` 函数,对 RGB 图像进行灰度化处理;并根据标识点边界处灰度值的变化(标识 3 中 AB 方向上 C 点灰度值变化),与第 1 帧对比,找出坠落开始的帧为第 150 帧(灰度值误差 ≤ 25),如图 3 所示。

图 3 坠落开始时所在帧的图像

2.2 寻找边界和标识中心点

寻找冲击对象与被冲击对象的轮廓边界时,需要消除每一帧图像中无关的背景色,因此先找出图像中标识点的临界灰度值 f_c ;对每一帧中各点坐标对应的灰度值与临界灰度值进行比较与替换,若对应灰度值大于等于 f_c ,则替换为 255(白色),反之,则替换为 0(黑色)。

使用 `bwareaopen` 函数将图像中小于 100 的小面积对象删除,其格式是: `I4 = bwareaopen(frame{i}, 100)`;调用 `bwboundaries` 函数,其格式是: `[B{i}, L, N(i)] = bwboundaries(I4)`,获取图像中各标识对象的轮廓(红色),并使用 2 个 for 语句对各个标识对象的所有边界求均值获得标识中心点($\diamond$),如图 4 所示。

图 4 标识对象边界及标识中心点

2.3 位置和冲击角分析

首先使用 `polyfit` 函数将每帧图像中的标识中心点进行 1 阶多项式曲线拟合,曲线斜率的反正切值

即为冲击角 θ_i ; 根据各个标识中心点在每帧图像中的坐标与其在第 1 帧图像(坠落开始帧)中的坐标差值, 可求得绝对坐标值, 即绝对位置 $r_c(i)$; 其次, 使用 `diff` 函数对位置和冲击角变量进行差分计算, 其中时间微分 $dt=1/\text{fps}$, 或仍使用 `polyfit` 函数对每 10 帧数据进行曲线拟合, 并求其 1 阶导数, 即可求得速度 $v_c(i)$ 和角速度 ω 。图 5~7 所示为接触冲击过程中标识中心点 1 的位置、速度和冲击对象的角速度变化曲线。接触冲击发生的时间为 $t=0.133\text{ s}$ 。

图 5 标识中心点 1 接触冲击前后的位置

图 6 标识中心点 1 接触冲击前后的速度

图 7 冲击对象接触冲击前后的角速度

冲击对象标识中心点 1 接触冲击前后的切向(x)速度分量分别为 $v_{cx_b}=0.070\text{ m/s}$ 、 $v_{cx_a}=0.157\text{ m/s}$; 法向(y)速度分量为 $v_{cy_b}=-1.437\text{ m/s}$ 、 $v_{cy_a}=0.267\text{ m/s}$; 而冲击对象接触冲击前后的角速度分别为 $\omega_b=0.118\text{ rad/s}$ 、 $\omega_a=-25.023\text{ rad/s}$ 。

3 数学模型

图 8 所示为系统运动链示意图。冲击对象为 20 钢圆形杆件 B , 被冲击对象为巴氏合金固体平面 S 。其中: 固定绝对坐标系为 $RF(0)$, 该坐标系下的正交基矢量为 $[i_0, j_0, k_0]$; 在冲击对象上建立浮动坐标系 $RF(1)$, 正交基矢量为 $[i_1, j_1, k_1]$, 均满足笛卡儿坐标系; 倾斜冲击角为 θ , 冲击对象质心为 C , 接触点为 E , 顶点为 A , 任意点 P ; 各个标识中心点为 $r_c(i)$, 接触冲击过程中的重力为 G 、接触力为 F 。

图 8 系统运动链示意图

定义 A 点在 $RF(0)$ 下的广义坐标分别为 q_1, q_2, q_3 (均为时间 t 的函数 $q_i(t), i=1,2,3$), 用来描述接触冲击过程中的瞬时位置。广义坐标 q_1 代表 A 点与 $RF(0)$ 坐标系 Y 轴的距离, q_2 代表 A 点与 $RF(0)$ 坐标系 X 轴的距离, q_3 代表倾斜冲击角 θ ; 相应的广义速度 u_1, u_2, u_3 用来描述其运动速度。

