

DOI: 10.3901/JME.2015.11.031

球面四杆机构函数综合的带修复策略 可行性规则差分进化算法*

车林仙^{1,2} 杜力¹ 黄勇刚¹

(1. 重庆工商大学制造装备机构设计与控制重庆市重点实验室 重庆 400067;

2. 重庆工程职业技术学院机械工程学院 重庆 402260)

摘要: 根据杆长限制条件, 建立约束方程, 进而得出求解球面四杆机构函数综合问题的非线性方程组, 并将该方程组的求解转化为鞍点规划问题。以杆长协调、传动角、避免乱支缺陷等为约束条件, 提出球面四杆机构近似函数综合的约束优化模型, 再应用差分进化(Differential evolution, DE)算法求解该问题。在定义约束违反度和弱、强不可行解的基础上, 提出处理约束条件的改进可行性规则, 形成求解约束优化问题的可行性规则差分进化(Feasibility-rule-based DE, FRDE)算法。应用 4 个 benchmark 约束优化问题测试 FRDE 算法的优化性能, 结果表明, 其可靠性和稳健性指标优于对比算法。面向机构优化综合问题, 将修复策略融入 FRDE 算法, 发展为带修复策略的 FRDE 算法(Feasibility-rule-based DE algorithm with repair strategies, FRRDE)。给出 5 个函数综合实例。结果显示, 优化模型和方法可行有效, 且 FRRDE 算法的优化性能好于对比算法。

关键词: 球面四杆机构; 函数综合; 约束优化; 差分进化算法; 可行性规则; 修复策略

中图分类号: TH112

Feasibility-rule-based Differential Evolution Algorithm with Repair Strategies for Function Synthesis of Spherical Four-bar Linkages

CHE Linxian^{1,2} DU Li¹ HUANG Yonggang¹

(1. Chongqing Municipal Key Laboratory of Mechanism Design and Control for Manufacturing Equipment,

Chongqing Business and Technology University, Chongqing 400067;

2. School of Mechanical Engineering, Chongqing Institute of Engineering, Chongqing 402260)

Abstract: According to restraints given by constant-length of links, the constrained equations are established, and the system of nonlinear equations is then obtained to solve the function generating synthesis problem of spherical four-bar linkages. Consequently, this system is transformed into a saddle-point programming problem. By considering the constraint on length coordination, transmission angle, and to avoid branch defect, the constrained optimization model is thus constructed to formulate the approximately function generating synthesis of spherical four-bar linkages, which can be solved by the differential evolution (DE) algorithm. The constraint violation, weakly and strongly infeasible solution are defined to guide the search process. According to these concepts, an improved feasibility rule is presented to handle constraints and a feasibility-rule-based DE (FRDE) algorithm is formed to approach constrained optimization problems. The FRDE algorithm is tested against four benchmark problems and the results indicate that the presented algorithm outperforms the compared ones in term of reliability and robustness. Orientating optimization synthesis of mechanisms, it is studied to develop an FRDE algorithm with repair strategies (FRRDE) which integrates the repair operators into the FRDE algorithm. Five real cases of synthesis are given to show that this model and approach is valid and feasible, and the proposed FRRDE algorithm performs better in term of final results than compared algorithms.

Key words: spherical four-bar linkage; function synthesis; constrained optimization; differential evolution algorithm; feasibility rule; repair strategy

0 前言

球面机构系平面机构与空间机构的桥梁, 比如

单环空间连杆机构可转化为等值球面机构进行分析和综合。球面铰链四杆机构是球面机构中的基础机构, 对其深入研究具有重要意义。球面铰链四杆机构函数综合的本质是确定机构尺度, 使两连架杆在若干位置实现给定函数关系, 可分为精确和近似综合两类问题, 已有大量研究成果。

在精确函数发生综合方面, CHIANG^[1]应用解

* 国家自然科学基金(51075417, 51105397)和重庆市教育委员会科学技术研究(KJ1403201)和制造装备机构设计与控制重庆市重点实验室开放基金(20150203)资助项目。20140919 收到初稿, 20150402 收到修改稿

析法求解 4、5 组给定角度关系的问题。ALIZADE 等^[2]给出求解 5 组给定关系精确综合问题的线性方程组,降低了计算难度。CERVANTES-SÁNCHEZ 等^[3-4]应用解析法研究 3~6 组给定关系的精确综合问题,其 6 组给定角度关系综合问题的求解方程为 10 次多项式。杨通等^[5]给出 4 组给定关系的球面 Burmester 曲线方程及 Burmester 点的计算和分类方法,进而得出精确综合问题的机构类型解域。

在近似函数发生综合方面,LIU 等^[6]建立可动性约束下的最小二乘优化模型,再应用正交解耦算法求解该问题。尔后,他们进一步研究这类问题^[7],先规划出输入-输出曲线并据此选择数据,再应用优化程序使其误差最小化。FARHANG 等^[8]应用曲柄转角的一次和二次谐波线性组合函数,建立从动连架杆转角的近似表达式,由该近似方程综合出具有整转运动的机构。王德伦等^[9]应用自适应近似综合理论和鞍点规划方法研究近似函数综合问题,得到较好结果。ALIZADE 等^[10]应用内点插值、最小二乘和 Chebyshev 近似法研究函数综合问题,并对 3 种方法的求解结果进行对比分析。褚金奎等^[11]应用 Fourier 变换理论研究该问题,提出近似函数综合的数值图谱方法。ALIZADEH 等^[12]研究了机架中心角为 90° 的两连架杆准等速设计问题,将其转化为最小化设计误差或结构误差的近似函数综合问题。

随着计算智能技术的发展,现代智能算法越来越广泛地应用于连杆机构尺度综合及构型优选^[13-21]。LIU 等^[13]在曲线形状特征参数提取的基础上,应用人工免疫系统求解铰链四杆机构轨迹生成问题。SMALI 等^[14]建立具有混合任务的铰链四杆机构近似运动学优化设计模型,再应用融合蚁群算法与梯度搜索的混合方法求解该问题。段旭洋等^[15]应用嵌套粒子群算法综合四、六和八杆轨迹生成机构,并进行构型优选;ZHAO 等^[16]则应用粒子群算法对重载操作机多杆机构进行构型优选。LIN^[17]设计一种遗传算法和差分进化(Differential evolution, DE)混合算法,再应用于铰链四杆机构轨迹优化综合中。车林仙^[18]应用双种群 DE 算法求解铰链四杆机构近似运动学优化设计模型。ORTIZ 等^[19]设计一种具有自适应控制参数的 DE 算法,再应用于四、六杆轨迹生成机构优化综合。BULATOVIĆ 等^[20]应用新颖的布谷鸟搜索算法求解六杆双停歇机构优化综合问题。ZHANG 等^[21]提出球面串联机构的多准则运动学优化方法,将关于工作空间、可操作性指标和机构尺寸的多目标优化问题,通过线性加权转化为单目标优化问题,再应用遗传算法求解该问题,有效改进优化解的质量。

本文将 DE 算法推广到球面铰链四杆机构的近似函数综合,首先建立机构近似函数综合的约束优化模型,再应用 DE 算法求解该问题。

DEB^[22]提出的可行性规则是一种处理约束条件的有效方法,为更好处理机构综合问题的约束条件,文中提出一种改进可行性规则。将该规则与改进 DE 算法有机结合,形成求解约束优化问题的可行性规则差分进化算法(Feasibility-rule-based DE algorithm, FRDE)。应用 benchmark 问题测试该算法的计算性能,还与改进随机排序(Improved stochastic ranking, ISR)法^[23]、文化差分进化(Cultured DE CDE)算法^[24]和 ε -DE 算法^[25]等近年来提出的有效改进算法比较。

