

DOI: 10.3901/JME.2014.16.027

高阶核函数的性质及其在灵敏度分析中的应用*

张磊刚 吕震宙 吕召燕 李贵杰
(西北工业大学航空学院 西安 710072)

摘要: 灵敏度信息能够反映基本变量分布参数对结构系统失效概率及输出性能分布函数的影响程度信息,而核函数对于解析求得灵敏度具有很大的作用。因此为得到高精度的失效概率及分布函数灵敏度解析解,推导出正态变量情况下核函数的高阶性质,利用这些核函数的高阶性质以及结构失效概率与输出性能分布函数的关系,解析地求得了二次不含交叉项多项式功能函数在考虑前四阶矩条件下的失效概率和分布函数灵敏度。算例中数值仿真结果与解析结果的对比表明,利用核函数的高阶性质,采用四阶矩法比二阶矩法具有更高的灵敏度分析精度,算例结果同时也证明了所推导的失效概率及分布函数灵敏度表达式的正确性,同时也说明了所提方法具有一定的工程适用性。

关键词: 核函数; 可靠性灵敏度; 统计矩; 分布函数; 分布参数

中图分类号: TB114

High Order Properties of Kernel Functions and Their Application in Sensitivity Analysis

ZHANG Leigang LÜ Zhenzhou LÜ Zhaoyan LI Guijie
(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: Sensitivity analysis can reflect how the distribution parameters of basic variables affect the failure probability and the distribution function of the structure or system output, and the kernel functions play a significant role in getting the sensitivities. So in order to obtain more accurate analytical results of the sensitivities, the high order properties of the kernel functions for the normal variables are derived. Based on the properties of the kernel functions and the relationship between the failure probability and the distribution function, and by taking a quadratic polynomial without cross-terms as an example of a performance function, the analytical sensitivity solutions of the failure probability and the distribution function are derived when considering the first forth-order moments. Comparing the numerical simulation results with the analytical results, it demonstrates that the forth-order moment method is more precise than the second-order method in sensitivity analysis, and that the derived analytical sensitivity expressions are correct, besides, it well shows good application of the proposed method.

Key words: kernel function; reliability sensitivity; statistical moment; distribution function; distribution parameter

0 前言

在现有的结构机构可靠性分析与设计中,灵敏度分析反映了基本变量分布参数对失效概率或功能函数分布函数的影响程度,虽然在灵敏度的求解方面已经取得了较大的进展,但追求高效及精确的灵敏度求解方法对工程结构机构可靠性及优化设计仍显得非常重要。文献[1]中采用马尔科夫链蒙特卡罗子集模拟的灵敏度分析方法可以比较精确地解决小

失效概率结构问题,然而其为数值模拟方法,计算量仍然较大。目前求解灵敏度的解析方法较少,主要有一次二阶矩法^[2]和点估计方法^[3]等。一次二阶矩法依赖于功能函数的导数信息,而点估计法的计算量随变量维数呈指数级增长,因此它只适用于低维问题。文献[4]中提出了核函数的概念及其一些普遍性质,并给出了这些性质在求解功能函数统计矩对基本变量分布参数的灵敏度上的应用。而文献[5]在文献[4]的基础上,主要针对基本变量为正态分布时对核函数的性质进行了推广研究和应用,并将其应用于考虑功能函数的前二阶矩条件下来解析求解失效概率灵敏度上。

* 国家自然科学基金资助项目(51175425)。20130915 收到初稿,20140226 收到修改稿

由于在一大类的工程问题中, 尤其针对隐式极限状态可靠性问题, 二次不含交叉项的响应面函数运用的较为广泛^[6], 它能更好地折衷计算工作量与计算精度。又由于正态分布随机变量是工程问题中最为常见的分布类型, 其他分布类型的问题一般也都相应的转化为正态分布情况下再进行可靠性分析。因此本文在文献[4-5]的基础上, 推导了正态分布情况下更高阶次的核函数性质, 并将其应用于二次不含交叉项的多项式形式功能函数的失效概率及分布函数的灵敏度解析求解中。为了提高解析求得失效概率灵敏度的精确程度, 本文考虑了功能函数的前四阶统计矩。然后在此基础上, 利用结构系统失效概率及输出性能分布函数的内在联系, 解析地推导了考虑功能函数前四阶矩的分布函数灵敏度。最后, 本文通过算例验证了所推导的四阶矩解析法的准确性, 证明了所推导的失效概率及分布函数对变量分布参数灵敏度的近似解析表达式具有较高的精度。