3.1 振动响应

柔性杆件的横向或纵向振动可由相应的振动偏微分方程决定, 这些方程通过分离变量法是无法求解的。因此, 采用假设模态法对偏微分方程离散化来描述其振动变形^[32]。

任意点 P 的横向弹性变形 y 为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

式中 $\Phi_i(x)$ ——杆件两端自由横向振动的第 i 个模态函数;

$q_i(t)$ ——第 i 个模态广义坐标。其中

$$\Phi_i(x) = \cosh\left(\frac{\lambda_i}{L}x\right) + \cos\left(\frac{\lambda_i}{L}x\right) - \beta(\lambda_i) \left[\sinh\left(\frac{\lambda_i}{L}x\right) + \sin\left(\frac{\lambda_i}{L}x\right) \right]$$

$$\beta(\lambda_i) = \frac{\cosh \lambda_i - \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i}$$

式中 λ_i ——特征方程的连续根。

同理, 任意点 P 的纵向弹性变形 v 为

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i'(x) q_i(t) \quad (2)$$

式中 $\Phi_i'(x)$ ——杆件两端自由纵向振动的第 i 个模态函数。其中

$$\Phi_i'(x) = \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{L} x \right]$$

3.2 运动模型

RF(0)基矢量为 $[i_0, j_0, k_0]$ 与 RF(1)基矢量 $[i_1, j_1, k_1]$ 的坐标变换关系为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ j_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{10} \begin{bmatrix} i_0 \\ j_0 \\ k_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中 $\mathbf{R}_{10}$ ——转换矩阵。其中

$$\mathbf{R}_{10} = \begin{bmatrix} -c_3 & -s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中, $c_3 = \cos q_3$, $s_3 = \sin q_3$ 。

冲击对象的角速度和角加速度分别为

$$\boldsymbol{\omega} = [0 \quad 0 \quad u_3] \quad \boldsymbol{\alpha} = [0 \quad 0 \quad \dot{u}_3] \quad (4)$$

A 点的位置和速度矢量分别为

$$\mathbf{r}_A = [q_1 \quad q_2 \quad 0] \quad \mathbf{v}_A = [u_1 \quad u_2 \quad 0] \quad (5)$$

对于任意点 P , 同时考虑横向和纵向振动响应, 则 RF(1)下的矢量 $\mathbf{r}_{AP}$ 可表示为

$$\mathbf{r}_{AP}^{(1)} = [x + v(x, t)] \mathbf{i}_1 + y(x, t) \mathbf{j}_1 \quad (6)$$

由转换矩阵 $\mathbf{R}_{10}$ 可求得 RF(0)下的矢量 $\mathbf{r}_{AP}$ 为

$$\mathbf{r}_{AP}^{(0)} = \mathbf{r}_{AP}^{(1)} \cdot \mathbf{R}_{10} \quad (7)$$

任意点 P 在 RF(0)下的速度矢量为

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{AP}^{(0)}) \quad (8)$$

系统总动能 T 为

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^L \mathbf{v}_P \cdot (\mathbf{v}_P)^T dx \quad (9)$$

式中 ρ ——线密度, kg/m。

令系统发生接触冲击的时间为 $[t_1, t_2]$ 。根据广义动量定理对 Kane 方程进行积分后, 可推导得到系统接触冲击的广义冲量和动量方程为

$$P_j \approx M_j(t_2) - M_j(t_1) \quad (10)$$

式中 P_j ——广义冲量;

M_j ——广义动量;

j ——下标, 表示第 j 个广义速度。

由式(9)可知, 系统总动能 T 是关于 $q_1, q_2, \dots, q_{n+3}, u_1, u_2, \dots, u_j$ 和 t 等变量的函数, 则广义动量为

$$M_j(t) = \frac{\partial T}{\partial u_j} \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (11)$$

式中 k ——广义速度个数。

广义冲量为

$$P_j = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial u_j} \cdot \mathbf{F} dt \quad (12)$$

式中 $\partial \mathbf{v}_E / \partial u_j$ ——偏速度。

将式(11)、(12)代入式(10), 可得

$$\frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial u_j} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \frac{\partial T}{\partial u_j}(t_2) - \frac{\partial T}{\partial u_j}(t_1) \quad (13)$$

