DOI: 10.3901/JME.2019.01.042

机械臂高斯运动轨迹规划及操作成功概率 预估计方法*

祁若龙^{1,2} 张珂¹ 周维佳² 王铁军²

(1. 沈阳建筑大学机械工程学院 沈阳 110168;

2. 中国科学院沈阳自动化研究所机器人学国家重点实验室 沈阳 110016)

摘要: 当机械臂系统的运动存在过程噪声, 或其外部闭环反馈传感器存在观测噪声时, 机械臂的单次实际运动轨迹会随机地偏离预定义轨迹, 但多次重复运动时又服从一定概率分布, 也就是系统存在高斯运动。以自然界最为普遍的高斯分布描述机械臂系统运动状态的非确定性。用概率论的方法结合机械臂本身的线性控制及卡尔曼滤波对机械臂可行轨迹进行规划和先验概率的评估, 从而得到机械臂运动误差的先验概率估计。采用线性控制方法和卡尔曼滤波相结合, 进行高斯运动系统误差建模; 用高斯运动模型对预规划轨迹进行迭代估计, 得到单周期轨迹点的误差分布, 以此定性评估其运动过程的安全性以及定量计算机臂到达目标区域的成功概率。通过仿真和试验数据的对比, 验证了算法的有效性和实用性。

关键词: 机械臂; 概率; 轨迹规划; 最优决策

中图分类号: TG124

Trajectory Planning and Success Probability Estimation of Operation for Gaussian Motion Manipulators

QI Ruolong^{1,2} ZHANG Ke¹ ZHOU Weijia² WANG Tiejun²

(1. School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168;

2. The State Key Laboratory of Robotics, Shenyang Institute of Automation Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016)

Abstract: When the manipulator's movement has process noise, or its external closed-loop feedback sensors have specific observation noise, the single actual movement trajectory of the manipulator can deviate from the predefined trajectory randomly. However, the movement error of the manipulator has a probability distribution when it repeats the same action for many times. The non-deterministic movement state is described by the Gaussian distribution which is widespread in nature. The probability theory combining with the manipulator's linear control and Kalman filter estimation is used to plan the trajectory and evaluate the apriori probability distribution of movement error of the manipulator. Firstly, Linear control method is used in combination with Kalman filter to establish error model of Gaussian motion system. Then, a predefined trajectory is assessed iteratively with the Gaussian motion model to calculate the error distributions of the entire trajectory. Through Gaussian movement prior probability estimates, the security can be estimated qualitatively and the successful probability of arriving at the object region can be calculated quantitatively. At last, the effectiveness and practicability of the algorithm proposed can be verified by the comparison between simulation and experiment data.

Key words: manipulator; probability; trajectory planning; optimal decision

0 前言

随着核工业、深海探测、空间探索等前沿科技

领域对机械臂系统自主性、智能性要求的提升, 越来越多的机械臂系统安装了外部传感设备, 进行自主运动规划和决策。但由于机械臂系统本身存在一定的运动误差、传感器系统也存在一定的测量误差, 在多源误差影响下, 机械臂系统的安全性和操作精度是当前机器人智能最优决策领域最为关心的问题。

* 国家自然科学基金(51605474)资助项目。20180128 收到初稿, 20180523 收到修改稿

在机器人非确定性的研究方面 WEI 等^[1]建立了基于操作成功概率的学习模型, 通过机器学习的方法对机械臂避开障碍到达目标操作位置的能力进行训练, 最后使其能够自主识别障碍并避开。SUN 等^[2]和 ZHANG 等^[3]分别采用人工神经网络和模糊自适应方法解决机器人控制过程时间延迟所带来的系统非确定性问题。OTTE 等^[4]将系统非确定性判定加入随机扩展树的节点生成过程, 每生成一个新的节点, 用蒙特卡洛法检验新生节点的方差概率, 进行轨迹规划。TOIT 等^[5-6]在机器人控制系统中, 将线性二次型调节(Linear quadratic regulator, LQR)控制与卡尔曼滤波相结合, 采用滚动时域的方法降低机器人系统运动偏差。SUN 等^[7-8]应用多核、多线程编程技术将 TOIT 的线性二次高斯(Linear quadratic Gaussian, LQG)非确定性采样优化方法, 应用于实时计算, 并对医疗探针、移动机器人的实时轨迹规划进行了仿真。此基础上通过样条方法生成多条轨迹, 通过文中方法进行避障概率估计, 成功概率最大的轨迹就为最优轨迹。TOIT^[5-6]和 SUN 等^[7-8]所采用的随机树方法生成的轨迹不能直接应用与机器人实际控制, 在此基础上进行的误差分析是对机器人路径误差趋势的定性描述。

本文方法将机器人轨迹、运动控制周期和基于贝叶斯理论的轨迹运动及传感误差分布的迭代相结合, 对机器人的运动安全性进行定性分析, 对轨迹的实际运动成功概率进行了定量的计算。最终的仿真和试验表明, 基于概率论的机器人高斯运动避障轨迹规划方法能够对机器人在每个控制周期内的运动误差分布、变化趋势及最终到达目的点的成功概率进行有效估计。

1 系统模型

1.1 运动模型

机器人关节运动控制模式按照控制器向驱动器发送指令的类型分为位置控制模式、速度控制模式和扭矩控制模式。在机器人领域, 扭矩控制用于关节扭矩和末端施加力的动力学应用与研究; 位置控制模式常用于点到点的轨迹控制。机械臂通常采用速度控制模式, 精确控制关节在各时间周期内运动。