1 核函数及其特性扩展

在失效概率定义表达式的基础上, 即

$$P_f = \int_F f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

式中 P_f ——失效概率;

$f_X(\mathbf{x})$ —— \mathbf{x} 的联合概率密度函数。

文献[4]将失效概率对变量分布参数的灵敏度公式变形为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \int_F f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_F \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \frac{1}{f_X(\mathbf{x})} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_F k_{\theta_{x_i}^{(l)}} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

式中 \mathbf{x} ——相互独立的 n 维随机变量;

$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;

F ——功能函数 $Z = g(\mathbf{x})$ 确定的失效域;

$F = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) \leq 0\}$;

$k_{\theta_{x_i}^{(l)}}$ ——定义的用于灵敏度分析的关于第 i 个

随机变量 x_i 的第 l 个分布参数 $\theta_{x_i}^{(l)}$ 的核函数。

核函数的定义式为

$$k_{\theta_{x_i}^{(l)}} = \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \frac{1}{f_X(\mathbf{x})} = \frac{\partial f_{X_i}(x_i)}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \frac{1}{f_{X_i}(x_i)} \quad (3)$$

式中, $f_{X_i}(x_i)$ 为变量 x_i 的边缘概率密度函数。

文献[4]中就任意分布给出了核函数的一些普遍性质, 而文献[5]在此基础上针对正态分布变量, 推导了核函数 $x^n k_{\theta_{x_i}^{(l)}}$ 在 $n=3, 4$ 时的性质, 同时对于

线性和不含交叉项的二次功能函数, 给出了功能函数一阶和二阶统计矩对变量分布参数的灵敏度的解析表达式。显然, 只考虑功能函数前二阶矩的灵敏度结果的近似精度是不够的, 文献[7]提出了考虑四阶矩的失效概率灵敏分析的方法, 本文将在此基础上进行失效概率灵敏度的解析求解。由于本文将采用功能函数前四阶统计矩来近似解析求解失效概率灵敏度, 因此需要推导正态变量核函数的 $x^n \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}$ 在 $n > 4$ 时的性质, 而对于不含交叉项的二次多项式功能函数 $g(\mathbf{x}) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i x_i + \sum_{i=1}^n B_i x_i^2$, 式中, A_0 为常数项, A_i 和 B_i ($i=1, 2, \dots, n$) 分别为一次项和二次项的系数, 在考虑其前四阶矩时会涉及到变量的最高幂次为 8, 因此本文推导了 $x^n \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}$ 在 $n=5 \sim 8$ 时的数学期望如式(4)所示

$$\begin{cases} E[x^5 \cdot k_{\mu_x}] = 15\sigma_x^4 + 30\mu_x^2 \sigma_x^2 + 5\mu_x^4 \\ E[x^5 \cdot k_{\sigma_x}] = 60\mu_x \sigma_x^3 + 20\mu_x^3 \sigma_x \\ E[x^6 \cdot k_{\mu_x}] = 90\mu_x \sigma_x^4 + 60\mu_x^3 \sigma_x^2 + 6\mu_x^5 \\ E[x^6 \cdot k_{\sigma_x}] = 90\sigma_x^5 + 180\mu_x^2 \sigma_x^3 + 30\mu_x^4 \sigma_x \\ E[x^7 \cdot k_{\mu_x}] = 7\mu_x^6 + 105\mu_x^4 \sigma_x^2 + 105\sigma_x^6 + 315\mu_x^2 \sigma_x^4 \\ E[x^7 \cdot k_{\sigma_x}] = 42\mu_x^5 \sigma_x + 630\mu_x \sigma_x^5 + 420\mu_x^3 \sigma_x^3 \\ E[x^8 \cdot k_{\mu_x}] = 8\mu_x^7 + 840\mu_x^3 \sigma_x^4 + 168\mu_x^5 \sigma_x^2 + 840\mu_x \sigma_x^6 \\ E[x^8 \cdot k_{\sigma_x}] = 840\mu_x^4 \sigma_x^3 + 56\mu_x^6 \sigma_x + 2520\mu_x^2 \sigma_x^5 + 840\sigma_x^7 \end{cases} \quad (4)$$