式(13)还不足以求得系统在 t_2 时刻所有的运动变量, 因此需要建立更多的方程与式(13)进行联立求解。图 9 所示为两碰撞物体在接触过程中的速度矢量关系。其中: 两物体(D_1 、 D_2)发生接触碰撞时, 彼此的接触点分别为 E_1 、 E_2 , 即 $E_1=E_2=E$, 单位矢量 $\mathbf{J}_0$ 垂直于两碰撞物体的切平面。

图 9 两物体接触冲击过程中的速度矢量关系图

两物体接触冲击前的接近速度 $\mathbf{v}_a$ 为

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_{E_1}(t_1) - \mathbf{v}_{E_2}(t_1) \quad (14)$$

式中 $\mathbf{v}_{E_1}(t_1)$ —— t_1 时刻接触点 E_1 的速度;

$\mathbf{v}_{E_2}(t_1)$ —— t_1 时刻接触点 E_2 的速度。

两物体接触冲击前的分离速度 $\mathbf{v}_s$ 为

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{E_1}(t_2) - \mathbf{v}_{E_2}(t_2) \quad (15)$$

式中 $\mathbf{v}_{E_1}(t_2)$ —— t_2 时刻接触点 E_1 的速度;

$\mathbf{v}_{E_2}(t_2)$ —— t_2 时刻接触点 E_2 的速度。

根据恢复系数 e 的定义可知, 速度矢量 $\mathbf{v}_a$ 和 $\mathbf{v}_s$ 的法向分量(平行于矢量 $\mathbf{J}_0$), 其运动方向相反, 且存在数值关系式为

$$\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{v}_s = -e \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{v}_a \quad (16)$$

接触力 F 在接触冲击时间 $[t_1, t_2]$ 内的冲量, 可分解为两相互垂直的分量, 即法向分量 F_n 和切向分量 F_t 。假设滑动摩擦判断条件为 Δ , 用于确定接触冲击过程中冲击对象的摩擦类型, 即

$$\Delta = |F_t| - \mu_s |F_n| \quad (17)$$

式中 μ_s ——静摩擦因数。

当 Δ 小于 0 时, 冲击对象无滑动摩擦, 则分离速度 v_s 的切向分量为 0, 即

$$\mathbf{J}_0 \times (\mathbf{v}_s \times \mathbf{J}_0) = 0 \quad (18)$$

此时联立式(13)、式(16)和式(18), 即可求得冲击对象接触冲击过程中的运动状态和所有未知量。

当 Δ 大于 0 时, 接触冲击过程中, 冲击对象存在滑动摩擦, 且满足如下关系式

$$\mathbf{F}_t = -\mu_k |\mathbf{F}_n| \frac{\mathbf{J}_0 \times (\mathbf{v}_s \times \mathbf{J}_0)}{|\mathbf{J}_0 \times (\mathbf{v}_s \times \mathbf{J}_0)|} \quad (19)$$

式中 μ_k ——动摩擦因数。

在此情况下, 联立式(13)、式(16)和式(19), 即可求得相应未知量。采用 Matlab 对上述方程组进行数值求解。求解中 t_1 时刻的初始输入量为 q_3 、 $u_i(t_1)$ 、模态广义坐标 $q_{i+3}(t_1)=0.001$ 、 $u_{i+3}(t_1)=0$; t_2 时刻的输出量为 $u_i(t_2)$ 、 $u_{i+3}(t_2)$ 、 Δ 、 F_n 、 F_t 。

3.3 弹塑性接触力

基于 Jackson-Green 模型, 接触冲击过程可分为 3 个阶段, 分别是弹性阶段、弹塑性阶段和恢复反弹阶段。当冲击对象的接触点 E 与固体平面 S 发生接触时, 弹性阶段开始, 直到巴氏合金(Babbitt)开始发生屈服, 此时弹塑性阶段开始; 当接触点 E 的速度达到 0 时, 接触冲击压痕达到最大变形量(δ_m), 此时弹塑性阶段结束且恢复反弹阶段开始; 当接触力 F 为 0 时, 此时变形区域达到永久变形(δ_r), 接触冲击结束。图 10 所示为接触变形 δ 示意图。