假设轨迹规划算法得到的机器人预定义轨迹为 $\chi = \{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_i^*, \dots, \mathbf{x}_n^*\}$ 。 $\mathbf{x}_i^*$ 是机械臂各在第 i 个周期下的位置矢量。速度控制模式下每个控制周期给定的指令是下一个周期的理想速度。第 i 个周期的指令

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{x}_{i+1}^* - \mathbf{x}_i^*) / \tau \quad (1)$$

式中, τ 是机器人系统中中断控制周期, $\mathbf{u}_i$ 为系统输入。理想情况下, 机器人第 i 个控制周期下接收到第 $i+1$ 个周期的运动指令, 在第 $i+1$ 个周期内从在第 i 个周期的系统状态矢量 $\mathbf{x}_i^*$ 以速度 $\mathbf{u}_i$ 运动运动一个中断控制周期的时间 τ , 到达系统状态矢量 $\mathbf{x}_{i+1}^*$ 。可以表示为

$$\mathbf{x}_{i+1}^* = \mathbf{x}_i^* + \mathbf{u}_i \cdot \tau \quad (2)$$

对于 6 自由度机械臂, $\mathbf{x}_i^*$ 为第 i 个周期的关节角度矢量, $\mathbf{x}_i^* = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6]$ 。输入 $\mathbf{u}_i$ 为关节指令输入, 在速度控制模式下是关节角速度指令, $\mathbf{u}_i = [\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6]$ 。实际工况下, 机械臂关节运动速度不完全等于指令速度, 两者之间存在运动误差。设运动误差 $\mathbf{m} = [\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4, \tilde{\omega}_5, \tilde{\omega}_6]$, 则将公式(2)写成函数的形式, 可以表示为下个周期的系统状态是当前系统关节角度、指令速度、运动误差和中断控制周期的函数

$$\mathbf{x}_t = f(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{m}_t) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \tau(\omega_1 + \tilde{\omega}_1) \\ \vdots \\ \theta_6 + \tau(\omega_6 + \tilde{\omega}_6) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}_t \sim N(0, \mathbf{M}_t) \quad (3)$$

式中, $\mathbf{m}_t = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4, \tilde{\omega}_5, \tilde{\omega}_6) \sim N(0, \sigma_w^2 \mathbf{I})$, 服从高斯分布; t 表示第 t 个中断周期; $\mathbf{M}_t$ 表示运动噪声方差。

机器人轨迹 Π 定义成一个以中断周期分割, 按照时间先后顺序, 包含系统预定义状态和控制输入的序列

$$\Pi = (\mathbf{x}_0^*, \mathbf{u}_0^*, \dots, \mathbf{x}_t^*, \mathbf{u}_t^*, \dots, \mathbf{x}_\ell^*, \mathbf{u}_\ell^*) \quad (4)$$

式中, ℓ 是整条预定义轨迹的中断周期数, 并且 $0 \leq t \leq \ell$; $\mathbf{x}_0^*$ 是机器人的起始状态, $\mathbf{x}_\ell^*$ 是机器人运动的目标状态; $\mathbf{u}_0^*$, $\mathbf{u}_t^*$ 和 $\mathbf{u}_\ell^*$ 分别是机器人在第 0, 第 t 和第 ℓ 周期的系统输入。

理想状态下, 运动的非确定性 $\mathbf{m}_t = 0$ 。此时, 系统输入 $\mathbf{u}_{t-1}^*$ 能够精确地将机器人从状态 $\mathbf{x}_{t-1}^*$ 驱动到状态 $\mathbf{x}_t^*$ 。式(3)可以写成

$$\mathbf{x}_t^* = f(\mathbf{x}_{t-1}^*, \mathbf{u}_{t-1}^*, 0) \quad (5)$$

1.2 反馈模型

以外部视觉相机测量机械臂末端位姿, 进行机械臂末端视觉伺服闭环控制为例。机器人外部传感定位示意图如图 1 所示。以机械臂基座位置建立系统笛卡儿坐标系 T_0 。机械臂末端位姿在基座笛卡儿坐标系下为 T_e , 变换矩阵为 0T_e 。为了提高控制精度, 进行视觉伺服, 引入外部视觉相机对机械臂末端位

姿进行测量。笛卡儿坐标系下,视觉相机的位姿 T_c ,两者之间的变换矩阵为 0T 。相机与基坐标系的位姿关系已知,在视觉相机的坐标系下,机械臂末端的位姿为 eT 。因此,通过测量得到的机械臂在笛卡儿坐标系的末端位姿 T_e

$$T_e = T_c \cdot {}^eT \quad (6)$$

反之可得

$${}^eT = T_c^{-1} \cdot T_e = T_c^{-1} \cdot FK(x_t) \quad (7)$$

式中, x_t 是系统在 t 时刻的系统状态, $FK(\cdot)$ 是机器人运动学方法。由公式(7)可知, T_e 是一个固定值,外部传感器对机械臂末端的测量值 eT 是系统状态 x_t 的函数。