式中 k_{μ_x} , k_{σ_x} ——均值、方差对应的核函数;

μ_x , σ_x ——变量 x 的均值、方差。

2 基于矩估计的灵敏度算法与基本变量分布参数核函数的关系

2.1 功能函数的前四阶统计矩及可靠度指标

近些年来, 使用功能函数的统计矩信息来进行结构系统可靠性及灵敏度分析的研究较多^[8-9]。基于矩估计的可靠性分析方法不需要考虑功能函数的导函数和寻找设计点的问题因而具有较广的适用范围。文献[5]在只考虑功能函数前二阶矩时, 推导了失效概率及失效概率对变量分布参数的灵敏度表达式, 本文将考虑功能函数 $g(\mathbf{x})$ 的前四阶矩 a_{kg} ($k=1, 2, 3, 4$), 其计算公式为

$$\begin{cases} \alpha_{1g} = \int_{R^n} g(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \alpha_{2g} = \left[\int_{R^n} (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^2 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right]^{1/2} \\ \alpha_{3g} = \frac{1}{\alpha_{2g}^3} \int_{R^n} (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^3 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \alpha_{4g} = \frac{1}{\alpha_{2g}^4} \int_{R^n} (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^4 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{cases} \quad (5)$$

而功能函数的四阶和二阶可靠度指标 β_{4M} 与 β_{2M} 可以相应的表达为

$$\beta_{2M} = \frac{\alpha_{1g}}{\alpha_{2g}} \quad (6)$$

$$\beta_{4M} = \frac{3(\alpha_{4g}-1)\beta_{2M} + \alpha_{3g}(\beta_{2M}^2 - 1)}{\sqrt{(5\alpha_{3g}^2 - 9\alpha_{4g} + 9)(1 - \alpha_{4g})}} \quad (7)$$

在考虑四阶矩时失效概率

$$P_f = \Phi(-\beta_{4M}) \quad (8)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态变量的累积分布函数。

2.2 失效概率灵敏度计算

根据文献[7]求解可靠性灵敏度的方法, 考虑功能函数的前四阶矩时, 近似求解失效概率对变量分布参数的灵敏度的计算公式为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta_{4M}} \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta_{4M}} \left[\frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \beta_{2M}} \left(\frac{\partial \beta_{2M}}{\partial \alpha_{1g}} \frac{\partial \alpha_{1g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} + \frac{\partial \beta_{2M}}{\partial \alpha_{2g}} \frac{\partial \alpha_{2g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \right) + \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{3g}} \frac{\partial \alpha_{3g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} + \frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{4g}} \frac{\partial \alpha_{4g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \right] \quad (9)$$

由式(7)和式(8)可以推导出

$$\frac{\partial P_f}{\partial \beta_{4M}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\beta_{4M}^2}{2}\right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \beta_{2M}} = \frac{3\alpha_{4g} + 2\alpha_{3g}\beta_{2M} - 3}{[(9\alpha_{4g} - 5\alpha_{3g}^2 - 9)(\alpha_{4g} - 1)]^{1/2}} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \alpha_{2g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = \frac{1}{2\alpha_{2g}} \left\{ \int \left[\frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(k)}} (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^2 \right] d\mathbf{x} - 2 \int [g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g}] \frac{\partial \alpha_{1g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} = \frac{1}{2\alpha_{2g}} \left\{ E[g(\mathbf{x})^2 \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] - 2\alpha_{1g} E[g(\mathbf{x}) \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] \right\} \quad (17)$$