图 10 接触变形示意图

系统等效弹性模量 E' 和半径 R 分别为

$$\frac{1}{E'} = \frac{1 - \mu_1^2}{E_b} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_f} \quad (20)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f} \quad (21)$$

式中 E_b 、 E_f ——两碰撞物体的弹性模量;

μ_1 、 μ_2 ——两碰撞物体的泊松比;

R_b 、 R_f ——两碰撞物体半径, 由于 $R_f = \infty$, 故 $R = R_b$ 。

弹性阶段接触力 F_e 为

$$F_e = \frac{4}{3} E' R^{0.5} \delta^{1.5} \quad (22)$$

弹塑性阶段接触力 F_{ep} 为

$$F_{ep} = F_c \left[\exp(-0.17(\delta^*)^{\frac{5}{12}})(\delta^*)^{1.5} + \frac{4H_G}{C_j S_y} \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{78}(\delta^*)^{\frac{5}{9}}\right) \right) (\delta^*)^{1.1} \right] \quad (23)$$

式中 F_c ——屈服发生时的接触力;

H_G ——平均正压力;

S_y ——软材料的屈服强度。

$$\delta^* = \frac{\delta}{R} \left(\frac{2E'}{\pi C_j S_y} \right)^2 \quad C_j = 1.295 \exp(0.736\mu)$$

$$F_c = \frac{4}{3} \left(\frac{R}{E'} \right)^2 \left(\frac{\pi C_j S_y}{2} \right)^3$$

$$\frac{H_G}{S_y} = 2.84 - 0.92 \left[1 - \cos\left(\pi \frac{a}{R}\right) \right]$$

$$B = 0.14 \exp(23S_y / E') \quad a = \sqrt{R^2 \left(\frac{\pi C_j S_y}{2E'} \right)^2 \left(\frac{\delta}{1.9\delta_c} \right)^B}$$

恢复反弹阶段接触力 F_r 为

$$F_r = \frac{4}{3} E' R_r^{0.5} (\delta - \delta_r)^{1.5} \quad (24)$$

式中 R_r ——永久变形区域的曲率半径。其中

$$\frac{\delta_r}{\delta_m} = 1.02 \left[1 - \left(\frac{\delta_m / \delta_y + 5.9}{6.9} \right)^{-0.54} \right]$$

$$R_r = \frac{1}{(\delta_m - \delta_r)^3} \left(\frac{3F_m}{4E'} \right)^2$$

式中 F_m ——最大变形时的接触力。

对于弹性阶段和恢复反弹阶段, 接触力均服从赫兹接触理论^[33-34]; 而当 $\delta^* \geq 1.9$ 时, 弹塑性接触冲击开始, 当 $v_E = 0$ 时, 弹塑性接触冲击结束, 且此阶段的接触力 F_{ep} 可由式(23)求得。本文考虑振动响应的影响, 接触点 E 的接触变形 δ 计算式为

$$\delta = \max |y_E \pm v(L, t) \sin \theta \pm y(L, t) \cos \theta| \quad (25)$$

式中 y_E ——接触点 E 压痕变形区域的位移。

4 结果与分析

本文对考虑振动响应的倾斜接触冲击模型进行了数值仿真, 并与试验结果进行对比分析。两碰撞物体的材料属性参数^[35-36]如下: 冲击对象(20 钢)的密度 $\rho_b=7\ 850\text{ kg/m}^3$, 接触圆形末端半径 $R_b=9\text{ mm}$, 弹性模量 $E_b=206\text{ GPa}$, 泊松比 $\mu_1=0.28$, 屈服强度 $S_{yb}=248\text{ MPa}$; 被冲击对象(ZSnSb11Cu6)的密度 $\rho_f=7\ 737\text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E_f=48\text{ GPa}$, 泊松比 $\mu_2=0.285$, 屈服强度 $S_{yf}=66\text{ MPa}$; 重力加速度 $g=9.81\text{ kg/m}^2$ 。

4.1 临界角

图 11 所示为滑动摩擦判断条件 Δ 关于冲击角 θ 的变化曲线。仿真结果表明: 滑动摩擦判断条件 Δ 呈 W 形分布, 且当 $\Delta=0$ 时, 存在 3 个临界冲击角, 分别为 27.5° 、 42.5° 、 58.4° , 用于确定接触冲击过程中冲击对象是否存在滑动摩擦; 当 $\Delta<0$ 时, 冲击对象无滑动摩擦, 反之, 接触冲击过程中, 冲击对象存在滑动摩擦。

