DOI: 10.3901/JME.2015.05.114

等几何分析研究概述*

吴紫俊 黄正东 左兵权 刘清华 殷小亮
(华中科技大学机械科学与工程学院 武汉 430074)

摘要: 提出等几何分析(Isogeometric analysis, IGA)是一种新的物理场数值求解方法,它可实现CAE数值分析与CAD建模工具的集成,给出一条使设计、分析和优化紧密结合的新途径。以等几何分析方法的计算框架为基础,详细介绍等几何分析方法中样条几何模型的描述方式和建模方法;并以NURBS为例,阐述了IGA中的分析模型参数化表示以及网格模型的细化方法;结合现有的经典有限元的分析过程,简单介绍IGA的离散方法、边界条件和积分方法;系统总结等几何分析在热、流体、接触和优化方面的应用,并给出了一个简单的二维问题的IGA求解实例。

关键词: 等几何分析;参数化;结构优化;NURBS

中图分类号: TP391

Perspectives on Isogeometric Analysis

WU Zijun HUANG Zhengdong ZUO Bingquan LIU Qinghua YIN Xiaoliang
(Mechanical Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

Abstract: Isogeometric analysis (IGA) is a novel numerical method for solving equations of physical fields, which is motivated by improving the integration between numerical simulations of physical phenomena and the computer-aided design tools, and provides a new way to associate product design with analysis and optimization via a common mathematical platform. The method of geometric modeling and its mathematical description are introduced in detail based on the computational framework of IGA. Taking NURBS as an example, the parametric representation in an analysis model and the mesh refinement method are analyzed, and the discretization methods, boundary conditions and quadrature in the parametric domain of IGA are discussed as well by comparing them with those in the standard finite element analysis. Applications of IGA in thermal analysis, fluid-structure interaction, contact problems and structural optimization are summarized and a simple example of 2D problem is provided.

Key words: isogeometric analysis; parameterization; structural optimization; NURBS

0 前言

在产品研发过程中,几何形状设计与物理分析方法属于完全不同的工程领域。现存的计算机辅助几何设计(Computer-aided geometry design, CAGD)系统主要关注于产品几何模型的构建和描述,忽视了产品物理特征在模型分析过程中作用。几何模型与分析模型之间的巨大分歧,在于对象相应的设计和分析系统在其实现层面上关注点不同。因此,在绝大多数情况下,造成了产品几何设计模型和分析模型之间的巨大差异^[1]。从概念层面,这种差异表现在模型的功能性中,设计模型以单纯的几何操作

为基础,而分析模型对物理现象的抽象表达。从技术层面,这种差异表现在模型的描述和计算方法中;几何设计模型包含复杂且精细的几何信息,其计算方法也以计算几何方法为基础,而分析模型的模型描述是简化的几何模型,其计算方法以有限元等方法为主。

为了统一几何模型与分析模型,实现两者的无缝集成,HUGHES等^[2]提出的一种新的以样条理论为基础的数值计算方法——等几何分析(Isogeometric analysis, IGA^[3])。该方法与经典有限元的差异如图1所示,其网格划分不需要合适几何分析(Analysis-suitable geometry, ASG)模型,而是直接在已有的网格模型上细化。IGA法既有经典有限元格式简单的优点,也有自己独特的优势:①在经典有限元中网格划分是分析过程中最耗时的环节,等几何分析采

* 国家自然科学基金资助项目(61173115, 51375186)。20140309 收到初稿,20141009 收到修改稿

用样条模型参数域的划分以及参数域到物理模型的映射, 避免了有限元中网格划分的复杂过程; ② 等几何分析中几何模型和分析网格模型采用同一表达方式, 避免了网格细化过程中与几何模型数据的频繁交互, 有利于实现自适应网格细化; ③ 等几何分析的结果精度高, 其分析使用的多项式直接来源于几何模型数据, 避免了经典有限元中采用分段多项式逼近的方式而引入的误差。目前等几何分析方法研究工作可以分为三类: 一是应用 IGA 方法仿真分析现有问题; 二是现有的建模工具应用于 IGA; 三是提高 IGA 分析的精确性和计算效率而提出的模型重新参数化和网格细化等。

图1 IGA 与 FEA 的异同

等几何分析方法以 CAD 中样条理论(如 B 样条、NURBS 等)为基础实现的, 旨在对分析目标精确表达和分析建模。利用样条理论具有很大的优势: ① 具有高效的形状参数, 如 NURBS 可以用较少的控制点表示复杂的自由形状^[4-5]; ② 计算优势, 样条具有优越的数值属性, 每自由度的精确性比率高于经典有限元^[1,6]。目前 B 样条、NURBS 已成为等几何分析方法中最常用的模型描述方式, 由于分析问题的特殊性, 等几何分析方法的模型描述方式逐渐扩展到了 Bézier^[7]、T 样条^[8]等。等几何分析方法中最关键的是模型的参数域, 参数域不仅是描述几何模型和分析模型基函数的定义域, 也是分析模型中网格划分和细化的操作域。

与经典有限元相同, 网格划分是从所需要分析的连续的 CAD 对象模型产生离散的计算区域的关键, 是设计模型到分析模型的转换过程。在 FEA 中, 网格划分是模型分析过程中最耗时的步骤, 在汽车、航天和船舶工业中, 网格划分基本占据了产品设计和分析总时间的 80%^[1,9] IGA 方法中模型参数域与分析模型的网格相关, 对分析结果和求解效率有很大的影响。IGA 模型的网格与 FEA 网格的定义不同, IGA 网格是由其对应的描述几何模型参数域的节点矢量定义的, 网格的疏密与数目均由该矢量控

制。因此网格定义的不同, 也使网格细化也存在差别。IGA 的网格细化是通过在其模型的节点矢量上, 通过节点插入或升阶或基函数变换等方法, 实现 IGA 模型网格的整体或局部细化^[10-11]。

等几何分析方法集成了 CAD 模型与 CAE 模型, 实现了几何模型与分析模型的同一表达, 即在定义几何模型的同时, 分析模型也随之完成, 在修改分析模型时, 其几何模型也会有相应的变化。等几何模型的单元边界平滑, 这些特性使得该方法更适合形状结构优化^[12]。目前, 以 NURBS 样条模型为优化对象, 等几何分析方法已广泛应用于各个工程实际问题的优化, 如对梁结构的优化^[13]、振动膜的形状优化^[14]、流体的优化^[15]等。除了在优化方面的应用, 该方法还应用于流体分析^[16]、壳体分析^[17]、电磁^[18]、热^[19]等领域。

1 区域的几何模型

1.1 Bézier 模型

Bézier 模型是根据 Bézier 定义的几何模型^[7], 根据参数的个数, 可分别建立 Bézier 曲线、曲面和三维模型。 n 次 Bézier 曲线模型表示公式为

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)P_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad i=0, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中, $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ 是控制点, $B_{i,n}(u)$ 是基函数, 任意给定的参数值 u , 所有基函数的和为 1。

为了方便对曲线控制点的改变, 提出了比 Bézier 曲线灵活的有理 Bézier 曲线, 即在曲线每个控制点设置权因子 ω_i , 其定义为

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u)P_i \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$R_{i,n}(u) = \frac{\omega_i B_{i,n}(u)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(u)} \quad (2)$$

Bézier 曲线模型是单参数 u 的矢值函数, 而曲面是关于两个参数 u, v 的矢值函数表示 uv 平面上的二维区域 R 到三维欧几里得空间 Ω 的映射。根据张量积非有理 Bézier 曲面的定义为

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (3)$$

而有理 Bézier 曲面的定义为

$$S(u, v) = H\{S^w(u, v)\} =$$

$$\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \omega_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) \omega_{i,j}} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \quad (4)$$

1.2 NURBS 模型

以 Bernstein 基函数构造的 Bézier 模型可精确表达实物模型,但其不能局部修改,随意增减控制点个数必须重新建模等不足之处,使得其在 IGA 应用中没有 NURBS 广泛。NURBS 是在 B 样条概念的基础上提出的更为灵活的建模方式。与 Bézier 建模不同^[20],NURBS 可更方便地控制物体表面的曲线度,从而创建出更逼真、生动的造型。NURBS 建模以其曲线概念为基础^[21],以节点矢量和基函数的计算为核心。

NURBS 的节点矢量是表示参数域的非负不减的数据集合,可记为 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, $\xi_i \in \mathbf{R}$ 为第 i 个节点, p 是定义曲线的阶数, n 是 NURBS 基函数个数。节点矢量中的节点把模型参数域分割成单元,这些单元的边界与物理几何模型中控制点连线对应,如图 2 所示,其规则的参数域定义了多变的物理模型。

图 2 节点矢量的参数域与物理几何模型

NURBS 的节点矢量是非均匀的,即相邻两节点间的距离不相等。某些节点可重复,即至少有两个节点有相同的值。节点值的重复度影响基函数的连续性,若某节点 ξ_i 的重复度为 m_i ,则 p 次曲线基函数的为 $p-m_i$ 连续。若重复度超过 p ,基函数在该节点上不连续,从而参数域也变成两个块。NURBS 的节点矢量是开放式的矢量,即在节点矢量的始末位置的节点值的重复度为 $p+1$,如 $p=2$ 的节点矢量 $\Xi = (0,0,0,1,1,1)$ 。