当通过外部传感器对轨迹执行过程中的系统状态进行测量时,测量值仅与系统状态和测量误差相关。因此,观测模型将测量值定义成系统状态和测量误差的函数

$$z_t = h(x_t, n_t) \quad n_t \sim N(0, N_t) \quad (8)$$

式中, x_t 是第 t 个周期下的系统状态, n_t 是第 t 个周期下方差为 N_t 的测量噪声, z_t 是系统状态 x_t 下,受到随机测量误差 n_t 作用的测量值, h 是系统状态空间和测量坐标空间之间的映射关系。理想状态下,测量的非确定性因素 $n_t = 0$,没有误差和噪声的理想测量值

$$z_0^* = h(x_t^*, 0) \quad (9)$$

图 1 机器人外部传感定位示意图

2 轨迹先验概率估计

机器人高斯运动的轨迹规划需要首先建立与实际机器人运动近似的控制系统模型。控制系统模型包括运动线性化方法、卡尔曼滤波估计与系统闭环修正。并在此基础上计算出轨迹的先验概率分布。

2.1 模型线性化

机器人系统中,所有的计算都是离散化周期性的。为了模拟数字化的离散控制系统,对系统模型

(3)、(8)应用一阶 Taylor 展开。

对式(3)中的参数 x_{t-1} 和 u_{t-1} 在预定义轨迹点 (x_{t-1}^*, u_{t-1}^*) 处进行线性化。误差 m_t 服从期望为 0, 方差为 M_t 的正态分布。因此在 $m_t = 0$ 处展开。

$$x_t = f(x_{t-1}^*, u_{t-1}^*, 0) + A_t(x_{t-1} - x_{t-1}^*) + B_t(u_{t-1} - u_{t-1}^*) + V_t \quad (10)$$

$$A_t = \partial f / \partial x(x_{t-1}^*, u_{t-1}^*, 0)$$

$$B_t = \partial f / \partial u(x_{t-1}^*, u_{t-1}^*, 0)$$

$$V_t = \partial f / \partial x(x_{t-1}^*, u_{t-1}^*, 0)$$

对式(8)中的参数 x_t 在预定义轨迹点 x_t^* 处进行线性化。误差 n_t 服从期望为 0, 方差为 N_t 的正态分布。因此在 $n_t = 0$ 处展开

$$z_t = h(x_t^*, 0) + H_t(x_t - x_t^*) + W_t n_t \quad (11)$$

$$H_t = \frac{\partial h}{\partial x}(x_t^*, 0) \quad W_t = \frac{\partial h}{\partial n}(x_t^*, 0)$$

将式(5)和式(8)代入式(10)和式(11)可得

$$\bar{x}_t = A_t \bar{x}_{t-1} + B_t \bar{u}_{t-1} + V_t m_t \quad m_t \sim N(0, N_t) \quad (12)$$

$$\bar{z}_t = H_t \bar{x}_t + W_t n_t \quad n_t \sim N(0, N_t) \quad (13)$$

$$\bar{x}_t = x_t - x_t^* \quad \bar{u}_t = u_t - u_t^* \quad \bar{z}_t = z_t - h(x_t^*, 0) \quad (14)$$

式中, $\bar{x}_t$ 是实际系统状态相对于预定义轨迹的偏移量, $\bar{u}_t$ 是实际输入相对于预定义轨迹的偏移量, $\bar{z}_t$ 是实际测量值相对于理想值的偏移量。参数 A_t 、 B_t 、 V_t 、 H_t 和 W_t 都是矩阵系数, $\bar{x}_t$ 、 $\bar{u}_t$ 是矢量参数。

2.2 卡尔曼滤波状态估计

当机器人系统存在过程误差,每个控制周期内系统实际输出与系统指令之间存在服从高斯分布的未知偏差。并且由于观测系统也存在服从高斯分布的观测噪声,不能精确反映机器人轨迹偏离状态。卡尔曼滤波是机器人位置估计的有效方法,其原理本文不再赘述。本文在研究高斯运动轨迹规划过程中,采用卡尔曼滤波进行误差的先验估计。

系统预测过程可以写为

$$\tilde{x}_t^- = A_t \tilde{x}_{t-1}^- + B_t \bar{u}_{t-1} \quad (15)$$

$$P_t^- = A_t P_{t-1} A_t^T + V_t M_{t-1} V_t^T \quad (16)$$

观测矫正过程描述为

$$K_t = P_t^- H_t^T (H_t P_t^- H_t^T + W_t N_t W_t^T)^{-1} \quad (17)$$

$$\tilde{x}_t = \tilde{x}_t^- + K_t (\bar{z}_t - H_t \tilde{x}_t^-) \quad (18)$$

$$P_t = (I - K_t H_t) P_t^- \quad (19)$$

式中, $\tilde{x}_t$ 为 k 周期内对系统状态的最优估计, P_t 是系统状态的协方差估计。 K_t 为卡尔曼增益矩阵。

2.3 系统闭环优化模型

闭环反馈的目的是使实际轨迹与预定义轨迹之间的偏移量最小。轨迹偏离的代价函数可以写成

$$\min \left(\sum_{t=0}^{\ell} (\bar{\mathbf{x}}_t^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}_t + \bar{\mathbf{u}}_t^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}}_t) \right) \quad (20)$$

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{I} \quad (21)$$

$$\mathbf{D} = \beta \cdot \mathbf{I} \quad (22)$$

式中, $\mathbf{I}$ 是单位矩阵, $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$, 是两个正整数, 分别定义系统状态和输入的权重系数。在对轨迹进行闭环控制时, 如果希望优先减小轨迹位置误差, 权重系数 α 应该设定为一个较大的值, 反之亦然。

式(20)是一个典型的 LQR 控制问题。线性二次型的最优解可以写成统一的解析表达式和实现求解过程的规范化, 并可简单地采用状态线性反馈控制律构成闭环最优控制系统, 能够兼顾系统状态和输入指标。其求解过程可以表示为

$$\bar{\mathbf{u}}_t = \mathbf{L}_t \tilde{\mathbf{x}}_t \quad (23)$$

式中, $\tilde{\mathbf{x}}_t$ 是式(18)中的系统状态最优估计, $\mathbf{L}_t$ 是通过将整个 ℓ 个控制周期的轨迹过程从最后第 ℓ 个控制周期向初始控制周期逆向推导的反馈矩阵, $t \in (0, \ell)$ 。 $\mathbf{L}_t$ 可以计算为^[9]

$$\mathbf{S}_\ell = \mathbf{C} \quad (24)$$

$$\mathbf{L}_t = -(\mathbf{B}_{t+1}^T \mathbf{S}_{t+1} \mathbf{B}_t + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{B}_{t+1}^T \mathbf{S}_{t+1} \mathbf{A}_{t+1} \quad (25)$$

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{A}_{t+1}^T \mathbf{S}_{t+1} \mathbf{B}_{t+1} \mathbf{L}_t + \mathbf{A}_{t+1}^T \mathbf{S}_{t+1} \mathbf{A}_{t+1} + \mathbf{C} \quad (26)$$

3 轨迹评定计算

3.1 轨迹误差方差计算

由式(24)、(25)可知, 对于 $t \in 0, 1, \dots, \ell-1$ 的已知轨迹, 矩阵 $\mathbf{L}_t$ 可以提前计算得到。计算方法是从 $t = \ell$ 向 $t = 0$ 逆向递推。将式(18)代入式(23)可得矩阵递推表达式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_t \\ \tilde{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^* \\ \mathbf{u}_t^* \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^* \\ \mathbf{u}_t^* \end{bmatrix}, \kappa_t \mathbf{R}_t \kappa_t^T \right) \quad (28)$$

$$\kappa_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_t \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中, $\mathbf{R}_t$ 是 $[\bar{\mathbf{x}}_t \ \tilde{\mathbf{x}}_t]^T$ 的方差。式(28)给出了系统状态 $\mathbf{x}_t$ 和控制输入 $\mathbf{u}_t$ 的先验概率分布。如果方差 $\mathbf{R}_t$ 已知, 就可以通过式(27)~(29)对整个轨迹过程的中断周期内的系统状态进行估计。

将式(15)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_t \\ \tilde{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{B}_t \mathbf{L}_{t-1} \\ \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{A}_t & \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{L}_{t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{A}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{t-1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{V}_t & 0 \\ \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{V}_t & \mathbf{K}_t \mathbf{W}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_t \\ \mathbf{n}_t \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_t \\ \mathbf{n}_t \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(0, \begin{bmatrix} \mathbf{M}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_t \end{bmatrix} \right) \quad (31)$$

方差 $\mathbf{R}_t$ 可以计算为

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{F}_t \mathbf{R}_{t-1} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{G}_t \mathbf{Q}_{t-1} \mathbf{G}_t^T \quad (32)$$

$$\mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_t & 0 \\ \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{V}_t & \mathbf{K}_t \mathbf{W}_t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{B}_t \mathbf{L}_{t-1} \\ \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{A}_t & \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{L}_{t-1} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t \mathbf{A}_t \end{bmatrix} \quad (33)$$

式(33)中, 系统状态的初始方差 $\mathbf{P}_0$ 可以设置为一个较大的初始值, 这个初始值会随着系统状态估计迅速收敛到正常的估计值范围。

3.2 协方差几何化表示

为了能够得到机械臂关节、末端的误差分布, 需要将机器人关节空间的协方差向笛卡儿空间映射, 从而得到机械臂在笛卡儿空间下的误差特性。

对于预定义的第 k 个控制周期, 用 $\mathcal{N}(\mathbf{p}_k^i, \Sigma_k^i)$ 表示第 i 个连杆末端的高斯分布。那么

$$\mathbf{p}_k^i = g(\mathbf{x}_k^i) \quad (34)$$

$$\Sigma_k^i = \mathbf{J}_k^i \chi_k^i (\mathbf{J}_k^i)^T \quad (35)$$

式中, $\mathbf{p}_k^i$ 是表征第 i 个连杆末端在第 k 个控制周期时空间位置和姿态的增广矩阵; $g(\mathbf{x}_k^i)$ 是从机械臂基座到第 i 个连杆处的正向运动学计算; $\mathbf{J}_k^i$ 是 $g(\mathbf{x}_k^i)$ 对应的雅可比矩阵; χ_k^i 是状态空间 $\mathbf{x}_k^i$ 的方差。同时 χ_k^i 也是式(28)中 $\kappa_t \mathbf{R}_t \kappa_t^T$ 的 i 阶子矩阵。

由式(35), 可以确定每个关节和连杆处的非确定性, 也就能够确定机械臂任意位置在笛卡儿空间下的误差分布情况。在机器人运动的任意时刻, 其雅可比矩阵及其 i 阶子矩阵都是线性矩阵。当机器人关节位置误差在关节空间内服从高斯分布, 根据笛卡儿空间与关节空间存在的线性映射关系, 机器人上的任意一点在笛卡儿空间下的误差也服从高斯分布。由此, 可以将被映射到笛卡儿空间下的协方差矩阵 Σ_k^i 进行三维空间下的几何表达。