图 11 滑动摩擦判断条件 Δ 关于冲击角 θ 的变化曲线

4.2 反弹速度和角速度

图 12 所示为接触点 E 冲击后反弹速度 v_E 法向分量和切向分量的仿真与试验结果对比。

(a) 法向速度分量

图 12 接触点 E 冲击后反弹速度的仿真与试验结果对比

由图 12 可知, 仿真结果与试验数据呈现相同的变化趋势, 接触点 E 冲击后反弹速度 v_E 随着初始速度(或坠落高度)的增加而增加; 法向速度 v_{Ez} 的最大相对误差与平均相对误差分别为 4.97%、3.21%; 而切向速度 v_{Ex} 的最大相对误差与平均相对误差分别为 4.87%、3.57%; 仿真与试验结果基本吻合, 验证了所建模型的正确性。

冲击对象冲击后角速度的仿真结果与试验结果对比, 如图 13 所示。角速度 ω_a 随着初始速度的增加而增加, 其最大相对误差与平均相对误差分别为 3.81%、2.31%; 角速度方向为负, 说明圆形杆件与固体平面接触冲击后, 倾斜冲击角 θ 呈顺时针减少。

图 13 冲击对象冲击后角速度的仿真与试验结果对比

4.3 恢复系数

恢复系数是描述两个或多个物体接触碰撞事件的重要参数, 反映了接触碰撞时物体变形的恢复能力。图 14 所示为当初始冲击角 $\theta=45^\circ$ 时, 不同初始速度(坠落高度 H)下恢复系数的仿真与试验结果对比。其中: 坠落高度 H 的试验范围为 $[5\text{ cm}, 85\text{ cm}]$ 。仿真结果表明: 恢复系数随初始速度的增加而减少, 且当初始速度大于 3 m/s 时, 恢复系数趋于稳定, $e \approx 0.153$; 试验数据与仿真结果相比存在数值波动,

但仿真与试验结果的相对误差均小于 5%，仿真与试验结果基本吻合。

图 14 恢复系数的仿真与试验结果对比

4.4 接触力

图 15 所示为接触冲击过程中接触力关于初始速度的函数变化关系。当接触冲击处于弹性阶段时，接触力 F_e 是一个常数，其值等于 0.711 85 N；弹塑性阶段的接触力 F_{ep} 和恢复反弹阶段的接触力 F_r 均随初始速度的增加而增加；当坠落高度 $H=5$ cm 时，接触力 $F_r=0$ N，说明低速冲击情况下，永久变形 δ_p 约等于最大变形 δ_m 。

图 15 接触力关于初始速度的函数变化关系

5 结论

(1) 本文以弹塑性材料为研究对象，考虑振动响应的影响，根据广义动量定理建立了冲击对象的运动模型；并结合 Jackson-Green 模型，将振动响应考虑到接触变形中，系统的探讨和研究了弹塑性接触冲击过程中运动参数和接触力的变化。