NURBS 的基函数是由递推公式定义

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

NURBS 的节点矢量 $\Xi = [0,0,0,1,2,3,3,4,5,5,5]$ 的基函数曲线如图 3 所示。

图 3 NURBS 基函数曲线

为了计算便捷,通过透视变换 H 把控制点 (P_i) 与权因子 $\{\omega_i\}$ 合并为带权控制点,带权重 ω 的控制点 (B_{ij}^w) , $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$ 以及节点矢量 $U = (u_1, u_2, \dots, u_{n+p+1})$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_{m+q+1})$,则在 u 方向 p 次、 v 方向 q 次得 NURBS 曲面的双变量分段有理矢值函数为

$$\begin{cases} S^w(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij}^w B_{ij}^w \\ R_{ij}^w = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{ij}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \omega_{ij}} \end{cases} \quad (6)$$

NURBS 的体模型的函数为

$$\begin{cases} V^w(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l R_{ijk}^w B_{ijk}^w \\ R_{ijk}^w = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,r}(\zeta) \omega_{i,j,k}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,r}(\zeta) \omega_{i,j,k}} \end{cases} \quad (7)$$

根据式(4)生成的 NURBS 的圆环模型如图 4 所示。

图 4 NURBS 圆环模型的控制网格和模型

1.3 T 样条模型

NURBS 的局部修改性以及仿射变换等特性,使得 NURBS 在建模中应用广泛,但其使用张量积型结构,使得它在局部细节特征表现有些欠缺,如在模型剪裁合并时会产生缝隙,使模型描述不精确。为了解决这些难题,SEDERBERG 等^[8,22]提出了 T 样条。该样条的控制点网格允许出现 T 联结,打破了为 NURBS 的矩形拓扑限制。T 联结可消除 NURBS 多余的控制点,模型更简洁。更合适于网格局部细分特征,使得 T 样条模型在等几何分析中有独特的优势^[8]。

在样条模型定义中, 一般均存在指标空间、参数空间和物理空间。指标空间(图 5a)节点矢量中节点的指标值; 参数空间(图 5b)是定义样条模型时确定的节点矢量; 而物理空间(图 5c)表示所建立的样条模型, 包括划分模型的网格和控制网格。NURBS 模型在参数空间定义, 而指标空间作为辅助。对于 T 样条, 这一顺序刚好相反。

图 5 T 网格的指标空间、参数空间和实际空间

在 NURBS 中, 基函数是用全局节点矢量来定义, 而在 PB 样条中, 每个函数都有相互独立的局部节点矢量。而 T 样条平衡了上述两种曲线, 即每个函数均有包含模型对象的整个拓扑结构和参数信息的全局 T 网格中推导而来局部节点矢量。

对于一个给定的 T 网格和次数 p , 假设指标空间 $A \subset \mathbf{Z}^2$ 包含所有的锚点 s_i , 在对每个指标 $i \in A$ 给定局部节点矢量 ξ_i^1, ξ_i^2 和对应的控制点 $P_i \in \mathbf{R}^d$, 利用 T 样条的锚点确定规则定义混合函数 B_α 为

$$B_i(\xi) = \prod_{l=0}^{d_p} N_i^l(\xi^l) \quad (8)$$

式中, $N_i^l(\xi)$ 是一元函数, ξ^l 是 ξ_i^1 或 ξ_i^2 的节点值。 p 为给定参数方向的样条次数 $d_p = p+1$ 。为了保持一般性, 在每个控制点增设权值 ω_i , 则 T 样条的混合函数为

$$R_i(\xi) = \frac{\omega_i B_i(\xi)}{\sum_{\beta \in A} \omega_\beta B_\beta(\xi)} \quad (9)$$

实际空间中的 T 样条为

$$S(\xi) = \sum_{i \in A} R_i(\xi) P_i \quad (10)$$

而 T 样条曲面表示为

$$\begin{cases} P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t), \omega(s, t)) = \sum_{i=0}^n P_i B_i(s, t) \\ B_i(s, t) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s) N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t) \end{cases} \quad (11)$$

1.4 复杂模型

复杂模型是指构造模型的样条曲面多于一个, 在本文的等几何分析中, 复杂模型主要指利用曲面裁剪方法构造形状不规则或带孔的 NURBS 样条曲面。剪裁曲面由被剪 NURBS 曲面与一系列的剪裁

曲线组成, 如图 6 所示。剪裁曲线是位于二维参数空间的 NURBS 曲线, 即剪裁曲线定义了一个从一维参数空间到二维参数空间的映射。NURBS 曲面的参数域外边界成为外环, 逆时针方向为正, 而内边界, 即剪裁曲线定义的参数域边界, 称为内环, 顺时针方向为正。在一个剪裁曲面中, 外环只有一个, 而内环可有若干个^[23-24]。

图 6 剪裁曲面的参数域与对应的模型

被裁剪 NURBS 曲面与裁剪曲线可表示为^[27]

$$\begin{cases} S(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{ij}(s, t) P_{ij} \\ C(u) = \sum_{i=0}^n R_{ij}(u) Q_i \end{cases} \quad (12)$$

在剪裁曲面定义中, (s, t) 为被剪裁曲面的参数, u 为剪裁曲线的参数。

曲面剪裁实现途径很多, 在样条曲面的参数空间与三维模型空间的映射关系层面, 剪裁可直接在三维模型空间中进行, 或者在参数空间或转化在参数空间实现。对应的裁剪方法为三角逼近法和参数投影法。

三角逼近法一般包含对剪裁曲线和被剪曲面的处理, 是对 NURBS 曲面剪裁前, 按某种算法将曲面离散成三角面片曲面, 然后再对三角面片曲面进行裁剪操作, 其结果也是三角面片曲面的近似表示。具体操作为: 首先, 在保证足够精度的情况下把封闭的剪裁曲线取样生成三角形网格, 并对这些网格曲面进行着色, 并将三角形生成适合大小的纹理。其次, 按被剪曲面参数的偏导数矢量的夹角, 把曲面划分为一些四边形面片, 并用双三次 Bézier 曲面逼近这些面片, 并根据细节层次值将面片细分嵌套, 组合出逼近 Bézier 面片的三角形图元, 并对这些三角形图元进行着色。最后根据相应纹理的值, 对近似的面片曲面进行剪裁^[25]。

参数域投影法是将 NURBS 曲面参数域中, 根据裁剪精度, 分析参数域上的剪裁曲线来判定曲面裁剪域, 然后将其映射到三维空间中, 从而求出特定精度要求的裁剪曲面。该方法与三角逼近法相比, 其操作简洁方便, 仅需要关注参数域, 并且可设定精度, 其剪裁精度较高。但同时该方法基于投影算法, 剪切出实际模型时, 需要对参数域进行反算。曲面裁剪方法还有很多方法, 例如扫描线法, 合并

求交法等, 具体请参见文献[26-31]。

2 区域中物理场的参数化

2.1 NURBS 表示形式

等几何分析模型中, 求解所用的形函数就是建立该模型时所有的基函数, 其求解分析的参数域是几何模型的归一化参数域。任意模型, 均有参数域, 其对应映射关系如图 7 所示。在 NURBS 模型中, 其对应的映射关系即 NURBS 模型的几何函数 F 。

图 7 参数域 Ω_0 与模型 Ω 的关系 F

根据 NURBS 的定义, 几何函数 F 在某一个网格上的定义可写为

$$F(u, v) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} R_{ij}(u, v) P_{ij} \quad (13)$$

式中, R_{ij} 为参数域 $\Omega_0 = [0, 1]^2$ 的双变量基函数积, P_{ij} 为控制点。

在等几何分析中, 采用与建模中相同的基函数 R_{ij} , 因此在参数域 Ω_0 与模型物理区域 Ω , 可设测试函数集

$$V_h = \{\phi_k \mid \phi_k = 0 \text{ on } \partial\Omega\} \subset \{R_{ij} \circ F^{-1}\}_{i \in I, j \in J} \quad (14)$$

所给的物理模型的数值解在参数域 Ω_0 上表示形式

$$T_h(x, y) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} R_{ij}(F^{-1}(x, y)) q_{ij} \quad (15)$$

式中, 系数集合 q_{ij} 部分由边界条件确定, 其他未知的部分与模型整体刚度矩阵对应的形式分布在集合中。

在计算过程中, 所有在物理区域 Ω 上的运算均转化为参数域 Ω_0 上的运算

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_0} f(F(u, v)) |\det J(u, v)| du dv$$

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial u & \partial F_1 / \partial v \\ \partial F_2 / \partial u & \partial F_2 / \partial v \end{pmatrix} \quad (16)$$

式中, $J(u, v)$ 是雅可比矩阵, $\nabla_{(x, y)} T(x, y) = J(u, v)^{-T} \cdot \nabla_{(u, v)} T(u, v)$ 。