$$\frac{\partial \alpha_{3g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = -\frac{3}{\alpha_{4g}^4} \frac{\partial \alpha_{2g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^3 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha_{2g}^3} \left\{ \int \left[\frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^3 \right] d\mathbf{x} - 3 \frac{\partial \alpha_{1g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^2 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} = \frac{1}{\alpha_{2g}^3} E[g(\mathbf{x})^3 \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] - \left(\frac{3\alpha_{3g}}{2\alpha_{2g}^2} + \frac{3\alpha_{1g}}{\alpha_{2g}^3} \right) E[g(\mathbf{x})^2 \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] + \left[\frac{3\alpha_{3g}\alpha_{1g}}{\alpha_{2g}^2} + \frac{3\alpha_{1g}^2}{\alpha_{2g}^3} - \frac{3(E[g(\mathbf{x})^2] - \alpha_{1g}^2)}{\alpha_{2g}^3} \right] E[g(\mathbf{x}) \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] \quad (18)$$

$$\frac{\partial \alpha_{4g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = -\frac{4}{\alpha_{2g}^5} \frac{\partial \alpha_{2g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^4 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{\alpha_{2g}^4} \left\{ \int \left[\frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^4 \right] d\mathbf{x} - 4 \frac{\partial \alpha_{1g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \int (g(\mathbf{x}) - \alpha_{1g})^3 f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} = \frac{1}{\alpha_{2g}^4} E[g(\mathbf{x})^4 \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] - \frac{4\alpha_{1g}}{\alpha_{2g}^4} E[g(\mathbf{x})^3 \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] + \left(\frac{6\alpha_{1g}^2}{\alpha_{2g}^4} - \frac{2\alpha_{4g}}{\alpha_{2g}^2} \right) E[g(\mathbf{x})^2 \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] + \left[\frac{4\alpha_{1g}\alpha_{4g}}{\alpha_{2g}^2} - \frac{4\alpha_{1g}^3}{\alpha_{2g}^4} - \frac{4(E[g(\mathbf{x})^3] - 3\alpha_{1g}E[g(\mathbf{x})^2] + 2\alpha_{1g}^3)}{\alpha_{2g}^4} \right] E[g(\mathbf{x}) \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] \quad (19)$$

对于具体的不含交叉项的二次多项式表达的功能函数 $Z = g(\mathbf{x})$, 由于变量 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 之间相

$$\frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{3g}} = \frac{\beta_{2M}^2 - 1}{[(9\alpha_{4g} - 5\alpha_{3g}^2 - 9)(\alpha_{4g} - 1)]^{1/2}} + \frac{5[3(\alpha_{4g} - 1)\beta_{2M} + \alpha_{3g}(\beta_{2M}^2 - 1)](\alpha_{4g} - 1)\alpha_{3g}}{2[(9\alpha_{4g} - 5\alpha_{3g}^2 - 9)(\alpha_{4g} - 1)]^{3/2}} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \beta_{4M}}{\partial \alpha_{4g}} = \frac{3\beta_{2M}}{[(9\alpha_{4g} - 5\alpha_{3g}^2 - 9)(\alpha_{4g} - 1)]^{1/2}} - \frac{[3(\alpha_{4g} - 1)\beta_{2M} + \alpha_{3g}(\beta_{2M}^2 - 1)](18\alpha_{4g} - 18 - 5\alpha_{3g}^2)}{2[(9\alpha_{4g} - 5\alpha_{3g}^2 - 9)(\alpha_{4g} - 1)]^{1/2}} \quad (13)$$

而式(9)中二阶可靠度指标 β_{2M} 关于功能函数的一阶和二阶矩的偏导数表达式可由其定义表达为

$$\frac{\partial \beta_{2M}}{\partial \alpha_{1g}} = \frac{1}{\alpha_{2g}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \beta_{2M}}{\partial \alpha_{2g}} = -\frac{\alpha_{1g}}{\alpha_{2g}^2} \quad (15)$$

将式(5)功能函数表达式两边对 $\theta_{x_i}^{(l)}$ 求偏导, 可得功能函数的各阶矩 α_{kg} 对 $\theta_{x_i}^{(l)}$ 的偏导数分别如式(16)~(19)所示, 然后利用式(3)中核函数的定义, 将其转化为以核函数表示的形式, 即

$$\frac{\partial \alpha_{1g}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = \int \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[g(\mathbf{x}) \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] \quad (16)$$