(2) 基于 Matlab 数字图像处理方法，设计了多标识点的冲击试验，较准确地描述与跟踪了冲击对象在接触冲击过程中的运动规律。

(3) 通过对恢复系数和运动参数的试验数据与仿真结果对比分析，得出仿真与试验结果基本吻合，验证了所建模型的正确性。

参考文献

- [1] 董楸煌, 陈力. 柔性空间机械臂捕获卫星碰撞动力学分析、镇定运动神经网络控制及抑振[J]. 机械工程学报, 2014, 50(9): 51-54.
DONG Qiuhuang, CHEN Li. The impact dynamics analysis of flexible space manipulator capturing a satellite and neural network calming motion control and vibration suppression[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(9): 51-54.
- [2] 黄意新, 赵阳, 郭剑, 等. 一种新型 GEO 卫星在轨捕获机构的设计与分析[J]. 振动与冲击, 2016, 35(24): 132-138.
HUANG Yixin, ZHAO Yang, GUO Jian, et al. Design and analysis of a novel on-orbit capture mechanism for GEO satellites[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(24): 132-138.
- [3] ASKARI E, DABIRRAHMANI D, FLORES P, et al. Nonlinear vibration and dynamics of ceramic on ceramic artificial hip joints: A spatial multibody modelling[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(2): 1365-1377.
- [4] 王国彪, 陈殿生, 陈科位, 等. 仿生机器人研究现状[J]. 机械工程学报, 2015, 51(13): 27-44.
WANG Guobiao, CHEN Diansheng, CHEN Kewei, et al. The current research status and development strategy on biomimetic robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(13): 27-44.
- [5] WU H N, WANG J W. Observer design and output feedback stabilization for nonlinear multivariable systems with diffusion PDE-governed sensor dynamics[J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 72(3): 615-628.
- [6] 妥吉英, 邓兆祥, 张河山, 等. 新型扭转准零刚度的振动角度传感系统[J]. 西安交通大学学报, 2017, 51(8): 1-7.
TUO Jiying, DENG Zhaoxiang, ZHANG Heshan, et al. A new type of sensor system for angular vibration measurement of torsion quasi-zero-stiffness[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2017, 51(8): 1-7.
- [7] CHEN Y, HOU S J, FU K K, et al. Low-velocity impact response of composite sandwich structures: modelling and experiment[J]. Composite Structures, 2017, 168: 322-334.
- [8] STRONGE W J. Energetically consistent calculations for oblique impact in unbalanced systems with friction[J]. Journal of Applied Mechanics, 2015, 82(8): 081003.
- [9] 章孝顺, 章定国, 陈思佳, 等. 基于绝对节点坐标法的

- 大变形柔性梁几种动力学模型研究[J]. 物理学报, 2016, 65(9): 094501.
- ZHANG Xiaoshun, ZHANG Dingguo, CHEN Sijia, et al. Several dynamic models of a large deformation flexible beam based on the absolute nodal coordinate formulation [J]. Acta Physica Sinica, 2016, 65(9): 094501.
- [10] WANG H, YIN X C, DENG Q M, et al. Experimental and theoretical analyses of elastic-plastic repeated impacts by considering wave effects[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2017, 65: 212-222.
- [11] 周建星, 孙文磊, 曹莉, 等. 行星齿轮传动系统碰撞振动特性研究[J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(3): 16-21.
- ZHOU Jianxing, SUN Wenlei, CAO Li, et al. Vibro-impact characteristics of planetary gear transmission[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(3): 16-21.
- [12] WRIGGERS P, RUST W T, REDDY B D. A virtual element method for contact[J]. Computational Mechanics, 2016, 58(6): 1039-1050.
- [13] WANG Y, LI S J, XIANG D, et al. Experimental and theoretical analyses of contact-impact behavior of Babbitt ZChSnSb11-6[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications, 2017, <http://doi.org/10.1177/1464420717739334>.
- [14] BAZRAFSHAN M, AHMADIAN H, JALALI H. Modeling the interaction between contact mechanisms in normal and tangential directions[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 58: 111-119.
- [15] LIU T, LI G B, WEI H J, et al. Experimental observation of cross correlation between tangential friction vibration and normal friction vibration in a running-in process[J]. Tribology International, 2016, 97: 77-88.
- [16] AL-SHUKA H F N, CORVES B J, ZHU W H. Dynamic modeling of biped robot using Lagrangian and recursive Newton-Euler formulations[J]. International Journal of Computer Applications, 2014, 101(3): 1-8.
- [17] SHAFEI A M, SHAFEI H R. Oblique impact of multi-flexible-link systems[J]. Journal of Vibration and Control, 2016, DOI: 1077546316654854.
- [18] REZVANIAN M, BAGHESTANI A M, DANESH PAZHOOH M, et al. Off-center impact of an elastic column by a rigid mass[J]. Mechanics Research Communications, 2015, 63: 21-25.
- [19] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and a rigid flat[J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69(5): 657-662.
- [20] ETSION I, KLIGERMAN Y, KADIN Y. Unloading of an elastic-plastic loaded spherical contact[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(13): 3716-3729.
- [21] JACKSON R L, GREEN I, MARGHITU D B. Predicting the coefficient of restitution of impacting elastic-perfectly plastic spheres[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 60(3): 217-229.
- [22] WU C Y, LI L Y, THORNTON C. Energy dissipation during normal impact of elastic and elastic-plastic spheres[J]. International Journal of Impact Engineering, 2005, 32(1): 593-604.
- [23] BOETTCHER R, KUNIK M, EICHMANN S, et al. Revisiting energy dissipation due to elastic waves at impact of spheres on large thick plates[J]. International Journal of Impact Engineering, 2017, 104: 45-54.
- [24] KOGUT L, KOMVOPOULOS K. Analysis of the spherical indentation cycle for elastic-perfectly plastic solids[J]. Journal of Materials Research, 2004, 19(12): 3641-3653.
- [25] YE N, KOMVOPOULOS K. Indentation analysis of elastic-plastic homogeneous and layered media: criteria for determining the real material hardness[J]. Journal of Tribology, 2003, 125(4): 685-691.
- [26] BRAKE M R. An analytical elastic plastic contact model with strain hardening and frictional effects for normal and oblique impacts[J]. International Journal of Solids and Structures, 2015, 62: 104-123.
- [27] GHAEADNIA H, MARGHITU D B, JACKSON R L. Predicting the permanent deformation after the impact of a rod with a flat surface[J]. Journal of Tribology, 2015, 137(1): 011403.
- [28] GHAEADNIA H, CERMIK O, MARGHITU D B. Experimental and theoretical analysis of the elasto-plastic oblique impact of a rod with a flat[J]. International Journal of Impact Engineering, 2015, 86: 307-317.
- [29] 陈健美, 宋庆余, 朱峰. 数字图像处理与分析[M]. 镇江: 江苏大学出版社, 2015.
- CHEN Jianmei, SONG Qingyu, ZHU Feng. Digital image processing and analysis[M]. Zhenjiang: Jiangsu University Press, 2015.
- [30] CROSS R. Oblique bounce of a rubber ball[J]. Experimental Mechanics, 2014, 54(9): 1523-1536.
- [31] REZAEI A, VERHELST R, Van PAEPEGEM W, et al. Finite element modelling and experimental study of oblique soccer ball bounce[J]. Journal of Sports Sciences, 2011, 29(11): 1201-1213.
- [32] 闻邦椿, 刘树英, 张纯宇. 机械振动学[M]. 2 版. 北京: 冶金工业出版社, 2011.
- WEN Bangchun, LIU Shuying, ZHANG Chunyu. Mechanical vibration[M]. 2nd ed. Beijing: Metallurgical Industry Press, 2011.

- [33] MACHADO M, MOREIRA P, FLORES P, et al. Compliant contact force models in multi-body dynamics: Evolution of the Hertz contact theory[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 53: 99-121.
- [34] WANG H, YIN X C, QI X L, et al. Experimental and theoretical analysis of the elastic-plastic normal repeated impacts of a sphere on a beam[J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, 109: 131-142.
- [35] 王尧, 项丹, 孟文俊. ZChSnSb11-6/20 钢复合材料不同结合界面结合强度仿真与试验[J]. 中国机械工程, 2017, 28(1): 101-106, 112.
- WANG Yao, XIANG Dan, MENG Wenjun. Simulation and experiments of binding strength of different binding interfaces on ZChSnSb11-6/20 steel composites[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(1): 101-106, 112.
- [36] 李淑君, 王尧, 项丹, 等. ZChSnSb11-6/20 钢复合材料结合界面影响因子研究[J]. 稀有金属材料与工程, 2016, 45(10): 2555-2560.
- LI Shujun, WANG Yao, XIANG Dan, et al. Investigation of impact factor of binding interface on ZChSnSb11-6/20 steel composites[J]. Rare Metal Materials and Engineering, 2016, 45(10): 2555-2560.

作者简介: 王尧, 男, 1988 年出生, 博士研究生。主要研究方向为系统动力学与控制、接触力学、多物理场耦合仿真方法等。

E-mail: 710603645@qq.com

孟文俊(通信作者), 男, 1963 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机电液一体化系统控制、物流搬运设备及其系统自动化、特殊高性能输送机械关键技术。

E-mail: tyustmwj@126.com