对于模型

$$\begin{aligned} -\Delta T &= f & (x, y) \in \Omega \\ T &= 0 & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

设其测试函数 $V := \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, 则模型弱形式的双线性形式可表示为

$$\begin{aligned} a(T, v) &= \langle l, v \rangle \\ a(T, v) &:= \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla V dx dy \\ \langle l, v \rangle &:= \int_{\Omega} f v dx dy \end{aligned} \quad (18)$$

在参数域 Ω_0 上积分计算为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla V dx dy &= \\ \int_{\Omega_0} (J(u, v)^{-T} \nabla T) \cdot (J(u, v)^{-T} \nabla V) |\det J(u, v)| du dv \\ \int_{\Omega} f V dx dy &= \\ \int_{\Omega_0} (f V)(F(u, v)) |\det J(u, v)| du dv \end{aligned} \quad (19)$$

根据节点矢量可把参数域 Ω_0 分割成多个单元, 则为

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla V du dv &= \\ \sum_k \int_{\Omega_k} (J(u, v)^{-T} \nabla T) \cdot (J(u, v)^{-T} \nabla V) |\det J(u, v)| du dv &= \\ \sum_k \int_{v_1^k}^{v_2^k} \int_{u_1^k}^{u_2^k} (J(u, v)^{-T} \nabla T) \cdot (J(u, v)^{-T} \nabla V) |\det J(u, v)| du dv \\ \int_{\Omega} f V dx dy &= \\ \sum_k \int_{\Omega_k} (f V)(F(u, v)) |\det J(u, v)| du dv &= \\ \sum_k \int_{v_1^k}^{v_2^k} \int_{u_1^k}^{u_2^k} (f V)(F(u, v)) |\det J(u, v)| du dv \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\Omega_k = [u_1^k, u_2^k] \times [v_1^k, v_2^k]$ 为参数域的第 k 个子单元。

2.2 网格细化

细化网格是模型分析的一个重要环节, 是为了保证分析结果的精确性而对网格进行改进的方法。网格细化, 即采用比原模型更多的自由度来描述的原模型。在等几何分析中, 基于细化模型对象区域, 细化方法一般有两类: 整体细化和局部细化。细化方法均是以样条中的节点插入^[32]方法为基础。节点插入不仅是处理和渲染样条曲线和曲面的工具, 也是理解和分析样条的数学基本算法。在数学层面上, 节点插入是对节点矢量以及控制点的操作。

假设在节点矢量 $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ 中插入 $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$ 形成新的节点矢量 $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, 而对应的控制顶点 $\{Q_i\}_{i=1}^{n+1}$ 由原控

制顶点 $\{P_i\}_{i=1}^n$ 根据式(21)计算

$$Q_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} \quad (21)$$

其中

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & i \leq k - p \\ \frac{\bar{u} - u_i}{u_{i+p} - u_i} & k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (22)$$

2.2.1 网络整体细化

模型网络整体细化是对模型的所有网络进行细分, 对于如 B 样条、NURBS 等以张量积定义的曲面, 由于模型网络是矩形拓扑结构, 任插入某个节点到一个方向的节点矢量中都会引起另外一个方向的控制点的整列或整行的插入, 因此这类模型只能采用整体网络细化。

HUGHES 等^[1,32]详细介绍了三种网络细化方法如所示: h 型细化, p 型细化和 k 型细化。这三种细化方法均采用节点插入方式, 仅在插值位置和连续性上有区别。 h 型细化是简单地运用节点插入方法在原节点矢量中插入新的节点值, 使模型参数域的自然网格面片和模型控制点增多, 从而实现模型网络细化。在插入新节点值得过程中, 其插入节点值在新的节点矢量中出现的次数须低于所定义的阶数, 否则在某些相邻的网络会出现不连续的情况, 影响分析结果的准确性。该 h 型细化与经典有限元中的 h 型细化类似。

p 型细化是通过提升曲线阶数而实现网络细化, 与经典有限元中的 p 型细化类似, 如图 8b 所示。在 p 型细化中, 提升基函数的阶数, 而模型的几何形状或参数不改变。为了保证在节点矢量 Ξ 中, 每个插值节点上的连续性不变, 在升阶的过程中, 需要对原有节点矢量的节点值进行相应的重复, 即对原有节点值进行插值运算。 k 型细化基于节点插入和升阶而提出的网络细化方法, 在经典有限元中还没有与其对应的细化方法, 是属于等几何分析特有的网络细化方法, 如图 8c 所示。

图 8 基函数细化

与 p 型细化相比, 其细化步骤完全相反: 先对基函数升阶, 然后插入节点。而且 k 型细化所插入的节点少, 但精度更高, 同时也避免在模型面、边、顶点和内部点的不同基函数而引起的网格结构不均匀问题。

整体细化方法除了以上三类, 还有 h 型和 p 型细化结合的 hp 型细化^[34], 以及提升已有的网格的阶数而不插入新的网格实现的 np 型细化^[10]。

2.2.2 网络局部细化

网络局部细化是对模型的局部网络进行细分, 增加模型局部自由度, 使局部分析结果更精确。局部网络细化也是以节点插入方法实现, 在现有的局部网络细化方法中, 有变层次样条细化^[35]、T 样条局部细化^[36]和换矩阵的 np 细化^[10]。

层次样条细化。由样条定义可知, 参数域与物理模型之间存在映射关系 F , 假设在模型上的子区域 V_k , 可表示为

$$V_h = \text{span}\{R_{ij} \circ F^{-1}\}_{i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m}$$

在等几何分析中, 层次化样条细化就是嵌套式的函数替代上式中的基函数 R_{ij} 。层次样条的定义与细化是基于模型嵌套域和嵌套空间^[37], 与有限元中的细化类似, 层次样条细化以单元为基础。定义 $T_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$, $i \in [0, n+p]$, $j \in [0, m+q]$ 为一个单元。若初始的参数域有重节点, 则该单元可为空。根据单元集合可定义等参网格 $Q := \{T_{ij}\}_{i=0,\dots,n+p; j=0,\dots,m+q}$ 。在细化时须使用已建立的连续层次网格, 例如在整体 h 型细化中所定义的网格, 用细化的网格表示为 $Q = \{T_{ij}^l\}_{i=0,1,\dots,n^l+p; j=0,1,\dots,m^l+q}$ 。

以层次 B 样条曲面为例, 设三次 B 样条曲面为 $S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}$, 通过节点插入对曲面进行细化, 细化后的控制顶点用 $Q_{i,j}$ 表示, 则曲面表示为 $S(u, v) = \sum_{h=0}^r \sum_{k=0}^s N_{h,r}(u) N_{k,s}(v) W_{h,k}$ 。

在该三次层次样条曲面中, 为保持连续性, 细化至少要在 4×4 的控制顶点网格中才能进行, 如图 9a 所示。节点插入后, 得到的细化网格的控制顶点网格如图 9b 所示, 在新的控制顶点中仅有四个顶点 W_1, W_2, W_3, W_4 可以自由变动。在受这四个控制顶点影响更小的控制顶点网格上可以继续细化。

图 9 层次样条曲面细化

○ 细化前控制点 ● 细化后的控制点

T 样条细化。与 NURBS 模型相比, T 样条模型没有矩形拓扑结构, 因此其控制点远少于 NURBS 模型, 基本消除了冗余控制点。从而相同的模型, 其 T 样条模型自由度比 NURBS 模型要少得多。对于模型的控制网格, T 样条控制网格与 NURBS 控制网格的最大不同在于网格的拓扑结构: T 样条中允许某列控制点在模型内部有终点, 即 T 联结如图 10 所示。T 样条的这种特性使得其在网格细分过程中有独特的优势^[11]。

图 10 T 样条控制节点网格与 T 联结

T 样条曲面定义为

$$P(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t), \omega(s, t)) = \sum_{i=0}^n P_i B_i(s, t)$$

$$B_i(s, t) = N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s) N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t) \quad (23)$$

式中, $P_i = (x_i, y_i, z_i, \omega_i)$ 为包含权重的控制点, $B_i(s, t)$ 是基函数的混合函数, 而 $N[s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4}](s)$ 是节点矢量 $(s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, s_{i4})$ 的三次 B 样条基函数, $N[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}](t)$ 是节点矢量 $[t_{i0}, t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}]$ 的三次 B 样条基函数^[36,38]。

T 样条模型网格细化是以混合函数 $B_i(s, t)$ 为基础的。假设节点矢量 $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$ 是节点矢量 $\tilde{\mathbf{s}} = (s_0, s_1, \dots, s_{m-1}, s_m)$ 的子集, 则基函数 $N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s)$ 可表示为 $m-4$ 个五维基函数线性组合。以 $m=6$ 为例, 若 $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)$, $N(s) = N[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](s)$, 而 $\tilde{\mathbf{s}} = (s_0, k, s_1, s_2, s_3, s_4)$, 则基函数可表示为

$$N(s) = c_0 N[s_0, k, s_1, s_2, s_3](s) + d_0 N[k, s_1, \dots, s_4](s) \quad (24)$$