互独立, 利用式(20), 即

$$E[x_i^n x_j^m \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] = E[x_j^m] \cdot E[x_i^n \cdot k_{\theta_{x_i}^{(l)}}] \quad m, n = 1, 2, \dots, 8 \quad (20)$$

式(16)~(19)就可以化简为关于 $E[x_i^n \cdot k_{\theta_i^{(l)}}]$ 的形式, 而功能函数的各阶矩 α_{kg} ($k=1,2,3,4$) 可由三点估计法^[10]求得, 然后将所推导的正态变量核函数的 $x_n \cdot k_{\theta_i^{(l)}}$ 的性质代入即可解析求解出功能函数的各阶矩对变量分布参数的偏导数, 再将结果代入到式(9)中, 就可以得到失效概率对变量分布参数的灵敏度的近似解析结果。

文献[5]在考虑功能函数前两阶矩的情况下, 利用核函数的性质推导了当基本变量服从正态分布且功能函数为不含交叉项的二次函数时失效概率灵敏度的近似解析表达式, 并验证了其具有较好的精度。而本文在此基础上采用四阶矩法推导了失效概率灵敏度的近似解析表达式, 这比采用二阶矩法具有更高的精度, 后续的算例充分验证了该结论。

3 核函数在功能函数分布函数及其灵敏度求解中的应用

3.1 分布函数及其灵敏度的转化

功能函数分布函数能够完整地描述功能函数的统计规律, 因此研究功能函数分布函数具有很重要的意义。通过研究功能函数对基本变量分布参数的灵敏度, 能够得到基本变量分布参数对功能函数分布函数完整分布的影响信息。

对于功能函数 $Z = g(\mathbf{x})$, 失效概率为功能函数不大于零时的概率, 即

$$P_f = P\{g(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (21)$$

而 $g(\mathbf{x})$ 的分布函数在给定门槛值 y 处的值 $F_Y(y)$ 的定义为

$$F_Y(y) = P\{g(\mathbf{x}) \leq y\} \quad (22)$$

比较式(21)和式(22)中失效概率和分布函数相似的关系, 可以建立分布函数及其灵敏度的新算法, 将式(22)变形为

$$F_Y(y) = P\{g(\mathbf{x}) - y \leq 0\} \quad (23)$$

令 $G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - y$, 则式(23)又可以写为

$$F_Y(y) = P\{G(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (24)$$

由式(24)可以看出, 功能函数分布函数 $F_Y(y)$ 在 y 值处的求解就可以转化为功能函数 $G(\mathbf{x})$ 的失效概率的求解, 进而可以用如式(8)所示的方法近似求解, 即

$$F_Y(y) = \Phi(-\beta_{4M'}) \quad (25)$$

式中, $\beta_{4M'}$ 为功能函数 $G(\mathbf{x})$ 的四阶可靠度指标, 而

通过 $G(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - y$, 可以得到 $G(\mathbf{x})$ 的各阶统计矩与 $g(\mathbf{x})$ 的各阶统计矩的关系为

$$\begin{cases} \alpha_{1G} = \alpha_{1g} - y \\ \alpha_{2G} = \alpha_{2g} \\ \alpha_{3G} = \alpha_{3g} \\ \alpha_{4G} = \alpha_{4g} \end{cases} \quad (26)$$

式中, α_{kG} ($k=1,2,3,4$) 为功能函数 $G(\mathbf{x})$ 的前四阶矩。

由于一阶统计矩为 y 的函数, 相应的可靠度指标 $\beta_{2M'}$ 与 $\beta_{4M'}$ 都变化为关于 y 的函数, 因此要求解某一点 y 处分布函数的值, 只要将 y 值代入式(25)即可解得。

3.2 分布函数灵敏度的求解

鉴于上述的分布函数和失效概率的关系, 可以参照上述求解失效概率对变量分布参数灵敏度的方法来求解分布函数对变量分布参数的灵敏度。同样针对不含交叉项的二次功能函数, 其分布函数对变量分布参数的灵敏度表达式可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_Y(y)}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} &= \frac{\partial F_Y(y)}{\partial \beta_{4M'}} \frac{\partial \beta_{4M'}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} = \\ &= \frac{\partial F_Y(y)}{\partial \beta_{4M'}} \left[\frac{\partial \beta_{4M'}}{\partial \beta_{2M'}} \left(\frac{\partial \beta_{2M'}}{\partial \alpha_{1G}} \frac{\partial \alpha_{1G}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} + \frac{\partial \beta_{2M'}}{\partial \alpha_{2G}} \frac{\partial \alpha_{2G}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \beta_{4M'}}{\partial \alpha_{3G}} \frac{\partial \alpha_{3G}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} + \frac{\partial \beta_{4M'}}{\partial \alpha_{4G}} \frac{\partial \alpha_{4G}}{\partial \theta_{x_i}^{(l)}} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