将球面四杆机构优化综合问题的约束条件分为软、硬条件^[18],并分类处理,形成面向机构优化综合的带修复策略的 FRDE 算法(FRDE algorithm with repair strategies, FRRDE)。最后,给出 5 个机构综合实例,以验证 FRRDE 算法的有效性和可靠性。

1 球面四杆机构近似函数综合数学模型

1.1 近似函数综合问题描述

如图 1 所示,设欲综合的球面四杆机构 $O_A A B O_B$ 杆长(对应球心角)依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 。综合目标为,使其两连架杆标线 $O_A A'$, $O_B B'$ 近似实现给定函数关系

$$\psi = \psi(\varphi) \quad (1)$$

式中 φ ——输入连架杆标线 $O_A A'$ 的转角;
 ψ ——输出连架杆标线 $O_B B'$ 的转角。

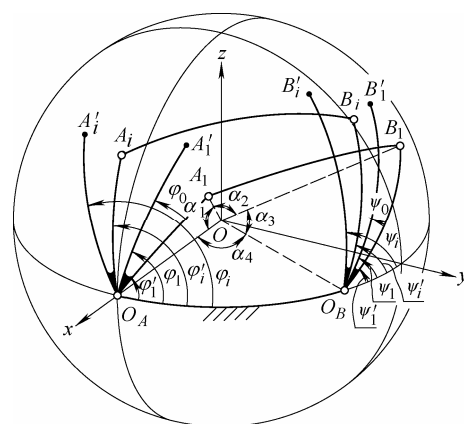


图 1 球面四杆机构近似函数综合模型

设连架杆 $O_A A$, $O_B B$ 的标线角分别为 φ_0, ψ_0 (以逆时针方向为正), 即二面角 $\angle A O_A A' = \varphi_0$, $\angle B O_B B' = \psi_0$ 。于是, 两连架杆标线 $O_A A'$, $O_B B'$ 的函数关系式

(1)可转化为两连架杆 $O_A A, O_B B$ 的函数关系

$$\psi' = \psi(\varphi' + \varphi_0) - \psi_0 \quad (2)$$

若将式(1)离散为 N 组对应角度 (φ_i, ψ_i) ($i=1, 2, \dots, N$), 则该综合问题转化为求出合适的初始对应角度 (φ'_1, ψ'_1) , 使机构能依次实现对应角度增量 $(\varphi_{1i}, \psi_{1i})$ ($i=2, 3, \dots, N$), 其中角度增量 $\varphi_{1i} = \varphi_i - \varphi_1 = \varphi'_i - \varphi'_1$, $\psi_{1i} = \psi_i - \psi_1 = \psi'_i - \psi'_1$ 。

以球心 O 为原点, x 轴正向沿 OO_A 方向, 机架 $O_A O_B$ 位于 Oxy 平面内, 建立坐标系 $Oxyz$ (图 1)。若将机构映射至单位球面上, 则铰链中心 O_A, A, B, O_B 的坐标矢量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_A &= (1 \ 0 \ 0)^T \\ \mathbf{A}_i &= (x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai})^T = (\cos \alpha_1 \ \sin \alpha_1 \cos \varphi'_i \ \sin \alpha_1 \sin \varphi'_i)^T \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i &= (x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi})^T = \text{Rot}(z, \alpha_4) \times \\ &(\cos \alpha_3 \ \sin \alpha_3 \cos \psi'_i \ \sin \alpha_3 \sin \psi'_i)^T = \\ &\begin{pmatrix} \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 - \sin \alpha_3 \sin \alpha_4 \cos \psi'_i \\ \cos \alpha_3 \sin \alpha_4 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \psi'_i \\ \sin \alpha_3 \sin \psi'_i \end{pmatrix} \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{O}_B = (\cos \alpha_4 \ \sin \alpha_4 \ 0)^T$$

在式(3)、(4)中, 当 $i=2, 3, \dots, N$ 时, 分别有 $\varphi'_i = \varphi'_1 + \varphi_{1i}$, $\psi'_i = \psi'_1 + \psi_{1i}$ 。

连杆 AB 运动至第 i 位置时, 其长度(对应球心角)为

$$\alpha_{2i} = \arccos(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i) \quad i=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

根据连杆 AB 长度不变的约束条件, 得综合方程

$$\begin{aligned} &\arccos(x_{Ai}x_{Bi} + y_{Ai}y_{Bi} + z_{Ai}z_{Bi}) = \\ &\arccos(x_{A1}x_{B1} + y_{A1}y_{B1} + z_{A1}z_{B1}) \quad i=2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (6)$$

1.2 设计变量与目标函数

式(6)是由 $N-1$ 个方程组成的含 5 个未知量 $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \varphi'_1, \psi'_1)$ 的非线性方程组, 最多可精确实现 6 组对应角度。当 $N \geq 7$ 时, 只能应用优化方法进行近似函数综合。将优化变量记为 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_5)^T = (\alpha_1 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \varphi'_1 \ \psi'_1)^T$, 应用鞍点规划法可得近似函数综合问题的目标函数

$$\min f(\mathbf{x}) = \max_{i=2,3,\dots,N} \{ |f_{i-1}(\mathbf{x})| \} \quad (7)$$

式中, $f_{i-1}(\mathbf{x})$ 为非线性综合方程, 据式(6)可得

$$\begin{aligned} f_{i-1}(\mathbf{x}) &= \arccos(x_{Bi}x_{Ci} + y_{Bi}y_{Ci} + z_{Bi}z_{Ci}) - \\ &\arccos(x_{B1}x_{C1} + y_{B1}y_{C1} + z_{B1}z_{C1}) \quad i=2, 3, \dots, N \end{aligned}$$

1.3 约束条件

1.3.1 曲柄存在条件

通常希望所设计机构的主动输入连架杆能作整周转动^[8-9], 亦即要求机构为曲柄摇杆或双曲柄机构。根据 Grashof 准则, 可得铰链四杆机构存在曲柄的杆长约束条件

$$g_1(\mathbf{x}) = \min\{\alpha_1, \alpha_4\} - \max\{\alpha_2, \alpha_3\} \leq 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} g_2(\mathbf{x}) &= 2(\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} + \\ &\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

1.3.2 杆长限制条件

最短杆长限制

$$g_3(\mathbf{x}) = \alpha_{\min} - \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \leq 0 \quad (10)$$

式中, α_{\min} 为根据工程实践要求确定的最小杆长。

杆长比限制

$$g_4(\mathbf{x}) = \frac{\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}{\min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}} - [R_a] \leq 0 \quad (11)$$

式中, $[R_a]$ 为根据工程实践要求确定的杆长比许用值。

本文所综合的机构均为特征球面四杆机构^[26]。根据所得特征机构, 可进一步转换出与之对应的另外 7 个杆长尺寸组合不同的球面四杆机构(各杆长均为 $0 \sim 180^\circ$), 这组机构具有相同的可动性。由特征球面四杆机构的定义可知: 任意两杆长度之和和不大于 180° ^[26], 于是有杆长限制条件

$$g_5(\mathbf{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \pi \leq 0 \quad (12)$$

$$g_6(\mathbf{x}) = \alpha_1 + \alpha_3 - \pi \leq 0 \quad (13)$$

$$g_7(\mathbf{x}) = \alpha_1 + \alpha_4 - \pi \leq 0 \quad (14)$$

$$g_8(\mathbf{x}) = \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \leq 0 \quad (15)$$

$$g_9(\mathbf{x}) = \alpha_2 + \alpha_4 - \pi \leq 0 \quad (16)$$

$$g_{10}(\mathbf{x}) = \alpha_3 + \alpha_4 - \pi \leq 0 \quad (17)$$

1.3.3 传动角约束

当曲柄 $O_A A$ 与机架 $O_A O_B$ 呈重叠和拉直“共线”时, 连杆 AB 与摇杆 $O_B B$ 的夹角 δ 分别取得最小值 δ_{\min} 和最大值 δ_{\max} , 且有^[27]

$$\cos \delta_{\min} = \frac{\cos(\alpha_4 - \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3}$$

$$\cos \delta_{\max} = \frac{\cos(\alpha_4 + \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3}$$