取 Σ_k^i 的前三阶子矩阵 $\Sigma_{3,k}^i$, $\Sigma_{3,k}^i$ 对应于笛卡儿空间位置坐标 $[x, y, z]$ 的方差子矩阵。对其进行特征值分解, 可以得到特征值 $\mathbf{V}_k^i$ 和特征矢量 $\mathbf{D}_k^i$

$$[\mathbf{V}_k^i, \mathbf{D}_k^i] = \text{Eig}(\Sigma_{3,k}^i) \quad (36)$$

因此, 第 i 个连杆末端位置的估计 Es_k^i 可以用期望为 P_k^i , 方差为 $\Sigma_{3,k}^i$ 的概率分布表示

$$Es_k^i = V_k^i \cdot \text{Sqrtm}(D_k^i) \cdot S_0 + P_k^i \quad (37)$$

式中, S_0 是坐标位于原点, 半径为 3 个单位长度的标准球。式(37)的演变过程如图 2 所示。

图 2 机器人方差空间椭球

3.3 无碰撞概率定性分析

通过第 3.2 节中的方法, 只要指定机器人连杆、关节上的某点, 求得其雅可比矩阵, 就能够对其运动过程的高斯分布进行求解。也就是说机械臂上任一点的高斯分布都可以通过估计得到。高斯分布范围如果与周围环境发生干涉, 就说明机械臂运动过程存在干涉碰撞的可能。但是, 对于多自由度机械臂, 在每个控制周期跟踪计算众多指定点的高斯分布计算量过大。

为了简化计算和评估过程, 采用一种比较保守的方法, 根据概率论 3σ 原则, 选择机器人两端误差椭球中最长的轴的三倍距离作为最大包络半径, 以此定为机器人连杆的在误差非确定影响下的安全距离。连杆两端与安全距离关系如图 3 所示, 设连杆起始端方差椭球的三个轴长度分别为: ρ_1^{i-1} , ρ_2^{i-1} , ρ_3^{i-1} , 另一端方差椭球的三轴长度分别为: ρ_1^i , ρ_2^i , ρ_3^i 。其中, ρ_1^i 是连杆两端椭球轴中最长的轴长, 则可以定性地将 ρ_1^i 作为连杆的安全距离, 如果机器人在运动过程中与障碍之间的距离 $d_o > \rho_1^i$, 则可以认为机器人在运动与传感非确定性影响下依然是安全的。反之, 则认为机器人与环境存在碰撞可能。

在数学计算中, 对通过式(36)中得到的特征矢量矩阵 D_k^i , 连接第 i 和 $i+1$ 连杆两端最大安全距离 R_k^i 可记为

$$R_k^i = 3 \cdot \max(D_k^i(1,1), D_k^i(2,2), D_k^i(3,3), D_k^{i-1}(1,1), D_k^{i-1}(2,2), D_k^{i-1}(3,3)) \quad (38)$$

式中, $D_k^i(j,j)$ 表示矩阵 D_k^i 的第 j 个对角元素。如果要对连杆安全性做定性分析, 通过第 2.6 节方法计算连杆与环境之间最短距离 d_k^i , 如果

$$d_k^i > R_k^i \quad (39)$$

则可以认定机器人连杆在运动和传感误差非确定性影响下依然安全。

图 3 方差椭球与安全距离

3.4 到达目的点成功概率计算

通常情况下, 在定义机器人运动的目标位置时会给出到达目的点的允许误差, 例如: $x_g \pm h$ 。其中, x_g 是目标位置, h 是允许的误差范围, 如图 4 所示。图中误差允许范围区域是二维平面内的矩形, 为了确定矩形限定区域与机器人运动的方差椭圆分布(三维空间内为椭球)之间的关系, 定义矩形的四条边 L_1 , L_2 , L_3 和 L_4 。将方差椭圆与矩形区域之间的关系转变成方差椭圆与四条直线之间为关系计算。在三维空间中, 机器人运动的目标范围区域是立方体, 需要计算的是立方体的六个面与空间方差椭球之间的关系。

为了能够对图形进行清晰表达, 用平面二维分布进行表述。假定机器人运动到达预定义轨迹末端的状态空间分布为 x_e 。机器人到达目标区域 $x_g \pm h$ 的计算过程如图 4 所示。假定机器人在目标位置 $x_{k|k-1}$ 的期望为 $\hat{x}_{k|k-1}$, 方差为 $P_{k|k-1}$, 记作

$$x_{k|k-1} \sim N(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \quad (40)$$

首先只考虑概率分布 $x_{k|k-1}$ 与直线约束 L_1 方程 $a_1^T x < b_1$ 之间的碰撞概率和方差椭球缩放情况。

图 4 目标区域及误差分布关系图

用局部线性化方法表达障碍, 距离机器人最优估计位置 $\hat{x}_{k|k-1}$ 最近的障碍点到机器人最优估计位置 $\hat{x}_{k|k-1}$ 的矢量用 $\tilde{a}_i$ 表示。距离机器人最优估计位置最近的障碍点处的线性化表达式可以用式(41)进行表示

$$\tilde{a}_i^T \hat{x}_{k|k-1} = \tilde{b}_i \quad (41)$$

如图 5 所示, 为了能将二维概率椭圆(或三维概率椭球)投影到一维空间进行正态分布概率计算, 采用垂直于矢量 $\tilde{a}_i$ 的平面, 对分布为 $x_{k|k-1} \sim N(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$ 的