由式(25)可以求得 $\partial F_Y(y)/\partial \beta_{4M'}$, 即

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial \beta_{4M'}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\beta_{4M'}^2}{2}\right) \quad (28)$$

而只要将式(11)~(19)中的功能函数 $g(\mathbf{x})$ 和功能函数各阶统计矩 α_{kg} 换为功能函数 $G(\mathbf{x})$ 和 α_{kG} 就可以求得其中的 $\partial \beta_{2M'}/\partial \alpha_{kG}$ ($k=1,2$), $\partial \beta_{4M'}/\partial \alpha_{kG}$ ($k=3,4$) 和 $\partial \alpha_{lG}/\partial \theta_{x_i}^{(l)}$ ($l=1,2,3,4$) 的表达式, 结果都为关于 y 的函数, 因此要求解某一点 y 处的分布函数对变量分布参数的灵敏度值, 同样只要将 y 值代入推导得出的表达式即可。从式(26)可知, 求解失效概率及其灵敏度的计算量与求解分布函数及其灵敏度的计算量是一样的, 因此可以将分布函数及其灵敏度的计算看成失效概率及其灵敏度计算的副产品。

4 算例分析

算例 1: 由相互独立的正态变量 x_1 与 x_2 组成的

$$g(\mathbf{x}) = 15.8 + \begin{pmatrix} -2.2 \\ -3.5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.4 \\ -1.2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix},$$

$x_1 \sim N(5, 0.5^2)$, $x_2 \sim N(6, 0.5^2)$, 分别采用文献[5]中的二阶矩近似解析法, 本文的基于核函数的四阶近似解析法和 Monte Carlo 数字模拟法(Monte Carlo simulation, MCS)的失效概率及灵敏度计算结果对比如表 1 所示。

表 1 算例 1 失效概率灵敏度计算结果

方法	失效 概率	x ₁ 的失效概率灵敏度		x ₂ 的失效概率灵敏度	
		均值	标准差	均值	标准差
二阶	0.078 9	-0.201 0	0.137 3	0.289 1	0.108 2
四阶	0.071 0	-0.223 4	0.152 5	0.274 2	0.124 2
MCS	0.071 0	-0.224 0	0.153 3	0.270 4	0.125 8

MCS 法抽样 10^6 次, 因此其结果可视为近似精确解。由表 1 结果可以直观地看出本文的四阶矩解析法较之文献[5]的二阶矩方法具有较高的精度。表 1 中结果也可视为 $y=0$ 时的分布函数及其灵敏度结果。然而, 为了验证本文所推导的近似解析方法的正确性, 图 1 也给出了多个点处分布函数灵敏度近似解析解和 MCS 法的对比。从图 1 结果对比可以清晰地看出, 本文所推导的基于核函数优良性质, 采用高阶统计矩的分布函数对变量分布参数灵敏度的近似解析算法和 MCS 法具有很好的吻合性, 说明了所推导的解析算法的精确性。此外, 采用本文的解析算法一次就可以求得所有的灵敏度值, 很大程度上提高了计算效率。