当 $0 \leq \delta \leq \pi/2$ 时, 传动角 $\gamma = \delta$; 当 $\pi/2 < \delta \leq \pi$ 时, 传动角 $\gamma = \pi - \delta$ 。为使 $\gamma_{\min} \geq [\gamma]$, 应有约束条件

$$g_{11}(\mathbf{x}) = \left| \frac{\cos(\alpha_4 - \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3} \right| - \cos[\gamma] \leq 0 \quad (18)$$

$$g_{12}(\mathbf{x}) = \left| \frac{\cos(\alpha_4 + \alpha_1) - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3} \right| - \cos[\gamma] \leq 0 \quad (19)$$

1.3.4 避免乱支缺陷

由于连杆 AB 与从动连架杆 $O_B B$ 有两种装配构型, 而不同构型通常对应不同运动分支。对综合所得的函数发生机构, 若从动连架杆欲达位置位于不同分支上, 则该机构存在乱支缺陷。存在此缺陷的机构不能驱动从动连架杆经过所有欲达位置。

设平面 Ξ : $O A_i O_B$ 的单位法矢为 $\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为 x, y, z 方向的单位矢量), 则有

$$\xi_i = \mathbf{A}_i \times \mathbf{O}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{Ai} & y_{Ai} & z_{Ai} \\ x_{OB} & y_{OB} & z_{OB} \end{vmatrix} =$$

$$-z_{Ai} y_{OB} \mathbf{i} + z_{Ai} x_{OB} \mathbf{j} + (x_{Ai} y_{OB} - y_{Ai} x_{OB}) \mathbf{k}$$

考虑到平面 Ξ 过原点 O , 于是 Ξ 的方程为

$$\xi_{i1} x + \xi_{i2} y + \xi_{i3} z = 0 \quad (20)$$

当铰链中心 O_B, B_i, A_i 逆时针排列时, 将点 B_i 的坐标 (x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi}) 代入平面 Ξ 的方程式(20), 应有

$$\xi_{i1} x_{Bi} + \xi_{i2} y_{Bi} + \xi_{i3} z_{Bi} > 0$$

反之, 当 O_B, B_i, A_i 顺时针排列时, 则有

$$\xi_{i1} x_{Bi} + \xi_{i2} y_{Bi} + \xi_{i3} z_{Bi} < 0$$

记 $\Pi_i = \xi_{i1} x_{Bi} + \xi_{i2} y_{Bi} + \xi_{i3} z_{Bi}$, 为避免乱支缺陷, 对一切 $i=1, 2, \dots, N$, Π_i 应同号。因此, 有约束条件

$$g_{11+i}(\mathbf{x}) = -\Pi_1 \Pi_i < 0 \quad i=2, 3, \dots, N \quad (21)$$

式(21)为 $N-1$ 个不等式约束函数。

2 约束优化问题的可行性规则差分进化算法

2.1 约束优化问题描述

不失一般性, 本文仅考虑全局最小化约束优化问题

$$\min \{f(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \Omega \subset S \subset \mathbf{R}^D\} \quad (22)$$

$$\text{s.t. } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j=1, 2, \dots, J_1 \quad (23)$$

$$h_j(\mathbf{x})=0 \quad j=J_1+1, J_1+2, \dots, J_1+J_2 \quad (24)$$

式中 \mathbf{x} ——优化矢量, $\mathbf{x}=(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_D)^T$;

D ——优化矢量的维数;

$f(\mathbf{x})$ ——目标函数;

Ω ——可行域;

S ——解空间, $S=\prod_{d=1}^D [l_d, u_d]$;

\mathbf{u}, \mathbf{l} ——优化矢量 \mathbf{x} 的上、下界约束

$$\mathbf{u}=(u_1 \ u_2 \ \dots \ u_D)^T$$

$$\mathbf{l}=(l_1 \ l_2 \ \dots \ l_D)^T$$

$g_i(\mathbf{x})$ ——不等式约束;

$h_i(\mathbf{x})$ ——等式约束;

J_1, J_2 ——不等式、等式约束数。

为便于求解, 将等式约束式(24)放宽为不等式约束

$$g_j(\mathbf{x})=|h_j(\mathbf{x})|-\varepsilon_0 \leq 0 \quad j=J_1+1, J_1+2, \dots, J_1+J_2 \quad (25)$$

式中, ε_0 为允许违反等式约束的容忍度(ε_0 为小正数)。

求解无约束优化问题的 DE 算法参见文献[18], 文中不再赘述。设算法的种群规模为 N_p , 缩放因子为 F , 交叉因子为 C_R , 进化至第 t 代的群体为 $\mathcal{P}^{(t)}=\{\mathbf{x}_1^{(t)}, \mathbf{x}_2^{(t)}, \dots, \mathbf{x}_{N_p}^{(t)}\}$ ($t=0, 1, \dots, T$, T 为最大进化代数)。

2.2 约束处理方法

对于约束优化问题, DEB^[22]提出比较两个个体的可行性规则: ① 可行解优于不可行解; ② 两可行解按目标函数值比较, 函数值小者占优; ③ 两不可行解按约束违反度比较, 违反度小者占优。

为评价不可行解, 给出如下定义。

定义 1: 当应用可行性规则处理约束条件式(23)和式(25)时, 任意个体 $\mathbf{x}(\in S)$ 的约束违反度为

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J_1+J_2} w_j \cdot \max\{0, g_j(\mathbf{x})\} \quad (26)$$

式中, $w_j(>0)$ 为第 j 个约束函数的罚因子。

由于大部分约束优化问题的全局最优解位于可行域边界 $\partial\Omega$ 的附近区域, 因此, 在进化前期, 应用部分接近 $\partial\Omega$ 的相对较优不可行解引导寻优可加速收敛速度。

定义 2: 在第 t 代种群 $\mathcal{P}^{(t)}$ 的不可行解中, 部分约束违反度较小的个体称为弱不可行解, 其余个体称为强不可行解。

定义 3: 在 $\mathcal{P}^{(t)}$ 中, 可行解与弱不可行解合称优势个体, 由所有优势个体组成的群体称为优势子群。

在 $\mathcal{P}^{(t)}$ 中, 设优势子群规模阈值为 $N_s^{(t)}$, 可行解规模为 $N_f^{(t)}$, 弱不可行解规模为 $N_{wi}^{(t)}$, 弱不可行解的允许约束违反度为 $[\mathcal{Q}]^{(t)}$ 。当 $N_f^{(t)} < N_s^{(t)}$ 时, 取 $N_{wi}^{(t)} = N_s^{(t)} - N_f^{(t)}$ 。此时, 对 $\mathcal{P}^{(t)}$ 中的所有不可行解按