其中 $c_0 = \frac{k-s_0}{s_3-s_0}, d_0 = 1$ 。

若 $\tilde{\mathbf{s}} = (s_0, s_1, k, s_2, s_3, s_4)$, 则

$$N(s) = c_1 N[s_0, s_1, k, s_2, s_3](s) + d_1 N[s_1, k, s_2, s_3, s_4](s)$$

其中 $c_1 = \frac{k-s_0}{s_3-s_0}, d_1 = \frac{s_4-k}{s_4-s_1}$ 。

若 $\tilde{\mathbf{s}} = (s_0, s_1, s_2, k, s_3, s_4)$, 则

$$N(s) = c_2 N[s_0, s_1, s_2, k, s_3](s) + d_2 N[s_1, s_2, k, s_3, s_4](s)$$

其中 $c_2 = \frac{k-s_0}{s_3-s_0}, d_2 = \frac{s_4-k}{s_4-s_1}$ 。

若 $\tilde{\mathbf{s}} = (s_0, s_1, s_2, s_3, k, s_4)$, 则

$$N(s) = c_3 N[s_0, \dots, s_3, k](s) + d_3 N[s_1, s_2, s_3, k, s_4](s)$$

其中 $c_3 = 1, d_3 = \frac{s_4-k}{s_4-s_1}$ 。

混合函数可在 s 或 t 方向上插入节点, 然后把分开的两个混合函数合并。其插值后细分的网格如图 11 所示, 利用式(25), 可以得到 $B_1(s, t) = c_1^1 \tilde{B}_1(s, t) + c_1^2 \tilde{B}_2(s, t) + c_1^3 \tilde{B}_3(s, t) + c_1^4 \tilde{B}_4(s, t)$ 。

图 11 T 样条网格局部细化

np 细化。np 细化通过求解从细化前的主单元边界到细化后的附单元边界节点线性变换矩阵 $\mathbf{T}$, 实现网格边界局部细化, 细化过程中仅在边界插入新的节点, 不增加单元个数。该细化方法通过变换矩阵 $\mathbf{T}$, 链接网格边界的节点^[10]。变换矩阵 $\mathbf{T}$ 的定义为

$$\mathbf{D}^S = \mathbf{T} \mathbf{D}^{S*} \quad (25)$$

式中, $\mathbf{D}^S$ 只含有细化后附单元线或者曲面的共同边界节点, 矩阵 $\mathbf{D}^{S*}$ 只含有细化前主单元线或者曲面的共同边界节点。变换矩阵 $\mathbf{T}$ 的定义如下

$$T_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \xi_j \leq \tilde{\xi}_i < \xi_{j+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$T_{ij}^{p+1} = \frac{\tilde{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\xi_{j+q} - \xi_j} T_{ij}^p + \frac{\xi_{j+1} - \tilde{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} T_{ij+1}^p \quad q=1, 2, \dots, p \quad (26)$$

其中细分前的节点矢量 $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}]$,

细分后的节点矢量为 $\tilde{\boldsymbol{\xi}} = [\tilde{\xi}_0 = \xi_0, \tilde{\xi}_1 = \xi_1, \dots, \tilde{\xi}_{n+p+1+m} = \xi_{n+p+1}], m \geq 0$, 矩阵 $\mathbf{T}$ 的维数为 $[n+m \times n]$ 。

2.3 参数化的问题

网格生成即对所给的 CAD 模型中生成计算区域离散网格的过程, 在有限元中该过程是分析模型的关键, 同时是耗时最长的环节。在等几何分析中的计算区域与 FEA 中的网格类似, 对分析结果的精确性和求解效率均存在重大影响。在 IGA 中模型计算区域的参数是由模型的控制点、节点矢量和样条的阶数共同决定。如二维的 IGA 问题, 其计算区域的节点矢量和阶数均由所给定的边界曲线确定。即给定边界曲线, 其计算区域的参数优劣由其模型的内部控制点决定。因此, 确定内部控制点的位置是

至关重要的。其基本要求是对 IGA 的参数化不能自交, 使得模型从计算区域到参数域的映射是单射。为了得到更精确的结果, 计算区域的等参网格也必须统一正交^[9, 39]。

设参数域 $\sigma(\xi, \eta)$ 到计算区域 $[a, b] \times [c, d]$ 的映射为 F , 则计算区域上的任一点 $x \rightarrow F \circ \sigma^{-1}(x)$, 则平面区域 $[a, b] \times [c, d]$ 用参数 (ξ, η) 表示为

$$\sigma: (\xi, \eta) := [a, b] \times [c, d] \rightarrow \sigma(\xi, \eta) := \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} P_{i,j} N_i^p(\xi) N_j^q(\eta) \quad (27)$$

雅可比行列式值可以表示为

$$J(\sigma(\xi, \eta)) = \begin{vmatrix} \sigma_\xi^x & \sigma_\eta^x \\ \sigma_\xi^y & \sigma_\eta^y \end{vmatrix} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq m-1}} \sum_{\substack{0 \leq i' \leq n \\ 0 \leq j' \leq m-1}} N_i^{p-1}(\xi) N_j^q(\eta) N_{i'}^p(\xi) N_{j'}^{q-1}(\eta) \omega_{i,j}^1 \omega_{i',j'}^2 = \begin{vmatrix} A_{i,j}^{1,x} & A_{i,j}^{2,x} \\ A_{i,j'}^{1,y} & A_{i,j'}^{2,y} \end{vmatrix} \sum_{i=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2m-1} G_{ij} N_i^{2p-1}(\xi) N_j^{2q-1}(\eta)$$

参数域网格不自交, 则雅可比矩阵行列式值应大于 0。若参数域 $\sigma(\xi, \eta)$ 网格正交, 则应满足以下条件

$$\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta = 0 \quad (28)$$

利用该条件可以得到正交等参网格曲线

$$\iint (\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta)^2 d\xi d\eta \quad (29)$$

由于 $|\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta| \leq \frac{\|\sigma_\xi\|^2 + \|\sigma_\eta\|^2}{2}$, 根据拉伸能量公

式 $\iint \|\sigma_\xi\|^2 + \|\sigma_\eta\|^2 d\xi d\eta$ 和弯曲能量公式 $\iint (\|\sigma_\xi\|^2 + \|\sigma_\eta\|^2 + 2\|\sigma_\xi\|^2) d\xi d\eta$, 采用以下的优化项确定参数域等参网格

$$\min \iint (\|\sigma_\xi\|^2 + \|\sigma_\eta\|^2 + 2\|\sigma_\xi\|^2) + \omega (\|\sigma_\xi\|^2 + \|\sigma_\eta\|^2) d\xi d\eta \quad (30)$$

s.t. $G_{ij} > 0$

式中, ω 是一个正值常量。

3 分析方法

3.1 Galerkin 法

Galerkin 法是等几何分析中最常用的模型求解方法。把无限维的解析空间 V 用有限维的子空间 V_k 替代, 其中 $V_k \subset V$ 。在子空间 V_k 中, 假设 $\phi_1, \dots, \phi_n$ 为一组基, 则任意数值解 u_k 可线性表示为

$$u_k = \sum_{i=0}^n q_i \phi_i$$

式中, $q_i \in \mathbf{R}$ 为系数。根据式(18), 假设测试函数 $v = \phi_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则可得到线性方程组

$$Aq = b \quad (31)$$

式中, $A = (a(\phi_i, \phi_j))_{i,j=1,2,\dots,n}$ 是 $n \times n$ 维的刚度矩阵, $b = (\langle l, \phi_i \rangle)_{i=1,2,\dots,n}$ 为载荷矢量。

在经典有限元中, 子空间 V_k 中含有 C^0 连续的分段多项式。因此模型的物理区域 Ω 为单元 T_h 的拼接, 即 $\Omega_k = \bigcup_h T_h$, 其中单元 T_h 可是二维的三角形或四边形单元, 也可是三维的四面体或六面体标准单元。根据节点基函数 $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ (形函数) 在离散 z_j 的特点 $\phi_i(z_j) = \delta_{ij}$ 可得

$$u_k(z_j) = \sum_{i=0}^n q_i \phi_i(z_j) = q_j. \quad (32)$$

式中, q_j 有明确的物理意义, 表示在点 z_j 的数值解。相应的, 根据有限元形函数的性质, 刚度矩阵元素 $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \sum_h \int_{T_h} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx$ 。

等几何分析中求解所用的分析模型的参数与该模型的 CAD 物理模型参数相同, 在模型基函数所在的参数域 Ω_0 与物理区域 Ω 存在几何函数映射 F 。因此在 Galerkin 方法中, 对模型物理区域的运算须映射到模型的参数域中。设函数集 $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ 是参数域 Ω_0 中的线性独立函数, 则在模型物理区域的测试函数 ϕ_i 可定义为 $\phi_i := \varphi_i \circ F^{-1}$, 因此上述的解析解子空间 V_k 可用模型参数域 Ω_0 表示为

$$V_k = \text{span}\{\varphi_i \circ F^{-1}\}_{i=1,2,\dots,n}$$

在二维或三维 NURBS 模型中, 参数域 Ω_0 的函数集为其基函数, 则 V_k 可定义为

$$V_k \subset \text{span}\{R_{ij} \circ F^{-1}\}_{i \in I, j \in J} V_k \subset \text{span}\{R_{ijk} \circ F^{-1}\}_{i \in I, j \in J, k \in K}$$

此时二维的模型的数值解可写为

$$u_k(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} R_{ij}(F^{-1}(x)) q_{ij} \quad (33)$$

式中, 系数 q_{ij} 有边界条件确定。其刚度矩阵 $A_{ij} = \int_{\Omega_0} (\nabla N_m J(\eta)^{-1}) \cdot (\nabla N_l J(\eta)^{-1}) |\det J(\eta)| d\eta$ 。

等几何分析方法与有限元中等参单元求解类似, 但存在以下不同: ① 等几何中节点矢量可直接分割成计算网格, 二维三维的节点跨度都是网格, 通常单元中所支持的基函数比有限元单元多; ② NURBS 没有形成节点基函数, 单个系数 q_{ij} 并不表示在特定的网格点的近似解; ③ 等几何分析中, 基函数有 C^1 或更高的连续性。

3.2 边界条件

模型边界条件有三类: Dirichlet 条件, Neumann 条件和 Robin 条件, 其中以第一类 Dirichlet 边界条件最为简单。以泊松方程为例, 设在边界 $\partial\Omega$ 上 $u = u_0 \neq 0$, 此时方程数值解 u_h 可分为两个部分

$$u_h = \phi_0 + \sum_{i=0}^n q_i \phi_i \quad (34)$$

在边界上可设 $\phi_0 = u_0$ 。设 $z_j, j=1, 2, \dots, m$ 为位于边界上的所有点, ϕ_{n+j} 为点所对应的基函数, 且 $\phi_{n+j}(z_j) = \delta_{ij}$ 。在边界点中插入 u_0 , 并入边界条件, 则

$$\phi_0 = \sum_{j=0}^m u_0(z_j) \phi_{n+j} \quad (35)$$

此时插入任意 u_h 到弱方程中, 并把包含函数 ϕ_0 的项移到等式右边, 刚度矩阵保持不变, 而载荷矢量变为

$$\mathbf{b} = (\langle l, \phi_i \rangle - a(\phi_0, \phi_i))_{i=1, 2, \dots, n} \quad (36)$$

在线性代数中, 边界条件的直接合并, 可使刚度矩阵更为简洁。因为在初始产生的刚度矩阵中, 含有可作为多余自由度的边界点, 合并过程可使刚度矩阵中含有初始条件 ϕ_0 的项移动到等式右边, 进而刚度矩阵得到压缩。

与有限元边界条件处理类似, 等几何分析中也存在两种常用的边界处理方式。这两种方式中, 产生刚度矩阵包含边界上点的基函数 $\tilde{V}_h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_n, \phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+m}\}$, 用 Galerkin 法表示数值解为, 并令插值条件为 $q_{n+j} = u_0(z_j)$, 且

$$u_h = \sum_{i=1}^{n+m} q_i \phi_i. \quad (37)$$

第一种方式是在刚度矩阵中, 把属于 q_{n+j} 的对角线系数用 1 替换, 同行同列的值设为 0。方程右边相应的设为 $u_0(z_j)$, 这种方式把刚度矩阵的维数扩大到了 $(n+m) \times (n+m)$ 。

第二种方式与弱边界概念有关, 等式 $q_{n+j} = u_0(z_j)$ 可以看作点的 m 个线性约束 $\tilde{\mathbf{q}} = (q_1, \dots, q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+m})^T$, 用矩阵表示为

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{c} \quad (38)$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 是 $m \times (n+m)$ 的矩阵, 矢量 $\mathbf{c}$ 由 $c_j := u_0(z_j), j=1, 2, \dots, m$ 确定。此时弱形式方程可表示为

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \quad (39)$$

其中引入的 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^m$ 是离散的拉格朗日乘子。矩

阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 由 $\tilde{V}_h$ 通过 Galerkin 法生成。由于样条模型的基函数 R_{ij} 在边界上不为零, 因此只需要把对应的数值解的系数 q_{ij} 设为 0 即可。而对于非零边界 $u = u_0$, 还需要进一步研究。

对于混合边界问题的处理方式与上述方式相同, 混合边界的定义为

$$\begin{aligned} u &= u_0 & \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= h & \Gamma_N \end{aligned} \quad (40)$$

式中, $\mathbf{n}$ 是指向边界外部的法向矢量, 而边界 $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ 。该边界的处理时首先要确定与边界 Γ_D, Γ_N 对应的节点区域, 其次是确定边界所涉及的非零的 NURBS 的基函数。混合边界中存在 Neumann 边界, 在处理弱形式方程时, 须对该边界单独考虑, 即

$$\langle l, v \rangle := \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} h v ds \quad (41)$$

3.3 积分方法

在 IGA 中, NURBS 模型是最常用的模型, 其积分问题也研究的最多。NURBS 模型存在物理区域 Ω 和参数域 Ω_0 , 在有限元中对物理区域的积分也须转化到参数域运算。目前一般常用高斯积分, 其积分过程如图 12 所示, 把单元的参数区间转换到 $[-1, 1]$ 后在积分运算。

图 12 IGA 积分过程

考虑到基函数的连续性特点, 在经典有限元中的高斯积分规则在 IGA 中并不是最优的选择。事实上, 由于 IGA 网格间的连续规律与曲线曲面的局部可变性, 若采用与 FEA 中相同的积分方式, 即用高

斯积分在每个网格上单独积分, 不仅积分效率低下, 也没有充分利用 NURBS 本身的特点^[40]。

等几何分析中的等参形式结构, 其求解积分的形式一般有

$$\int_{[0,1]^2} \eta(\xi) R_i(\xi) R_j(\xi) d\xi \quad (42)$$

$$\int_{[0,1]^2} \eta(\xi) \nabla R_i(\xi) \nabla R_j(\xi) d\xi \quad (43)$$

$$\int_{[0,1]^2} \eta(\xi) \nabla R_i(\xi) R_j(\xi) d\xi \quad (44)$$

$$\int_{[0,1]^2} \eta(\xi) \nabla R_i(\xi) R_j(\xi) R_k(\xi) d\xi \quad (45)$$

式中, R_i, R_j, R_k 是 NURBS 的基函数, η 是模型几何变形的空间独立因素或者是偏导微分方程的系数, 在 IGA 中为几何映射 F 的雅可比矩阵或导数。式(42)源于质量矩阵项或质量力矩阵项, 式(43)源于刚度矩阵项, 式(44)、(45)分别是线性和非线性水平对流矩阵项, 是流体动力学仿真的常用求导公式^[41]。

目前, 对基于 NURBS 的等几何分析的积分方法中, 有两种高效的积分方式^[42]。第一种是基于 NURBS 网格与网格间的连续性, 通过对高斯积分的扩展, 提出的高效积分方法。第二种是在第一种积分方法的基础上, 利用 NURBS 的基函数的特点而提出来的积分方法。这两种高效积分方法均是以有限元中的高斯积分为基础, 结合 NURBS 的特征, 提出的适合于等几何分析的积分方法。第一种积分方法适合于计算整体的非线性系统方程的积分, 第二种方法适合于局部问题的非线性系统方程积分。

第一种积分方法的规则是在参数域的积分网格上, 选择相邻的两个或两个以上的网格, 扩大每次积分的积分区域, 即“半点规则”, 涉及每两个单元一个点的精确积分规则。由于在高阶的 NURBS 和 B 样条模型中, 单元边界存在某阶数的平滑性。若以有限元中 C^0 连续为判断网格的标准, 样条模型的网格要少得多, 其积分时所需要的基函数和自由度数量要减少很多。一般来讲, 积分区域包含的自由度越少, 积分时所需要的积分点也越少, 这不仅使积分精确, 也使得在模型的积分运算效率更高。

以一维空间的积分为例。设 $\mathcal{Y}_h(\mathbf{R})$ 为是集合 $\mathbf{R}$ 的一个均匀子集, 其中相邻的点的子集 $I = (\xi_i, \xi_{i+1})$ 长度为 h 。在积分运算中集合 $I = (\xi_i, \xi_{i+1})$ 称为单元, 起始点是单元边界或者是边界点。在 $\mathcal{Y}_h(\mathbf{R})$ 上分段多项式空间 $\Psi_{p,-1}(\mathcal{Y}_h(\mathbf{R}))$ 的阶数 $p \geq 1$, 则在单元边界可能不连续, 而在 $\mathbf{R}$ 上, 其所有函数的子空间 $\Psi_{p,p-1}(\mathcal{Y}_h(\mathbf{R}))$ 是 $p-1$ 连续的。在不连续的单元上, 精确高斯积分不能用该规则来计算, 只能按照高斯积分的定义来求积分值。

$$\int_{\mathbf{R}} v(\xi) d\xi = \sum_{I \in \mathcal{Y}_h(\mathbf{R})} \sum_{i=1}^{n^{Gs}} h \omega_i^{Gs} v(\xi_{I,i}^{Gs}) \quad (46)$$

式中, ω_i^{Gs} 是高斯积分权重, $\xi_{I,i}^{Gs}$ 是高斯积分点。在 $\Psi_{p,-1}(\mathcal{Y}_h(\mathbf{R}))$ 上, $v(\xi)$ 的阶数 $p = 2n^{Gs} - 1$ 。对于给定阶数 p , 其精确积分所需要的高斯点: 当 p 为奇数时, $n^{Gs} = (p+1)/2$, 当 p 是偶数时, $n^{Gs} = (p+2)/2$ 。而在连续的单元上, 可以使用每个单元上很少的积分点来计算积分。其积分点 ξ_i^h 可在长度为 $2h$ 区间设定, 当 p 为奇数, $\xi_i^h = 2ih$, 当 p 为偶数, $\xi_i^h = (1/2 + 2i)h$, 此时高斯积分为

$$\int_{\mathbf{R}} v(\xi) d\xi = \sum_{i \in \mathbf{Z}} h \omega^h v(\xi_i^h) \quad (47)$$

而对于 B 样条基函数的积分则为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} N_{j,p}(\xi) d\xi &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} h \omega^h N_{j,p}(\xi_i^h) \\ \omega^h &= \frac{\int_{\mathbf{R}} N_{0,p}(\xi) d\xi}{h \sum_{i \in \mathbf{Z}} N_{0,p}(\xi_i^h)} \end{aligned} \quad (48)$$

第二种方法是基于定义在区域内部的基函数平移不变的特点, 而提出的解决局部非线性系统方程问题积分方法, 该方法的优点是当积分单元数变化时不需要重新计算积分。其积分规则参见文献[43], 其中积分公式为

$$\begin{aligned} \int_0^k f(x) dx &= \sum_{l=0}^{n^B} \omega_l^{LB} f(x_l^{LB}) + \sum_{i=0}^{k-2} \sum_{l=0}^{n^l} \omega_l^l f(x_i^l + i) + \\ &\quad \sum_{l=0}^{n^B} \omega_l^{RB} f(x^{RB} + k - 1) \end{aligned} \quad (49)$$

式中, $f(x)$ 是积分基函数, ω, x 是积分权重和积分点。

4 基于 IGA 优化

4.1 拟能量规则优化

目前, 形状优化算法原理均是基于点的运算的方式, 尽管 B 样条或 NURBS 模型的基函数有局部平滑特性, 然而这种基于标准有限元离散的形状优化方法仍然有一些不足, 如波动边界、扭曲单元以及有严格限制条件的优化。为了很好地解决这些问题, 现介绍拟能量规则优化方法^[44-45], 其他优化方法参见文献[46, 48]。

设 $\alpha \in \mathfrak{R}^{ad}$ 是在边界上与设计点(控制点)相关的离散矢量, $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{R}^{ad}}$ 是 α 与相关的可行域族。对于一个标准域(或初始域) Ω_0 , 设虚拟变形 $\varphi_\alpha: \Omega_0 \rightarrow \Omega_\alpha$ 是变分问题 $\min_{\varphi \in \varphi_\alpha} I(\varphi)$ 的一个解, 其

中 $\Phi_\alpha := \{\varphi \in V_h(\Omega_0) : \varphi(\Gamma_0) = \Gamma_\alpha, \det \nabla \varphi > 0\}$, $I: V_h(\Omega_0) \rightarrow \mathbf{R}$ 为能量函数。此时, 形状从初始形状 Ω_0 变为 Ω_α 的变形量由 φ_α 测定, 从而转换为一个位移问题。根据不同情况可选定不同的能量函数 $I(\varphi)$ 。最简单的能量函数是二次能量函数 $I_1(\varphi) := \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla(\varphi - id)|^2 dx$ 。

4.2 灵敏度

等几何分析除了在求解模型具有优势外, 在模型几何形状优化中对灵敏度分析也具有很多优点。

(1) 对具有高阶效应的复杂几何模型的灵敏度分析更精确。NURBS 基函数的高连续特性, 比有限元的形函数包含更多的信息, 更有利于分析结构响应和灵敏度计算。

(2) 在灵敏度计算优化的过程中, 大大简化了修改模型是与原 CAD 模型几何数据的交互。在等几何结构响应和灵敏度分析中所使用了 NURBS 基函数, 使得优化时改动模型只需简单的移动表示模型的控制点。

灵敏度不仅可用于估计某一模型设计的健壮性, 也可确定结构优化中的优化搜寻方向。等几何形状敏感度分析一般有两种方法: 直接微分法和伴随变量法^[49-50]。在优化中的灵敏度分析过程, 存在一类特殊的模型, 如 NURBS 模型。NURBS 模型是由控制点和权重共同表示的, 其控制点和权重对模型形状均有影响, 因此在优化时, 需要对这两个部分同时计算灵敏度, 这种方式为全灵敏度分析^[48]。

5 应用与实例

等几何分析与有限元类似, 借助于成熟的有限元框架, 等几何分析在热学、流体、接触、优化等诸多领域得到广泛快速的应用。

在热学领域中, DUVIGNEAU^[51]详细介绍了等几何分析方法, 并把该方法与经典有限元法进行对比, 并给出了热传导问题的等几何分析解决方案。XU 等^[19]根据 IGA 的主要特性, 利用其 k 型细分, 提出了一种新的基于等几何分析的二维热传导问题的误差估计方法。OLIVER 等^[52]以欧拉伯努利梁为对象, 将等几何分析法应用到了非线性震动分析领域。陈涛等^[53]将等几何分析法拓展到瞬态或动力学领域, 并以固体介质的瞬态热传导为例, 提出了先对空间域离散后对时间域离散的“半离散化”方法, 使得基函数插值所造成的 Dirichlet 边界误差问题得到很好解决。ANDERS 等^[54]以等几何分析方法中基函数的性质, 建立 Cahn-Hilliard 相场模型, 研究了

共聚混合物的热扩散问题。

接触分析不仅是工程中的难题, 也是力学领域最具挑战性的问题, 其困难在于非线性和非光滑性的接触关系。经典有限元在接触分析中, 通常采用单元小平面描述接触面, 这种方式仅适合于小变形。小平面的接触面, 人为导致了接触边界不光滑, 使得分析结果误差过大。

与有限元法相比, 等几何分析方法在接触问题分析中, 具有以下优点: ① 具有几何连续性; ② 简化了分块搜索; ③ 变分一致; ④ 接触面与模型实体数据结构一致。等几何分析方法将分析与几何融合, 更容易解决接触问题。LU^[55]提出了接触问题的数值分析等几何分析框架, 以 NURBS 基函数同一表示几何和分析模型, 提出以基于参数域中单元的搜索算法替换有限元中的单元搜索算法。该方法在精度和收敛性方面均优于拉格朗日方法。TEMIZER 等^[56]对基于 NURBS 的等几何分析方法在接触问题中的应用进行了大量研究, 并与 C^0 连续的拉格朗日有限元法对比。以 NURBS 模型为基础扩展了接触的节点算法, 该算法在二维三维的热弹性机械接触问题分析中, 得到了精确的结果。LORENZIS 等^[47, 58]系统地研究了基于 NURBS 的等几何分析方法在弹性体间的干摩擦和无摩擦的大变形接触问题, 通过 Mortar 方法分析接触约束, 提出了基于 Mortar 方法的接触算法, 使得大变形问题得到很好的解决。

在优化方面, 目前出现的研究成果主要集中在尺寸和几何形状的优化。IGA 方法用于形状优化设计是由 HUGHES 等^[1]提出的。该方法以 NURBS 控制点和系数为设计变量, 不需要进一步设计参数。与有限元优化不同的是, NURBS 基函数有非局部设计速度场, 更有利于形状优化设计。WALL 等^[12]基于等几何分析方法提出了结构形状优化框架, 以 NURBS 精确表示结构的分析模型, 省略优化时分析模型与设计模型间的频繁交互。ESPATH 等^[59]把 NURBS 曲面算法、数学优化算法、结构分析中的有限元法和自动微分方法四个计算数学方法与机构分析联系起来, 并结合序列二次规划方法优化算法, 对壳体进行形状优化。LUO 等^[60]基于敏感度分析提出了高效的结构优化方法, 这种方法是在优化开始时, 通过敏感度分析方法确定影响最大的设计变量, 从而提高优化效率和精确性。这种方法已成功应用于机器人手臂的优化。PARK 等^[61]通过样条建立斯托克斯流问题的边界, 运用 IGA 的求解方法, 以最小流体的能量损耗和最小压强对流体边界进行优化, 通过 IGA 的局部控制点插入, 得到了精确的优

化结果。

最近, 除了与 FEA 有相似的求解流程外, 还有一种浸入边界法^[62] (Immersed boundary method, IBM), 该方法以有限颗粒法^[63] (Finite cell method, FCM)为基础, 这些特有的计算分析方式是源于其基函数的矩形扩展的特征。该类方法的处理过程如图 13 所示, 增加额外区域, 让不规则的求解域变为方便求解的问题, 并在该增加的区域上设置远小于 0 的惩罚因子 α 。

图 13 IBM 法与 FCM 法的求解方法

浸入边界法(IBM)是由 PESKIN^[64]提出, 并应用于确定的力边界条件分析, 并利用迪拉克 δ 函数把拉格朗日力分布计算从浸入边界法扩展到了欧拉网格。浸入边界法主要用于模拟存在复杂外形结构的流场的运动情况和处理各种动边界问题, 目前已广泛应用于计算流体力学领域。SANCHES 等^[65]研究了几何复杂区域的浸入边界法, 并提出了修改 B 样条基函数的方法, 使得局部插入 Dirichlet 边界条件更容易, 并依此为基础, 提出了高效稳定的解决一维、二维、三维线性边界值问题的方法。SCHILLINGER 等^[66]采用浸入边界法研究了 NURBS 模型边界的局部层次细分方法, 并用该方法建立了完整的轮船螺旋桨和汽车车轮的模型, 并分析了模型的应力, 完成了该方法从模型设计到分析的整个过程。浸入边界法的欧拉表示法, 使得其在流体分析中应用广泛。REN 等^[67]在 IBM 的框架内, 以热流体的热流边界问题为对象, 利用 Dirichlet 边界和 Neumann 边界分别校正传热速率和热通量, 使得 IBM 方法得到了扩展, 使强制对流和自然对流问题有了新的求解方法。SCHILLINGER 等^[68-69]采用 p 型有限元和适应积分的 FCM 方法, 并通过线性的层次基函数的重叠和对假域的惩罚项对非线性的固体力学问题进行分析, 其求解结果的波动性大为减少, 数值结果更为稳定。RANK 等^[70]结合了 IGA 的几何模型与分析模型同一的特点和 FCM 简化网格的特征, 提出了扩展的等几何有限微粒法, 专门用于对 NRUBS 剪切曲面和曲体的分析。RUESS 等^[71]

改进了 Nitsche 变分原理的边界位移条件“弱”处理方法, 使得 FCM 方法适用于求解复杂的三维模型如剪切曲面等问题。

以下以二维的平面问题的等几何分析应用为例。分析中心有孔且两边受拉平面板的应力。为了计算简单, 根据模型的对称特点, 取四分之一模型分析, 在 Dirichlet 边界条件下, 参照文献[72]模型如图 14 所示, 其解析解为

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{T_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{T_x}{2} \left(1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{T_x}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{T_x}{2} \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{T_x}{2} \left(1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta$$

图 14 文献[72]模型

首先以 u, v 节点矢量分别为 $U = [0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1]$, $V = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$ 建立 NURBS 的平面模型, 该几何模型仅有两个网格, 控制点与其权重如表 1 所示。在模型的左上角处存在重复的控制点, 使模型在该处构建转角。模型对应的三个参数域: 指标空间、参数域与物理域如图 15 所示。模型指标空间指出了物理区域所支持的基函数的区域, 在图中以黑框表示。

表 1 带孔板的控制点与权重

编号	控制点		
	B_{i1}, ω	B_{i2}, ω	B_{i3}, ω
1	$(-1, 0), 1$	$(-2.5, 0), 1$	$(-4, 0), 1$
2	$(-1, 0.414), 0.854$	$(-2.5, 0.75), 1$	$(-4, 4), 1$
3	$(-0.414, 1), 0.854$	$(-0.75, 2.5), 1$	$(-4, 4), 1$
4	$(0, 1), 1$	$(0, 2.5), 1$	$(0, 4), 1$

图 15 带孔板模型的指标空间、参数域和物理区域

模型网格的划分是求解的前提, 网格细分可是求解结果更为精确, 模型网格与 h 型细分如图 16 所示。当 $r = R, \theta = 3\pi/2, T_x = 10$ 时, 对应的部分网格细化的分析结果如图 17 所示。

图 16 网格及其 h 型细分

图 17 网格细化后的求解结果

6 结论

(1) 等几何分析方法使 CAD 建模工具和有限元求解方式结合起来, 其几何模型与分析网格模型的表述同一, 弥补了几何模型与分析模型巨大差异的缺陷。从而在模型求解或优化过程中, 减少了模型间的几何数据交互, 提高了分析的效率和精度。

(2) 与经典有限元相比, 既有巨大优势, 同时也存在不足。其优势是: 等几何分析方法的几何模型均采用参数表示, 其网格的划分和细化与经典有限元不同, 仅需要在参数域上进行自然划分或插点细分, 避免了对分析网格模型直接操作, 省去了经典有限元中专门划分网格的过程, 加快了分析周期。等几何分析利用构建模型的基函数为形函数进行计算, 其单位节点精度远高于经典有限元。其劣势为: 等几何分析刚提出不久, 尽管存在诸多优势, 但还未被广泛应用在工程中。其基函数存在影响区域, 不满足正交特性, 在计算同一模型过程中, 尽管节点个数远少于经典有限元, 但每个节点需要计算多次。

(3) 等几何分析与有限元有很多相通之处, 但也克服了有限元的许多不足。但也有许多待研究的方面: 等几何分析采用样条基函数作为形函数, 由于基函数不满足正交条件, 其网格存在重叠或错误, 引起求解错误, 该方面有待研究; 对于高阶的样条模型, 其基函数的影响域涵盖了附近的多个节点, 其求刚度矩阵时, 会对该参数域区间多次积分计算, 影响效率, 其计算整体刚度矩阵效率有待研究; 对于复杂模型, 其模型拼接处, 其样条可能不连续, 使得模型不能求解, 该方面有待研究。

总之, 等几何分析以样条为基础, 实现了设计、分析和优化一体的分析框架, 是一种创新优秀的数

值计算方法。

参 考 文 献

- [1] KAGAN P, FISCHER A, BARYOSEPH P Z. New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 41: 435-458.
- [2] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 4135-4195.
- [3] COTTRELL J A, HUGHES T J R, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis toward integration of CAD and FEA[M]. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2009.
- [4] BRAIBANT V, FLEURY C. Shape optimal design using B-splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1984, 44: 247-267.
- [5] SAMREH J A. A survey of shape parameterization techniques[S]. New York: NASA Langley Technical Report, 1999.
- [6] YANG P, QIAN X. A B-spline based approach to heterogeneous object design and analysis[J]. Computer Aided Design, 2007, 34: 95-111.
- [7] BORDEN M J, SCOTT M A, EVANS J A, et al. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 87: 15-47.
- [8] BAZILEVS Y, CALO V M, COTTRELL J A. Isogeometric finite element analysis using T-splines[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199: 229-263.
- [9] XU Gang, MOURRAIN B, DUVIGNEAU R, et al. Parameterization of computational domain in Isogeometric analysis: Methods and comparison[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200: 2021-2031.
- [10] PAVEL K, ANATH F, PINHAS Z, et al. Mechanically based models: Adaptive refinement for B-spline finite element[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 57: 1145-1175.
- [11] THOMAS W S, DAVID L C, THOMAS G F, et al. T-spline simplification and local refinement[J]. ACM Transactions on Graphics, 2004, 23: 276-283.
- [12] WALL W A, FRENZEL M A, CYRON C. Isogeometric structural shape optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197:

- 2976-2988.
- [13] NAGY A P, ABDALLA M M, GURDAL Z. Isogeometric sizing and shape optimization of beam structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 1216-1230.
- [14] NGUYEN D M, ANTON E, ALLAN R G, et al. Isogeometric shape optimization of vibrating membranes[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 1343-1353.
- [15] YOUN D H, KIM M G, KIM H S. Shape design optimization of SPH fluid-structure interactions considering geometrically exact interfaces[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44: 319-336.
- [16] BAZILEVS Y, CALO V M, HUGHES T J R, et al. Isogeometric fluid-structure interaction: Theory, algorithms, and computations[J]. *Computational Mechanics*, 2008, 43: 3-37.
- [17] KIENDL J, BLETZINGER K U, LINHARD J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-love elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 198: 3902-3714.
- [18] BUFFA A, SANGALLI G, VAZQUEZ R. Isogeometric analysis in electromagnetic: B-Splines approximation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 1143-1152.
- [19] XU Gang, MOURRAIN B, DUVIGNEAT R, et al. A new error assessment method in isogeometric analysis of 2D heat conduction problems[J]. *Advanced Science Letters*, 2012, 10: 508-512.
- [20] ANAND V B. *Computer graphics and geometric modeling for engineer*[M]. New York: John Wiley&Sons, Inc., 1996.
- [21] SCHMIDT R, KIENDL J, BLETINGER K U, et al. Realization of an integrated structural design process: Analysis-suitable geometric modeling and isogeometric analysis[J]. *Computing and Visualization in Science*. 2010, 13: 315-330.
- [22] SEDERBERG T W, ZHENG J, BAKENOV A, et al. T-splines and T-NURCCS[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2003, 22: 477-484.
- [23] SEO Y D, KIM H J, YOUN S K. Isogeometric analysis for trimmed CAD surface[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, 198: 2982-2995.
- [24] SEO Y D, KIM H J, YOUN S K. Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 3270-3296.
- [25] SEO Y D, KIM H J, YOUN S K. Isogeometric analysis with trimming technique for problems of arbitrary complex topology[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 2796-2812.
- [26] AIGNER M, HEINRICH C, JUTTLER B, et al. Swept volume parameterization for isogeometric analysis[J]. *The Mathematics of Surface*, 2009, 5654: 19-44.
- [27] SCHMIDT R, WUCHNER R, BELTZINGER K U. Isogeometric analysis of trimmed NURBS geometries[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2012, 241-244: 93-111.
- [28] 方顾, 李际军. 用于非均匀有理 B 样条曲面裁剪的扫描线算法[J]. *计算机集成制造系统*, 2007(13): 2060-2063.
- FANG Gu, LI Jijun. Scan line algorithm for NURBS surface trimming[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2007(13): 2060-2063.
- [29] 马翔, 罗俊奇, 康宝生, 等. 一种 trimmed NURBS 曲面的裁剪方法[J]. *工程图学学报*, 1993(1): 41-46.
- MA Xiang, LUO Jueqi, KANG Baosheng, et al. A trimmed method for trimmed NURBS surfaces[J]. *Journal of Engineering Graphics*, 1993(1): 41-46.
- [30] 沈庆云, 周来水, 张乐年, 等. 一种 NURBS 曲面的裁剪方法[J]. *南京航空航天大学学报*, 1997(29): 138-144.
- SHENG Qingyun, ZHOU Laishui, ZHANG Lenian, et al. A trimmed method for NURBS surfaces[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 1997(29): 138-144.
- [31] 刘彬, 张仁津. NURBS 裁剪曲面绘制方法[J]. *电脑知识与技术*, 2012(8): 2077-2080.
- LIU Bin, ZHANG Renjin. Rending method of trimming NURBS surface[J]. *Computer Knowledge and Technology*, 2012(8): 2077-2080.
- [32] LES P, WAYNE T. *The NURBS book*[M]. London: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. Kg, 1995.
- [33] COTTRELL J A, HUGHES T J R, REALI A. Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196: 4160-4183.
- [34] CCHILLINGER D, RANK E. An unfitted hp-adaptive finite element method based on hierarchical B-splines for interface problems of complex geometry[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 3358-3380.
- [35] DAVID R, BARTELS R B. Hierarchical B-spline

- refinement[J]. *Computer Graphics*, 1988, 10: 205-212.
- [36] SCOTT M A, LI X, SEDERBERG T W, et al. Local refinement of analysis-suitable T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 213-216: 206-222.
- [37] VUONG A V, GIANNELLI C, JUTTLE B, et al. A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 3554-3567.
- [38] DORFEL M R, JUTTLE B, SIMEON B. Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 264-275.
- [39] MARTIN T, COHEN E, KIRBY R M. Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions[J]. *Computer aided geometric design*, 2009, 26: 648-664.
- [40] HUGHES T J R, REALI A, SANGALLI G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 301-313.
- [41] KAGAN P, FISCHER A. Integrated mechanically based CAE system using B-Spline finite elements[J]. *Computer Aided Design*, 2000, 32: 539-552.
- [42] AURICCHIO F, CALABRO F, HUGHES T J R, et al. A simple algorithm for obtaining nearly optimal quadrature rules for NURBS-based isogeometric analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, 249-252: 15-27.
- [43] RYPL D, PATZAK B. Assessment of computational efficiency of numerical quadrature schemes in the isogeometric analysis[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 19: 249-260.
- [44] SCHERER M, DENER R, STEINMANN P. A fictitious energy approach for shape optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, 82: 269-302.
- [45] FRIEDERICH J, SCHERER M, STEINMANN P. Isogeometric structural shape optimization using a fictitious energy regularization[J]. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, 11: 709-710.
- [46] CHO S, HA S H. Shape sensitivity analysis and optimization of structures using isogeometric approach[C/CD]// 8th World Congress on Computational Mechanics, Venice, Jul.1, 2008.
- [47] LI Kang, QIAN Xiaoping. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral[J]. *Computer-Aided Design*, 2011, 43: 1427-1437.
- [48] AZEGAMI H, FUKUMOTO S, AOYAMA T. Shape optimization of continua using NURBS as basis functions[J]. *Structural and Multidisciplinary optimization*, 2013, 46: 247-258.
- [49] QIAN Xiaoping. Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199: 2058-2071.
- [50] CHO S, HA S H. Isogeometric shape design optimization: Exact geometry and enhanced sensitivity[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 38: 53-70.
- [51] DUVIGNEAU R. An introduction to isogeometric analysis with application to thermal conduction[C/CD]// Institut National De Recherche En Informatique Et Automatique, Santiago, Nov. 24, 2009.
- [52] WEEGER O, WEVER U, SIMEON B. Isogeometric analysis of nonlinear Euler-Bernoulli beam vibrations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72: 813-835.
- [53] 陈涛, 莫蓉, 张欣. 固体介质瞬态传热问题的等几何分析[J]. *计算机集成制造系统*, 2011(17): 1988-1996.
- CHEN Tao, MO Rong, ZHANG Xin. Isogeometric analysis for transient heat conduction of solid medium[J]. *Computer Integrated Manufacturing Systems*, 2011(17): 1988-1996.
- [54] ANDERS D, WEINBERG K, REICHARDT R. Isogeometric analysis of thermal diffusion in binary blends[J]. *Computational Materials Science*, 2012, 52: 182-188.
- [55] LU Jia. Isogeometric contact analysis: Geometric basis and formulation for frictionless contact[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 726-741.
- [56] TEMIZER I, WRIGGERS P, HUGHES T J R. Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200: 1100-1112.
- [57] LORENZIS L D, TEMIZER I, ERIGGERS P, et al. A large deformation frictional formulation using NURBS-based isogeometric analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 87: 1287-1300.
- [58] LORENZIS L D, ERIGGERS P, ZAVARISE G. A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method[J]. *Computational Mechanics*, 2012,

- 49: 1-20.
- [59] ESPATH L F R, LINN R V, AWRUCH A M. Shape optimization of shell structures based on NURBS description using automatic differentiation[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 88: 613-636.
- [60] LUO Zhong, ZHAO Xueyan, LIANG Le, et al. Structural optimization of slender robot arm based on sensitivity analysis[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2012: 1-17.
- [61] PARK B U, SEO Y D, SIGMUND O, et al. Shape optimization of the stokes flow problem based on isogeometric analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2013: 1-13.
- [62] MITTAL R, IACCARINO G. Immersed boundary methods[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2005, 37: 239-261.
- [63] SCHILLINGER D, RUESS M, ZANDER N, et al. Small and large deformation analysis with the p - and B-spline versions of the finite cell method[R/OL]. Computational Mechanics, <http://dx.doi.org/10.1007/s00466-012-0684-z>, 2012-05-20.
- [64] PESKIN C. Numerical analysis of blood flow in the heart[J]. Journal of Computational Physics, 1977, 25: 220-252.
- [65] SANCHES R A K, BORNEMAN P B, CIRAK F. Immersed B-spline(I-spline) finite element method for geometrically complex domains[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200: 1432-1445.
- [66] SCHILLINGER D, DEDE L, SCOTT M A, et al. An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 249-252: 116-150.
- [67] REN Weiwei, SHU Chan, YANG Wenmin. An efficient immersed boundary method for thermal flow problems with heat flux boundary conditions[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, 64: 694-705.
- [68] PARVIZIAN J, DUSTER A, RANK E. Finite cell method h- and p-extension for embedded domain problems in solid mechanics[J]. Computational Mechanics, 2007, 41: 121-133.
- [69] DUSTER A, PARVIZIAN J, YANG Z, et al. The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197: 3768-3782.
- [70] RANK E, RUESS M, KOLLMANNNSBERGER S, et al. Geometric modeling, isogeometric analysis and the finite cell method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 249-252: 104-115.
- [71] RUESS M, SCHILLINGER D, BAZILEVS Y, et al. Weakly enforced essential boundary conditions for NURBS-embedded and trimmed NURBS geometries on the basis of the finite cell method[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2011: 1-20.
- [72] GOULD P L. Introduction to linear elasticity[M]. Berlin: Springer Verlag, 1999.
-
- 作者简介: 吴紫俊, 男, 1985 年出生, 博士研究生。主要研究方向为优化设计。
E-mail: wuzijun2010@gmail.com
- 刘清华(通信作者), 男, 1970 年出生, 博士后。主要研究方向为 PDM/PLM、CAD/CAPP/PDM/ERP 集成技术。
E-mail: liuqh@hustcad.com