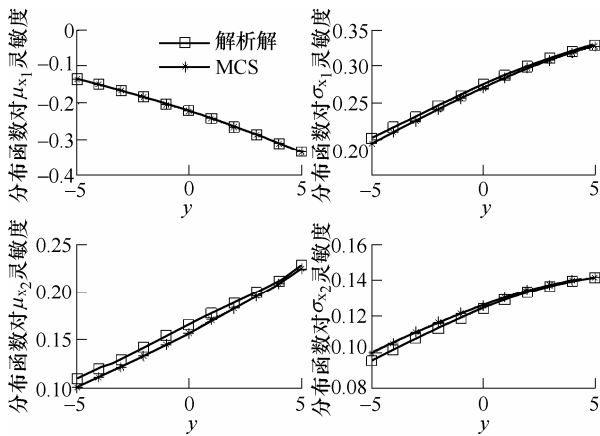


图 1 算例 1 的分布函数灵敏度对比曲线

算例 2: 如图 2 所示的三盒段模拟机翼结构模型, 总共有 28 个杆元件、16 个板元件。将 28 个杆元件分为 x 、 y 、 z 方向的不同三类, 即在相同方向上的杆的长度和横截面积是相同的。设 L_1 、 L_2 、 L_3 分别表示 x 、 y 、 z 三个方向上杆的长度; 假设所有的杆的横截面积 A 都相同; E 表示板元件和杆元件的弹性模量, 泊松比为 0.3; P 为加在节点上的外载荷; δ 为板的厚度。其中, $A=0.000 1 \text{ m}^2$, $E=71 \text{ GPa}$, $P=1 500 \text{ N}$, $\delta=0.003 \text{ m}$, L_1 、 L_2 、 L_3 为服从正态分布的基本随机变量, 其分布如表 2

所示。

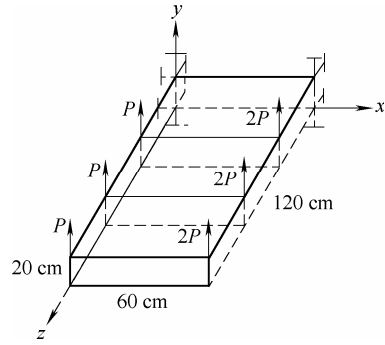


图 2 三盒段模拟机翼模型

表 2 三盒段模拟机翼基本变量分布参数表

随机变量/m	标号	均值	变异系数	标准差
L_1	x_1	0.6	0.05	0.03
L_2	x_2	0.2	0.05	0.01
L_3	x_3	0.4	0.05	0.02

在 ANSYS 中建立三盒段模拟机翼模型的有限元模型, 并以最大位移处不超过 0.002 6 m 建立失效模式, 并运用不含交叉项的二次加权响应面法拟合出功能函数

$$g(x) = -0.013 12 + \begin{pmatrix} 0.006 33 \\ 0.093 82 \\ 0.011 59 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.003 37 \\ -0.178 43 \\ -0.029 75 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

分别采用文献[5]中的二阶矩近似解析法, 本文的基于核函数的四阶近似解析法和 MCS 法的失效概率及灵敏度计算结果对比如表 3 所示。

表 3 三盒段分布函数灵敏度计算结果

方法	失效 概率	失效概率对各变量均值灵敏度		
		变量 x_1	变量 x_2	变量 x_3
二阶	0.126 4	-0.591 0	-7.012 5	3.864 1
四阶	0.114 4	-0.573 4	-6.795 3	3.421 4
MCS	0.117 8	-0.576 4	-6.783 6	3.423 4
方法	计算量	失效概率对各变量标准差灵敏度		
		变量 x_1	变量 x_2	变量 x_3
二阶	—	0.262 1	6.852 1	3.744 5
四阶	—	0.232 7	6.422 6	3.187 8
MCS	10^6	0.232 8	6.465 0	3.240 9

表 3 中解析结果和计算量为 10^6 的 MCS 法结果的良好吻合性再次同时说明了本文所提解析法的精确性和高效性, 而且相对于文献[5]中的方法具有较高的计算精度。同样, 为了验证本文所推导的近似解析方法在多个点处的精确性, 在结构允许范围内, 图 3 也给出了多个点处分布函数灵敏度近似解析解和 MCS 法的对比。

从图 3 可以看出, 本文解析法求得的分函数灵敏度与 MCS 参照解吻合得很好, 而本文是一种高效的近似解析方法, 结合工程上常用的响应面法后具有很好的工程适用性。从表 3 或图 3 也可以看出三盒段模拟机翼模型的失效概率或分布函数对 x 方向杆的长度变化有较小的敏感性, 而 y 、 z 方向上杆的长度的微小变化可能会引起结构失效概率或功能函数分布函数较大的变化, 有了这些灵敏度信息就可以更好地指导工程设计中杆长的选取。