概率椭圆(或椭球)进行分割,并向一维空间投影得到 $\zeta \sim N(\tilde{\mathbf{a}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}, \tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i)$ 的正态分布^[10],从而在一维空间下,进行正态分布的概率计算。机器人每个控制周期内,无须通过几何方法计算概率椭圆(椭球)与障碍碰撞干涉的面积,因为概率椭球内的概率分布并不是均匀的,面积的计算毫无意义。只要能够得到距离障碍的最近点,便能够通过投影后的一维正态分布计算碰撞概率。

图5 方差椭圆碰撞概率计算

由概率统计可知^[10],如图6所示,去除机器人碰撞位置的样本形成新的正态分布函数及概率椭圆的期望和方差可由式(42)~(48)计算

$$\mu_i = \tilde{\mathbf{a}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + \lambda(\alpha_i) \sqrt{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i} \quad (42)$$

$$\sigma_i^2 = \tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i (1 - \lambda(\alpha_i)^2 + \alpha_i \lambda(\alpha_i)) \quad (43)$$

$$\alpha_i = \frac{(\tilde{\mathbf{b}}_i - \tilde{\mathbf{a}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1})}{\sqrt{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i}} \quad (44)$$

$$\lambda(\alpha_i) = \frac{\text{pdf}(\alpha_i)}{\text{cdf}(\alpha_i)} \quad (45)$$

式中, $\text{pdf}(\alpha_i)$ 是 α_i 的标准高斯概率分布函数值, $\text{cdf}(\alpha_i)$ 是 α_i 的标准高斯累积概率分布函数值,机器人最优估计位置的期望变化量 $\Delta \mathbf{x}_k^i$ 及其协方差的变化量 $\Delta \mathbf{P}_k^i$ 分别为

$$\Delta \mathbf{x}_k^i = \frac{\mathbf{P}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{a}}_i}{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{a}}_i} (\tilde{\mathbf{a}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} - \mu_i) \quad (46)$$

$$\Delta \mathbf{P}_k^i = \frac{\mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i}{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i} (\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i - \sigma_i^2) \frac{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1}}{\tilde{\mathbf{a}}_i^T \mathbf{P}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{a}}_i} \quad (47)$$

本周碰撞概率可以计算为

$$p(\mathbf{x}_{t|t-1} \in X_s) = \text{cdf}(\alpha_i) \quad (48)$$

图6 方差椭圆收缩计算示意图

根据式(46)、(47)求出不与 L_1 发生干涉的机器人误差位置集合的新分布 $\mathbf{x}_e'$, 并根据公式(48)计算得到不与 L_1 发生干涉的概率为 $\text{cdf}(\alpha_i)$ 。

以得到的新的概率分布 $\mathbf{x}_e'$ 和约束直线 L_2 方程 $\mathbf{a}_2^T \mathbf{x} < b_2$ 计算新的分布和不发生干涉的概率 $\text{cdf}(\alpha_2)$ 。以此类推,得到不与约束直线 L_3 和 L_4 的分布 $\mathbf{x}_e''$ 和 $\mathbf{x}_e'''$, 以及不发生干涉的概率 $\text{cdf}(\alpha_3)$ 和 $\text{cdf}(\alpha_4)$ 。因此,到达目标位置的概率计算为

$$P(\bigcap_0^4 \mathbf{x}_e \in (\mathbf{x}_g \pm \mathbf{h})) = \prod_0^4 \text{cdf}(\alpha_1) \text{cdf}(\alpha_2) \times \text{cdf}(\alpha_3) \text{cdf}(\alpha_4) \quad (49)$$

式中, α_1 、 α_2 、 α_3 、 α_4 是约束条件下概率分布的估计值,分别通过公式(48)计算得到。当由更多约束直线和约束平面时,泛化的公式可写为

$$P(\bigcap_0^4 \mathbf{x}_e \in (\mathbf{x}_g \pm \mathbf{h})) = \prod_0^4 \text{cdf}(\alpha_i) \quad (50)$$

4 系统仿真与试验

4.1 试验系统模型

为了验证基于运动和传感非确定性轨迹规划方法的实用性和正确性,采用空间站手套箱机械臂系统作为试验验证平台,如图7所示。手套箱中的机械臂具有6个自由度,包括一个滑动导轨、两个旋转自由度和三个俯仰自由度。机械臂运动学坐标系如图8所示。机械臂 DH 参数如表1所示, a_{i-1} 、 α_{i-1} 、 d_i 、 θ_i 分别是连杆长度、扭角、连杆偏置和

(a) 实际系统结构

(b) 系统结构模型

图7 手套箱机械臂试验平台

图8 机械臂运动学模型

关节角。手套箱是一个封闭空间，内部还放置了试验设备，机械臂的工作空间较为狭小，存在与环境发生干涉碰撞的可能。

表 1 机械臂 DH 参数表

	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	0
2	$-l_0$	0	l_1	0
3	0	-90°	0	0
4	l_2	0	0	0
5	0	90°	l_3	0
6	0	-90°	0	0
末端	0	90°	l_4	0

为了验证本章提出的运动与传感非确定性轨迹规划方法，提高试验数据的显著程度。将机械臂系统关节码盘分辨率降低至单圈 1 024(2^{10})线，不在驱动器中进行倍频处理，以增大机械臂系统运动误差。当机械臂系统各关节存在误差，机械臂的串联铰接结构使误差不断累积，机械臂系统末端误差较大。为了提高机械臂末端误差，采用视觉闭环控制，在机械臂末端粘贴标识点，增加单目视觉反馈系统对标识点位置进行测量和反馈，以提高机械臂末端的运动精度。

机械臂视觉系统两台单目相机及其视场如图 7b 所示。没有视场范围显示的第三台相机是监视相机，不在控制系统内部参与闭环反馈，对机械臂而言，其只作为环境中在运动中需要避开的障碍。当视觉相机拍到机械臂末端的标识点时，可以计算得到标识点空间位姿，从而计算机械臂末端位姿。理论上，一台摄像机就可以进行机械臂末端位姿测量和视觉反馈，但是由于机械臂工作在一个相对狭窄、复杂的环境，第二台相机作为第一台相机的系统备份。在第一台相机由于光照、阴影等原因，不能抓取标识点特征图像从而不能得到有效反馈的情况下，调用第二台相机的图像进行机械臂末端闭环。在两台相机都不能形成有效反馈时，机械臂系统不再进行视觉闭环。

机械臂运动控制采用速度控制方式。闭环中断控制周期设置为 100 ms。按照机械臂速度控制模型，机械臂的运动模型可以描述为： $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1} + \tau \cdot \boldsymbol{\omega}_t$ 。其中， $\mathbf{x}_t$ 是第 t 个控制周期机械臂系统的实际状态， $\mathbf{x}_t = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6]$ ， $\boldsymbol{\omega}_t = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6]$ 。在实际控制中，由于加减速过程、负载、扭矩变化和跟踪误差等非确定因素影响，机械臂关节实际运动速度不会与指令速度相一致。机械臂非确定性系统模型可以

写成

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{m}) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \tau(\omega_1 + \tilde{\omega}_1) \\ \vdots \\ \theta_6 + \tau(\omega_6 + \tilde{\omega}_6) \end{bmatrix} \quad (51)$$

式中， $\mathbf{x}_t = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6]$ ，控制输入 $\mathbf{u}_t = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6]$ ，过程噪声 $\mathbf{m} = [\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \dots, \tilde{\omega}_6] \sim N(0, \sigma_\omega^2 \mathbf{I})$ 。

根据视觉传感系统结构，两台视觉相机互为备份，相机坐标系与机械臂基坐标系的转换矩阵分别为 $\mathbf{T}_{v1}^c$ 和 $\mathbf{T}_{v2}^c$ 。由第 1.1 节，机械臂观测模型可以写成

$$\begin{cases} h_1(\mathbf{x}_t, \mathbf{n}_t) = \mathbf{T}_{v1}^c \cdot g(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_1 \\ h_2(\mathbf{x}_t, \mathbf{n}_t) = \mathbf{T}_{v2}^c \cdot g(\mathbf{x}) + \mathbf{n}_2 \end{cases} \quad (52)$$

对式(51)、(52)的机械臂系统模型进行微分求导，得到线性化模型参数

$$\mathbf{A}_t = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad (53)$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{V}_t = \text{diag}(\tau, \tau, \tau, \tau, \tau, \tau) \quad (54)$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_t^1 = \mathbf{T}_{v1}^c \cdot \mathbf{J}_t(t) \\ \mathbf{H}_t^2 = \mathbf{T}_{v2}^c \cdot \mathbf{J}_t(t) \end{cases} \quad (55)$$

式中， τ 是机械臂的中断控制周期； $\mathbf{J}_t$ 是机械臂在第 t 个控制周期时的雅可比矩阵。

4.2 系统仿真

根据设计安装过程的精度测量数据和系统传感器说明书数据，6 个关节误差的方差值设定为 $[0.03^\circ; 0.01^\circ; 0.03^\circ; 0.03^\circ; 0.01^\circ; 0.02^\circ]^2$ ，视觉系统对机械臂末端位姿测量误差的方差值为 $[0.7 \text{ mm}; 0.7 \text{ mm}; 6 \text{ mm}; 1^\circ; 1^\circ; 1.2^\circ]^2$ 。机械臂以起始关节角度 $[59.4344^\circ; 48^\circ; -43^\circ; 144^\circ; 28^\circ; 32^\circ]$ 到达笛卡尔坐标系下目的点 (0 mm; 200 mm; 0 mm)，目的点对应的关节角度为 $[127.4344^\circ; -66^\circ; -27^\circ; 150^\circ; 27^\circ; 36^\circ]$ 。目标位置范围设定为 $(0 \pm 1 \text{ mm}; 200 \pm 1 \text{ mm}; 0 \pm 1 \text{ mm})$ 。

如图 9 所示，应用基于快速扩展随机树的轨迹规划方法生成机械臂避障轨迹，应用基于运动与传感非确定性轨迹方法对机械臂运动过程及其误差分步进行仿真，得到估计过程中机械臂关节和末端的误差椭圆。各关节在整个轨迹过程中的误差分布如图 10 所示，为了更清楚地显示分布情况，对误差进行放大 200 倍处理。机械臂沿着预定义轨迹运动过程中，机械臂连杆与周围环境的最短距离及非确定性误差距离如图 11 所示。从图 11 可以看出所有的非确定性误差范围都远远小于连杆与环境之间的最短距离。因此，可以断定机械臂在运动非确定性和视觉传感非确定性影响下依然能够安全地避开障碍。

图 9 非确定性轨迹生成

图 10 带有放大 200 倍误差分布的关节轨迹

(a) 连杆 4 到周围环境的最短距离

(b) 连杆 3 到周围环境的最短距离

(c) 连杆 2 到周围环境的最短距离

图 11 连杆到环境距离和非确定性误差带

4.3 轨迹概率分布试验验证

为了对所提出的非确定性轨迹规划方法进行验证, 通过对机械臂实际运动进行测量, 比较实际机械臂末端位置和仿真过程得到的误差椭圆之间的关系, 验证两者的契合程度。

使机械臂按照预定义轨迹重复运动 100 遍, 用激光跟踪仪测量机械臂末端位置并记录数据, 测量过程如图 12 所示。记录轨迹以及与仿真图形的对比显示如图 13 所示。从图 13 可以看出, 尽管误差椭圆稍大于机械臂末端实际轨迹范围, 但两者之间十分近似, 并且具有相同的变化过程和趋势。

图 12 试验过程

图13 实际轨迹测量图

仿真和试验结果表明,误差椭球在机械臂末端超出视觉系统范围时逐渐扩大,又在视觉系统能够提供有效反馈的情况下迅速缩小,表明基于视觉反馈的闭环控制能够提升机械臂的运动精度。但误差椭球并不是无限缩小,当视觉传感与机械臂之间形成未定闭环系统的时候,误差椭球的大小几乎保持不变。误差椭球的大小与运动和反馈系统的确定性程度直接相关。

4.4 到达目的点成功概率验证

对机械臂到达目标点范围的成功概率进行验证分析。目的位置区域、机械臂末端在轨迹终点处的分布,依据第3.4节方法计算得到的概率收缩后的概率分布和机械臂在终点处的实际测量点如图14所示。到达目标范围的误差椭球收缩过程如图所示。误差椭球的收缩过程如图15所示。整个计算过程分为3步。

图14 到达目标区域的概率

(1) 对初始误差椭球应用平面约束 $Z > -1$ 和 $Z < 1$ 计算得到不与两约束平面发生干涉的新的误差椭球概率分布,如图15a、15b所示。

(2) 对步骤(1)得到的分布应用平面约束 $X > -1$ 和 $X < 1$ 计算新的不与两约束平面发生干涉的分布和误差椭球,如图15c、15d所示。

(3) 对步骤(2)得到的分布应用平面约束 $Y > 199$ 和 $Y < 201$ 计算新的不与两约束平面发生干涉的分布和误差椭球,如图15e、15f所示。

图 15 误差椭圆收缩过程

依据第 3.4 节方法, 计算得到机械臂末端误差协方差分布矩阵为 $[0.13, -0.048, 0.098\ 9; -0.048, 0.313\ 7, 0.139\ 8; 0.098\ 9, 0.139\ 8, 0.689\ 6]$, 到达目标位置区域的概率是 68.521%。根据实际试验中测量得到的机械臂末端点与目的点区域之间的关系, 100 次重复试验中, 有 71 次到达目标区域, 也就是说试验得到的到达目标区域的成功概率为 71%。由此可见, 试验和仿真数据结果相近。

5 结论

(1) 本文机器人轨迹规划与卡尔曼滤波、有限时域控制和概率论相结合, 能够对机械臂在运动、传感等多源误差影响下的运动误差范围进行估计。从而对干涉碰撞情况进行定性分析, 对到达目标位置概率进行定量计算。

(2) 仿真和试验的对比证明了本文方法的有效性。方法的准确性受到误差分布设定情况的影响。对机械臂运动和传感误差情况设置越准确, 估计结果与实际试验的契合度越高。

(3) 本文方法还可以应用于自主移动小车、无

人机等进行周期性线性控制的系统中。还可以应用于实时运动决策和最优路径选取。这也是本文今后进一步深入研究的重点内容。

参 考 文 献

- [1] WEI Zhixuan, CHEN Weidong, WANG Hesheng, et al. Manipulator motion planning using flexible obstacle avoidance based on model learning[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2017, 5: 1-12.
- [2] SUN Da, NAGHDY F, DU Haiping. Neural network-based passivity control of teleoperation system under time-varying delays[J]. IEEE Transaction on Cybernetics, 2017, 47(7): 1666-1680.
- [3] ZHANG Jianqiao, YE Dong, LIU Ming, et al. Adaptive fuzzy finite-time control for spacecraft formation with communication delays and changing topologies[J]. Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics, 2017, 354(11): 4377-4403.
- [4] OTTE M, CORRELL N. C-FOREST: Parallel shortest path planning with superlinear speedup[J]. IEEE Transaction on Robot, 2013, 29(3): 798-806.
- [5] TOIT D N E. Robot motion planning in dynamic, cluttered, and uncertain environments: The partially closed-loop receding horizon control approach[D]. Pasadena: California Inst. Technol., 2010.
- [6] TOIT D N E, BURDICK J W. Robot motion planning in dynamic, uncertain environments[J]. IEEE Transaction on Robot, 2012, 28(1): 101-115.
- [7] SUN W, DEN B J, ALTEROVITZ R. Stochastic extended LQR: Optimization-based motion planning under uncertainty[C]// Proc. Workshop on The Algorithmic Foundations of Robotics, August 3-5, 2014, Boğaziçi University, Istanbul, Turkey: Springer, 2015: 609-626.
- [8] SUN W, PATIL S, ALTEROVITZ R. High-frequency replanning under uncertainty using parallel sampling based motion planning[J]. Robotics IEEE Transactions on Robot, 2015, 31(1): 104-116.
- [9] STENGEL R F. Optimal control and estimation[M]. New York: Dover Publications, 1994.
- [10] DURRETT R. Probability: Theory and examples[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

作者简介: 祁若龙(通信作者), 男, 1983 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机器人自主运动与智能决策方法。
E-mail: qiruolong@126.com