约束违反度从小到大排序, 第 $N_{wi}^{(t)}$ 个不可行解对应的约束违反度即为 $[g]^{(t)}$ 。当 $N_f^{(t)} \geq N_s^{(t)}$ 时, 取 $N_{wi}^{(t)} = 0$ 。此时, 不再设置弱不可行解, 显然 $[g]^{(t)} = 0$ 。故, 在进化过程中 $[g]^{(t)}$ 将随 t 动态调整。

根据上述约定, 本文将 DEB 可行性规则改进如下: ① 可行解优于弱不可行解, 而弱不可行解优于强不可行解; ② 两可行解或两弱不可行解按目标函数值比较, 函数值小者占优; ③ 两强不可行解按约束违反度比较, 违反度小者占优。

由父代种群 $\mathcal{P}^{(t)}$ 生成子代种群 $\mathcal{P}^{(t+1)}$ 时, 要应用改进 DEB 规则比较父代个体 $\mathbf{x}_n^{(t)}$ 与对应试验个体 $\mathbf{x}_n^{\prime(t)}$ (需要给定允许违反度 $[g]$), 其中的优胜个体即为子代个体 $\mathbf{x}_n^{(t+1)}$ 。如何确定 $[g]$ 呢? 本文对 $\mathcal{P}^{(t)}$ 的所有个体按 $g(\mathbf{x})$ 排序, 再确定 $[g]^{(t)}$, 以此作为比较 $\mathbf{x}_n^{(t)}$ 与 $\mathbf{x}_n^{\prime(t)}$ 的允许违反度。这样可动态生成 $\mathcal{P}^{(t+1)}$, 提高进化效率。

2.3 变异策略改进

在 DE 算法的多种变异版本中, DE/best/2/bin 策略寻优速度较快、精度较高, 但易早熟收敛。为改善优化性能, 文中提出一种 DE/elitist/2/bin (简记为 DEe2) 策略。生成子代变异个体 $\mathbf{x}_n^{\prime(t)}$ 时, 随机选择一个精英个体作为基矢量, 这样既能提高算法的收敛速度, 又能在一定程度上保持种群的多样性。DEe2 变异算子为

$$\mathbf{x}_n^{\prime(t)} = \mathbf{x}_{eli}^{(t)} + F[(\mathbf{x}_{r_1}^{(t)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(t)}) + (\mathbf{x}_{r_3}^{(t)} - \mathbf{x}_{r_4}^{(t)})] \quad (27)$$

式中, $\mathbf{x}_{r_1}^{(t)}, \dots, \mathbf{x}_{r_4}^{(t)}$ 为异于 $\mathbf{x}_n^{(t)}$ 的 4 个互异父代个体, $\mathbf{x}_{eli}^{(t)}$ 为从父代精英子群 $\mathcal{P}_{eli}^{(t)}$ 中随机选择的 1 个个体。其中, $\mathcal{P}_{eli}^{(t)}$ 由按改进 DEB 规则确定的 5~10 个最优父代个体组成。

2.4 算法流程与计算复杂度

将改进 DEB 规则与 DE 算法结合, 形成求解约束优化问题的 FRDE 算法, 其流程如图 2 所示。

在该算法中, 初始化种群 $\mathcal{P}^{(0)}$ 时, 按式(28)随机生成 N_p 个个体

$$\mathbf{x}_{n,d}^{(0)} = l_d + \text{rand}() (u_d - l_d)$$

$$n=1, 2, \dots, N_p \quad d=1, 2, \dots, D \quad (28)$$

根据图 2 所示流程, 先分析各步时间复杂度, 再得出 FRDE 算法复杂度。生成变异个体和试验个体: $O(2N_p D)$; 评价试验个体: $O(2N_p)$; 选择子代个体: $O(N_p)$; 确定下一代 $[g]$: $O(N_p \lg N_p)$ (最坏情况下, 整个种群均为不可行解, 需要对所有个体的 g 按从小到大排序); 更新历史最优个体: $O(1)$ 。略去低阶项, 可得 FRDE 算法的复杂度为 $O(N_p D T)$ 。因此, FRDE 算法为立方阶复杂度, 与基本 DE 算法一致。

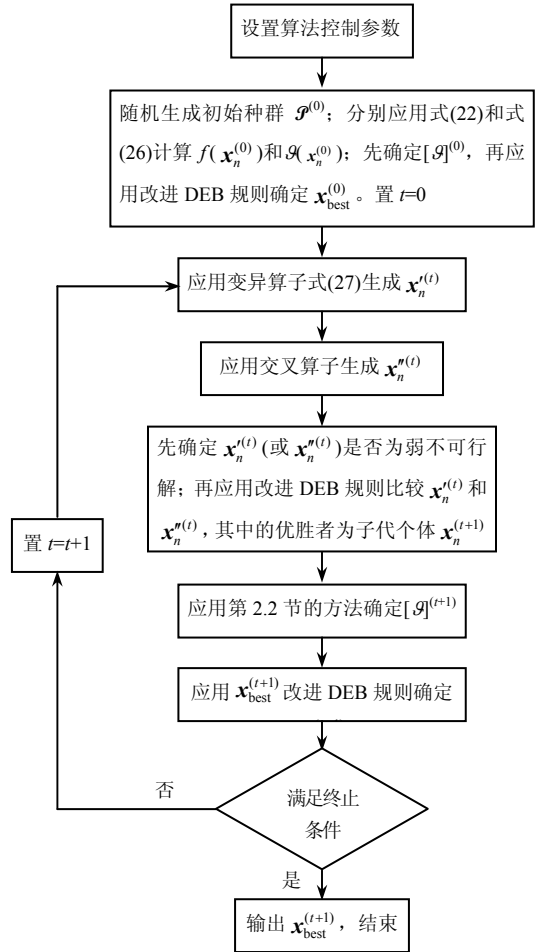


图 2 FRDE 算法流程图

2.5 数值算例测试

为了考察 FRDE 算法的有效性, 文中以 DEB 规则与 DEe2 结合形成的算法 (记为 DFRDE) 作为对比算法, 测试新算法求解 benchmark 约束优化问题的优化性能。因篇幅所限, 仅给出以下 4 个问题的试验结果。

例 1

$$\min f_1(\mathbf{x}) = 5 \sum_{d=1}^4 x_d - 5 \sum_{d=1}^4 x_d^2 - \sum_{d=5}^{13} x_d$$

约束条件为

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x_2 + x_{10} + x_{11} - 10 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x}) = 2x_1 + 2x_3 + x_{10} + x_{12} - 10 \leq 0 \\ g_3(\mathbf{x}) = 2x_2 + 2x_3 + x_{11} + x_{12} - 10 \leq 0 \\ g_4(\mathbf{x}) = -8x_1 + x_{10} \leq 0 \\ g_5(\mathbf{x}) = -8x_2 + x_{11} \leq 0 \\ g_6(\mathbf{x}) = -8x_3 + x_{12} \leq 0 \\ g_7(\mathbf{x}) = -2x_4 - x_5 + x_{10} \leq 0 \\ g_8(\mathbf{x}) = -2x_6 - x_7 + x_{11} \leq 0 \\ g_9(\mathbf{x}) = -2x_8 - x_9 + x_{12} \leq 0 \\ 0 \leq x_d \leq 1 \quad d=1, 2, \dots, 9, 13 \\ 0 \leq x_d \leq 100 \quad d=10, 11, 12 \end{cases}$$

该问题的全局最优解为 $\mathbf{x}^*=(1 \ 1 \ \cdots \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1)^T$, 最优目标函数值 $f(\mathbf{x}^*)=-15$ 。

例 2

$$\min f_2(\mathbf{x})=5.357 \ 854 \ 7 x_3^2 + 0.835 \ 689 \ 1 x_1 x_5 + 37.292 \ 239 x_1 - 40 \ 792.141$$

约束条件为

$$\begin{cases} 0 \leq g_1(\mathbf{x}) \leq 92 \\ 90 \leq g_2(\mathbf{x}) \leq 110 \\ 20 \leq g_3(\mathbf{x}) \leq 25 \end{cases} \begin{cases} 78 \leq x_1 \leq 102 \\ 33 \leq x_2 \leq 45 \\ 27 \leq x_3, x_4, x_5 \leq 45 \end{cases}$$

式中 $g_1(\mathbf{x})=85.334 \ 407+0.005 \ 685 \ 8 x_2 x_5 + 0.000 \ 626 \ 2 x_1 x_4 - 0.002 \ 205 \ 3 x_3 x_5$
 $g_2(\mathbf{x})=80.512 \ 49+0.007 \ 131 \ 7 x_2 x_5 + 0.002 \ 995 \ 5 x_1 x_2 + 0.002 \ 181 \ 3 x_3^2$
 $g_3(\mathbf{x})=9.300 \ 961+0.004 \ 702 \ 6 x_3 x_5 + 0.001 \ 254 \ 7 x_1 x_3 + 0.001 \ 908 \ 5 x_3 x_4$
 该问题的全局最优解为 $\mathbf{x}^*=(78.000 \ 000 \ 33.000 \ 000 \ 29.995 \ 256 \ 45.000 \ 000 \ 36.775 \ 813)^T$, 最优目标函数值 $f(\mathbf{x}^*)=-30 \ 665.539$ 。

例 3

$$\min f_3(\mathbf{x})=3x_1+10^{-6}x_1^3+2x_2+\frac{2}{3}\times 10^{-6}x_2^3$$

约束条件为

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x})=-x_4+x_3-0.55 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{x})=-x_3+x_4-0.55 \leq 0 \\ h_3(\mathbf{x})=1 \ 000 \sin(-x_3-0.25)+1 \ 000 \times \sin(-x_4-0.25)+894.8-x_1=0 \\ h_4(\mathbf{x})=1 \ 000 \sin(x_3-0.25)+1 \ 000 \times \sin(x_3-x_4-0.25)+894.8-x_2=0 \\ h_5(\mathbf{x})=1 \ 000 \sin(x_4-0.25)+1 \ 000 \times \sin(x_4-x_3-0.25)+1294.8=0 \\ 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \ 200 \\ -0.55 \leq x_3, x_4 \leq 0.55 \end{cases}$$

该问题的全局最优解为 $\mathbf{x}^*=(679.945 \ 31 \ 026.067 \ 1 \ 0.118 \ 9 \ -0.396 \ 2)^T$, 最优目标函数值 $f(\mathbf{x}^*)=5 \ 126.498 \ 1$ 。

例 4

$$\min f_4(\mathbf{x})=\exp\left(\prod_{d=1}^5 x_d\right)$$

约束条件为

$$\begin{cases} h_1(\mathbf{x})=\sum_{d=1}^5 x_d^2-10=0 \\ h_2(\mathbf{x})=x_2 x_3-5 x_4 x_5=0 \\ h_3(\mathbf{x})=x_1^3+x_2^3+1=0 \\ -2.3 \leq x_1, x_2 \leq 2.3 \\ -3.2 \leq x_3, x_4, x_5 \leq 3.2 \end{cases}$$

该问题的全局最优解为 $\mathbf{x}^*=(-1.717 \ 143 \ 1.595 \ 710 \ 1.827 \ 246 \ -0.763 \ 643 \ -0.763 \ 643)^T$, 最优目标函数值 $f(\mathbf{x}^*)=0.053 \ 949 \ 8$ 。

对例 1~4 的搜索空间 S 进行随机采样分析, 得出可行域 Ω 占 S 的比例约为 3×10^{-6} , 0.269, 0 和 0^[23], 属于较难优化问题。在例 3 和例 4 中, 含等式约束, 取容忍度 $\varepsilon_0=10^{-10}$ 。在式(26)中, 对例 3, 因等式约束转化为不等式约束时, 该条件的可行域狭窄, 很难满足, 故其加权系数取 $w_3=w_5=10^6$, $w_4=10^5$, 而原不等式约束的加权系数取 $w_1=w_2$; 对其余 3 例, 所有系数均取 $w_j=1$ 。为了公平比较, 两种算法的 N_p, T 一致(表 1), 即函数评价次数相同, 耗时基本相当。其余参数为 $N_s=0.3N_p$ (FRDE 算法), 子群 $\mathcal{P}_{\text{eli}}^{(t)}$ 规模取 5, $F=0.5$, $C_R=0.9$ 。

表 1 算法控制参数 N_p 和 T

算例	种群规模 N_p	最大进化代数 T
例 1	100	5 000
例 2	50	1 000
例 3	200	2 000
例 4	200	1 000

两种算法分别独立运行 50 次, 对其性能指标进行比较分析(表 2)。其中, f_b, f_w 和 f_{av} 分别表示最好、最差和平均目标函数值, σ_f 表示标准差。同时, 表中还列出 ISR^[23], CDE^[24] 和 ε -DE^[25] 等算法的性能指标, 以便比较。

表 2 5 种算法求解算例的性能指标比较

算例	算法	目标函数最好值 f_b	目标函数最差值 f_w	目标函数平均值 f_{av}	目标函数标准差 σ_f
例 1	ISR ^[23]	-15.000	-15.000	-15.000	5.8×10^{-14}
	CDE ^[24]	-15.000	-15.000	-15.000	2.0×10^{-6}
	ε -DE ^[25]	-15.000	-15.000	-15.000	0
	DFRDE	-15.000	-15.000	-15.000	0
	FRDE	-15.000	-15.000	-15.000	2.5×10^{-16}
例 2	ISR ^[23]	-30 665.539	-30 665.539	-30 665.539	1.1×10^{-11}
	CDE ^[24]	-30 665.539	-30 665.539	-30 665.539	0
	ε -DE ^[25]	-30 665.539	-30 665.539	-30 665.539	2.1×10^{-5}
	DFRDE	-30 665.539	-30 665.539	-30 665.539	1.5×10^{-11}
	FRDE	-30 665.539	-30 665.539	-30 665.539	1.5×10^{-11}
例 3	ISR ^[23]	5 126.497	5 126.497	5 126.497	7.2×10^{-13}
	CDE ^[24]	5 126.571	5 327.391	5 207.411	6.9×101
	ε -DE ^[25]	5 126.498	5 126.498	5 126.498	1.7×10^{-5}
	DFRDE	5 126.609	5 785.523	5 287.326	1.7×10^2
	FRDE	5 126.498	5 126.498	5 126.498	2.6×10^{-12}
例 4	ISR ^[23]	0.053 942	0.066 770	0.438 803	7.0×10^{-2}
	CDE ^[24]	0.056 180	0.392 100	0.288 324	1.7×10^{-1}
	ε -DE ^[25]	0.053 949	0.069 631	0.438 846	7.6×10^{-2}
	DFRDE*	0.567 771	1.000 000	0.929 566	1.4×10^{-1}
	FRDE	0.053 950	0.053 950	0.053 950	2.6×10^{-16}

注: * 对例 4, DFRDE 的优化解仅 22 次满足约束条件, 表中数据为 22 次目标函数的统计值。

由表 2 可知, 对例 1, FRDE 与 ISR 相当, 略差于 ε -DE 和 DFRDE, 略优于 CDE; 对例 2, FRDE 与 ISR 和 DFRDE 相当, 略差于 CDE, 略优于 ε -DE; 对例 3, FRDE 与 ISR 相当, 略优于 ε -DE, 明显优于 CDE 和 DFRDE; 对例 4, FRDE 明显优于 4 种对比算法。FRDE 求解 4 个问题, σ_f 均很小, 表明该算法具有良好稳健性。综上所述, 可以认为 FRDE 的总体性能优于 4 种对比算法, 尤其是求解狭窄可行域问题(例 3、4)具有明显优势。ISR, ε -DE 和 CDE 的函数评价次数分别为 3.5×10^5 , 2×10^6 和 1.001×10^5 , 本文 FRDE 和 DFRDE 的最大函数评价次数为 5×10^5 (例 1), 比 ISR 和 CDE 多, 但比 ε -DE 少, 符合“无免费午餐定理”。

图 3、4 是 DFRDE 和 FRDE 分别求解例 3 和 4 时, 每代种群中可行解比例 $r_f (=N_f/N_p)$ 的变化趋势对比。图中竖线表示算法独立运行 50 次的 r_f 波动区间, 竖线内“ \otimes ”表示均值。由图 3 的 r_f 均值变化趋势可知, 求解例 3 时, DFRDE 大约进化 800 代即得到较大的 r_f , 但尔后基本保持不变; FRDE 大约进化 1 400 代得到接近 1 的 r_f 。由图 4 可知, 求解例 4 时, DFRDE 到进化终止时 r_f 仍较小(存在未搜索出可行解的情形); FRDE 大约进化 700 代得到接近 1 的 r_f 。对于狭窄可行域问题, FRDE 在进化后期的种群全部为可行解, 表明其精细搜索能力很强, 能稳定地收敛于全局最优解; 而 DFRDE 求解两个实例时差异较大, 稳定性不好。由于 FRDE 在前期保留了部分接近可行域边界的弱不可行解, 有利于引导全局最优解的搜索, 因而其精细搜索能力强, 计算稳健性好。

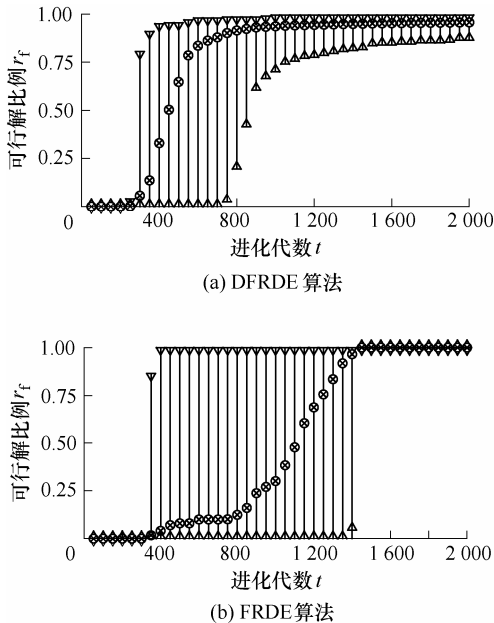


图 3 两种算法求例 3 的可行解比例比较

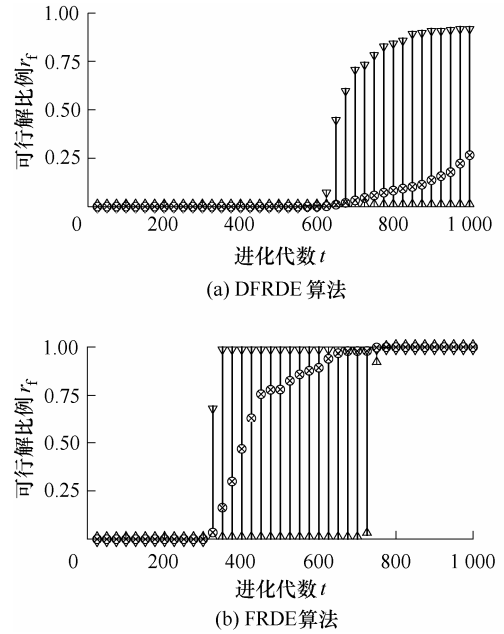


图 4 两种算法求例 4 的可行解比例比较

3 机构优化综合的带修复策略可行性规则差分进化算法

将机构优化综合问题的约束条件分为两类^[18]。一类为软约束, 若候选解违反这类约束条件, 仅影响机构的某些性能; 另一类为硬约束, 若候选解违反这类约束条件, 将导致机构不存在或其运动不可达。对文中研究的球面四杆机构函数综合问题, $g_1 \sim g_{12}$ 为软约束条件, $g_{13} \sim g_{11+N}$ 为硬约束条件。

对于不满足所有硬约束条件 $g_{13}(\mathbf{x})$, $g_{14}(\mathbf{x})$, \dots , $g_{11+N}(\mathbf{x})$ 的不可行个体 $\tilde{\mathbf{x}}$, 执行修复操作, 其基本思路如下。

(1) 在 $\tilde{\mathbf{x}}$ 的邻域内随机生成 2 个个体

$$y_{k,d} = \tilde{x}_d + \eta \rho_d (u_d - l_d) \quad (29)$$

$k=1, 2 \quad d=1, 2, \dots, D$

式中 η ——比例系数, 本文取 $\eta=0.1$;

ρ_d —— $(-1, 1)$ 内均匀分布的随机数。

若分量 $y_{k,d}$ 越界, 即 $y_{k,d} \notin [l_d, u_d]$, 则应用式(28)在搜索区间 $[l_d, u_d]$ 内随机生成该维分量。

(2) 在当前种群中随机选择某个体 $\hat{\mathbf{x}}$, 应用差分扰动方法生成对应变异个体

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y}_1 + F(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y}_2) \quad (30)$$

(3) 对 $\tilde{\mathbf{x}}$ 与 $\hat{\mathbf{x}}$ 执行交叉操作(与 DE 算法的交叉方法相同), 生成对应新个体 $\tilde{\mathbf{y}}$ 。若 $\tilde{\mathbf{y}}$ 的某维分量越界, 则在搜索区间内随机生成该维分量。

修复算法的流程如图 5 所示。将修复算法嵌入 FRDE 算法的交叉操作之后, 形成面向机构优化综

合的 FRRDE 算法。

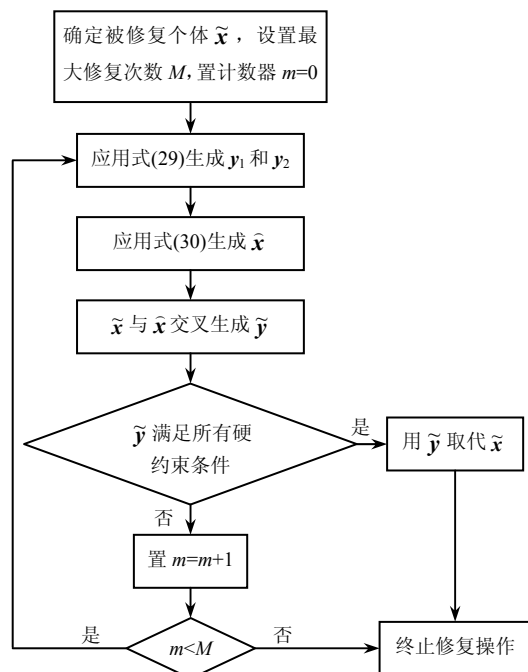


图 5 修复算法流程图

为避免计算量过大,文中设置较小的 M 限制修复次数,这样可能导致经修复后的个体 x , 仍不满足所有硬约束条件。此时,其目标函数和约束违反度分别为

$$f(x) = \mathcal{N}_1 \quad (31)$$

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{N}_2 \quad (32)$$

式中 \mathcal{N}_1 ——比式(7)中 $f(x)$ 高几个数量级的数;

\mathcal{N}_2 ——比式(26)中 $\mathcal{G}(x)$ 高几个数量级的数。

4 机构综合实例

4.1 实例与结果

综合特征球面四杆机构,实现表 3 给出的预期函数关系。其中,例 5、6 和 9 来自文献[9],例 7 和

8 来自文献[11]。

表 3 球面四杆机构的预期函数关系

算例	预期函数关系	变量取值范围
例 5	$\tan \psi = -\sqrt{2} / (2 \tan \varphi)$	$0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$
例 6	$\tan \psi = -1 / (2 \tan \varphi)$	$0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$
例 7	$\psi = \varphi + 360^\circ / \pi$	$0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$
例 8	$\psi = (180^\circ / \pi) (\sqrt{2} \sin \varphi / 4 + 1)$	$0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$
例 9	$\psi = 90^\circ \lg(1 - 0.1 \varphi)$	$-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$

约束条件:存在曲柄,最小杆长 $\alpha_{\min} = 10^\circ$,杆长比许用值 $[R_a] = 10$,许用传动角 $[\gamma] = 30^\circ$ (例 9 无曲柄存在和传动角约束条件,输入、输出杆分别沿顺时针、逆时针方向转动)。

对例 5~8(例 9)中的输入角度 φ 以 $5^\circ(1^\circ)$ 为间隔进行离散,得到 72(91)组输入输出角度 (φ_i, ψ_i) 。与文献[9]相比,本文的离散点数较多,目的是期望提高位于离散点之间的其余输入-输出角度关系更加逼近预期函数。随着点数的增多,其计算量将增大,但不影响 FRRDE 算法的优化性能。以 $5^\circ(1^\circ)$ 为间隔,可满足工程应用的精度要求,而计算量又不是太大,能在逼近精度和计算量之间取得一定折衷。

应用 FRRDE 算法求解上述实例,控制参数统一设置为 $N_p = 50$, $T = 300$, $M = 3$, $\mathcal{N}_1 = 100$, $\mathcal{N}_2 = 1\,000$;优化变量取值下限 $\mathbf{l} = (\pi/18 \ \pi/18 \ \pi/18 \ -\pi \ -\pi)^T$ rad, 上限 $\mathbf{u} = (\pi \ \pi \ \pi \ \pi \ \pi)^T$ rad;其余参数同例 1。对每个实例,算法独立运行 50 次,其中的最好结果见表 4。

4.2 讨论

为考察 FRRDE 算法的性能,表 5 给出了其独立运行 50 次的统计指标。除例 6 外,其余 4 个实例的 σ_f 指标较小,稳健性较好。但求解例 6 时,仍有约 20% 的几率呈现早熟收敛或陷入局部最优区域,因此 FRRDE 算法求解部分球面四杆机构近似函数综合问题的可靠性仍不够高。

表 4 机构综合实例的优化结果比较

(°)

算例	算法	杆长 α_1	杆长 α_2	杆长 α_3	杆长 α_4	初始角 φ'_1	初始角 ψ'_1	标线角 φ_0	标线角 ψ_0	最大误差 $ e _{\max}$
例 5	文献[9]	89.997	89.899	89.988	45.069	0.000	-90.000	0.000	0.000	1.73×10^{-1}
	FRRDE	90.000	90.000	90.000	45.000	0.000	-90.000	0.000	0.000	5.42×10^{-10}
例 6	文献[9]	89.985	89.896	89.723	59.996	0.000	-90.000	0.000	0.000	6.88×10^{-1}
	FRRDE	90.000	90.000	90.000	60.000	0.000	-90.000	0.000	0.000	1.38×10^{-7}
例 7	文献[11]	90.770	16.690	89.490	11.140	191.780	156.483	-191.780	-41.892	5.06×10^0 *
	FRRDE	90.000	89.999	90.000	10.000	0.000	0.000	90.000	24.592	4.39×10^{-1}
例 8	文献[11]	19.150	75.000	73.070	86.560	-196.89	105.487	196.89	-48.191	1.05×10^0 *
	FRRDE	10.000	85.760	30.044	86.427	119.870	92.340	-119.870	-35.044	1.79×10^{-1}
例 9	文献[11]	31.325	33.133	84.759	72.810	-44.000	41.290	44.000	-41.290	—**
	FRRDE	12.915	22.255	10.000	19.387	-42.766	73.482	42.766	-73.482	1.31×10^{-1}

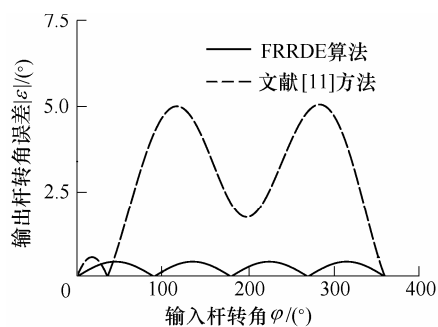
注: * 对例 7 和 8, 文献[11]求得多组备选解,表中分别列出其误差最小的一组解。** 该解不满足给定的函数关系,故未列出 $|e|_{\max}$ 。

表 5 FRRDE 算法求解机构综合实例的性能指标

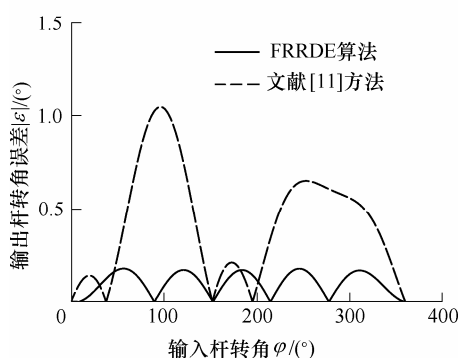
算例	目标函数 最好值 f_b	目标函数 最差值 f_w	目标函数 平均值 f_{av}	目标函数 标准差 σ_f
例 5	5.329×10^{-14}	2.928×10^{-8}	7.150×10^{-10}	4.138×10^{-10}
例 6	5.964×10^{-11}	1.980×10^{-1}	5.339×10^{-2}	8.677×10^{-2}
例 7	7.596×10^{-3}	7.659×10^{-3}	7.601×10^{-3}	1.197×10^{-5}
例 8	1.464×10^{-3}	1.464×10^{-3}	1.464×10^{-3}	3.628×10^{-11}
例 9	1.528×10^{-4}	3.464×10^{-3}	6.867×10^{-4}	1.081×10^{-3}

例 5、6 系特殊问题, 存在目标函数值为 0 的多组理论最优解, 但这几组解的杆长($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$)一致, 仅初始角(ϕ'_1, ψ'_1)和标线角(ϕ_0, ψ_0)取值不同。FRRDE 算法独立运行多次, 可求出多组解, 表 4 仅列出一组解。由于新算法所得目标函数值趋近于 0, 故输出杆转角最大误差 e_{\max} 也趋近于 0, 优于文献[9]的结果。

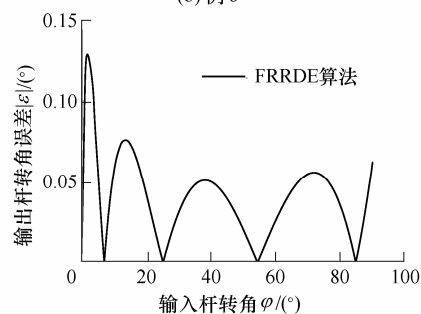
例 7~9 系一般近似综合问题, FRRDE 算法也可求出多组优化解, 表 4 仅列出目标函数值最小的一组解, 误差曲线如图 6 所示。由表 4 和图 6 可知, 本文结果优于文献[11]。



(a) 例 7



(b) 例 8



(c) 例 9

图 6 机构综合实例误差曲线

5 结论

(1) 以球面四杆机构杆长约束方程为基础, 综合考虑传动性能和运动可达性, 建立其近似函数综合的约束优化模型。为便于求解, 进一步将约束条件分为软、硬约束两类, 再分别应用可行性规则和修复策略处理软、硬约束条件。

(2) 提出处理约束条件的改进 DEB 可行性规则, 再与精英变异策略 DE 算法结合, 形成求解约束优化问题的 FRDE 算法。应用 4 个 benchmark 问题测试新算法的可行性和有效性, 结果表明, 新算法的性能指标优于对比算法。

(3) 面向机构优化综合问题, 将修复策略融入 FRDE 算法, 发展为 FRRDE 算法, 为机构近似运动综合提供一种新的约束优化求解方法。

(4) 应用 FRRDE 算法求解 5 个球面四杆机构近似函数综合实例, 得到满足约束条件的特征机构解。输出杆转角误差分析表明, 本文最优解的最大误差好于对比文献中的优化解。文中方法也可应用于其他平面或空间连杆机构近似运动综合。

参 考 文 献

- [1] CHIANG C H. Kinematics of spherical mechanisms[M]. New York: Cambridge University Press, 1988.
- [2] ALIZADE R I, KILIT O. Analytic synthesis of function generating spherical four-bar mechanism for the five precision points[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(7): 863-878.
- [3] CERVANTES-SÁNCHEZ J J, MEDELLIN- CASTILLO H I, RICO-MARTINEZ J M, et al. Some improvements on the exact kinematic synthesis of spherical 4R function generators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(1): 103-121.
- [4] CERVANTES-SÁNCHEZ J J, GRACIA L, RICO-MARTINEZ J M, et al. A novel and efficient kinematic synthesis approach of the spherical 4R function generator for five and six precision points[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(11): 2 020-2 037.
- [5] 杨通, 韩建友, 尹来容. 基于解域的四精确点球面 4R 机构函数综合[J]. 农业机械学报, 2012, 43(10): 200-206.
YANG Tong, HAN Jianyou, YIN Lairong. Spherical 4R function synthesis based on solution regions for four precision points[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery, 2012, 43(10): 200-206.
- [6] LIU Zheng, ANGELES J. Least-square optimization of planar and spherical four-bar function generator under mobility constraints[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1992, 114(4): 569-573.

- [7] LIU Zheng, ANGELES J. Optimization of planar, spherical and spatial function generators using input-output curve planning[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1994, 116(3): 915-919.
- [8] FARHANG K, ZARGAR Y S. Design of spherical 4R mechanisms: Function generation for the entire motion cycle[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1999, 121(4): 521-528.
- [9] 王德伦, 王淑芬, 张保印. 球面四杆机构近似函数综合的自适应方法[J]. 机械工程学报, 2004, 40(2): 45-49.
WANG Delun, WANG Shufen, ZHANG Baoyin. New approach to function synthesis of spherical mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(2): 45-49.
- [10] ALIZADE R, GEZGIN E. Synthesis of function generating spherical four bar mechanism for the six independent parameters[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(9): 1316-1326.
- [11] 褚金奎, 孙建伟. 连杆机构尺度综合的谐波特征参数法[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
CHU Jinkui, SUN Jianwei. An approach to dimensional synthesis of linkages with harmonic characteristic parameters[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [12] ALIZADEH D, ANGELES J, NOKLEBY S. Optimum design of a spherical quasi-homokinetic linkage for motion transmission between orthogonal axes[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 59(1): 107-118.
- [13] LIU Yong, XIAO Renbin. Optimal synthesis of mechanisms for path generation using refined numerical representation based model and AIS based searching method[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(4): 688-691.
- [14] SMAILI A, DIAB N. Optimum synthesis of hybrid-task mechanisms using ant-gradient search method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(1): 115-130.
- [15] 段旭洋, 王皓, 赵勇, 等. 基于嵌套粒子群算法的平面机构尺度综合与构型优选[J]. 机械工程学报, 2013, 49(7): 32-39.
DUAN Xuyang, WANG Hao, ZHAO Yong, et al. Dimensional synthesis and optimal type selection of planar mechanisms based on nested particle swarm optimization[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(7): 32-39.
- [16] ZHAO Yong, CHEN Genliang, WANG Hao, et al. Optimum selection of mechanism type for heavy manipulators based on particle swarm optimization method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2013, 26(4): 763-770.
- [17] LIN Wenyi. A GA-DE hybrid evolutionary algorithm for path synthesis of four-bar linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(8): 1096-1107.
- [18] 车林仙. 面向机构分析与设计的差分进化算法研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2012: 71-111.
CHE Linxian. Study on differential evolution algorithms orientating analysis and design of mechanisms[D]. China University of Mining and Technology, 2012: 71-111.
- [19] ORTIZ A, CABRERA J A, NADAL F, et al. Dimensional synthesis of mechanisms using differential evolution with auto-adaptive control parameters[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 64: 210-229.
- [20] BULATOVIĆ R R, ĐORĐEVIĆ S R, ĐORĐEVIĆ V S. Cuckoo search algorithm: A metaheuristic approach to solving the problem of optimum synthesis of a six-bar double dwell linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 61: 1-13.
- [21] ZHANG Xiaoli, NELSON C A. Multiple-criteria kinematic optimization for the design of spherical serial mechanisms using genetic algorithms[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2011, 133(1): 5-15.
- [22] DEB K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, 186(2-4): 311-338.
- [23] RUNARSSON T P, YAO Xin. Search biases in constrained evolutionary optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, 2005, 35(2): 233-243.
- [24] BECERRA R L, COELLO COELLO C A. Cultured differential evolution for constrained optimization[J]. Computation Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(33-36): 4303-4322.
- [25] 郑建国, 王翔, 刘荣辉. 求解约束优化问题的 ε -DE 算法[J]. 软件学报, 2012, 23(9): 2374-2387.
ZHENG Jianguo, WANG Xiang, LIU Ronghui. ε -differential evolution algorithm for constrained optimization problems[J]. Journal of Software, 2012, 23(9): 2374-2387.
- [26] 车林仙. 按行程速比系数设计球面曲柄摇杆机构的解析方法[J]. 机械设计, 2002, 19(3): 45-47.
CHE Linxian. Analytic method for designing spherical crank and rocker linkage according to travel velocity-ratio coefficient[J]. Journal of Machine Design, 2002, 19(3): 45-47.
- [27] 车林仙. 按许用传动角综合正置式球面曲柄摇杆机构[J]. 机械科学与技术, 2002, 21(5): 765-767, 770.
CHE Linxian. Synthesis of spherical crank-and-rocker linkages of centric type according to allowable transmission angle[J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21(5): 765-766, 770.

作者简介: 车林仙(通信作者), 男, 1971 年出生, 博士, 教授。主要研究方向为机构数值分析与综合、并联机器人机构学、机械优化设计及计算智能等。

E-mail: lx.che@163.com

杜力, 女, 1971 年出生, 博士, 教授。主要研究方向为机构数值分析与综合、机器人机构学。

E-mail: dulicq@126.com

黄勇刚, 男, 1976 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为并联机器人机构学、机构数值分析与综合。

E-mail: huangygh@21cn.com