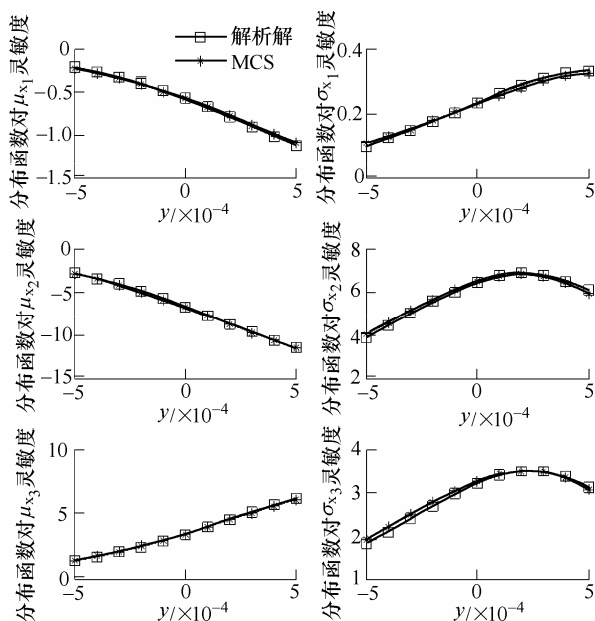


图 3 三盒段算例的分函数灵敏度对比曲线

5 结论

(1) 针对核函数在解析求解灵敏度指标时的优势, 推导了正态变量核函数在高阶情况下的性质。

(2) 利用核函数的性质, 针对不含交叉项的二次多项式功能函数, 推导了包含功能函数前四阶统计矩的失效概率灵敏度近似解析表达式。计算精度较文献[5]中的二阶矩方法具有很大提高。

(3) 将功能函数分布函数灵敏度的解析求解转化到失效概率灵敏度的求解上, 从而也可以很方便地求解出功能函数在特定点处的灵敏度结果。

(4) 算例已验证本文所提方法的精确性与高效性, 具有一定的工程适用性。然而对于一些非线性程度很高的功能函数, 本文方法所得结果可能具有较大误差。

参考文献

- [1] 宋述芳, 吕震宙. 基于马尔科夫蒙特卡罗子集模拟的可靠性灵敏度分析方法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(4): 33-38.
- [2] SONG Shufang, LÜ Zhenzhou. Structural reliability sensitivity analysis method based on Markov Chain Monte Carlo subset simulation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(4): 33-38.
- [3] KREINRR J H, PUTSHA C S. Safety analysis of tension elements using various reliability methods[C]//IEEE, Proceedings of ISUMA-NAFIPS, 1995: 758-763.
- [4] ROSENBLUTH E. Two-point estimates in probability[J]. Applied Mathematical Modeling, 1981, 5(5): 329-335.
- [5] MILLWATER H. Universal properties of kernel functions for probabilistic sensitivity analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24: 89-99.
- [6] 王奇. 核函数的性质及其在灵敏度分析上的应用[J]. 西北工业大学学报, 2010, 28(5): 797-802.
- [7] WANG Qi. Properties of kernel functions and their application on sensitivity analysis[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2010, 28(5): 797-802.
- [8] RAJASHEKHAR M R, ELLINGWOOD B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis[J]. Structural Safety, 1993(12): 205-220.
- [9] LU Z Z, SONG J. Reliability sensitivity by method of moments[J]. Applied Mathematical Modeling, 2010, 34: 2860-2871.
- [10] ZHAO Y G, ONE T. On the problems of the fourth-moment method[J]. Structural Safety, 2004, 26: 343-347.
- [11] ZHAO Y G, ONE T. Applicable range of the fourth-moment method for structural reliability[J]. Journal of Asian Architecture and Building Engineering, 2007, 6: 151-158.
- [12] SEO H S, KWAK B M. Efficient statistical tolerance analysis for general distributions using three-point information[J]. International Journal of Production Research, 2002, 40(4): 931-944.

作者简介: 吕震宙(通信作者), 女, 1966 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为飞行器可靠性工程, 飞行器结构设计。

E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn