DOI: 10.3901/JME.2015.23.060

平板式钻井液叠层筛网自由振动分析*

侯勇俊¹ 王禄友¹ 马 俊²

(1. 西南石油大学机电工程学院 成都 610500;

2. 重庆长安工业(集团)有限责任公司 重庆 404110)

摘要: 平板式钻井液叠层筛网在钻井液振动筛上得到广泛应用,研究振动筛的结构参数和安装参数对其自由振动的影响可为振动筛和筛网的设计及使用提供依据。提出将使用螺栓绷紧方法安装的筛网模型简化为弹性支承多跨单向连续矩形薄板模型,忽略筛网上的结构非线性特征,整张筛网看作由被底部橡胶支承条划分为 $k+1$ 块的小矩形板组成。基于弹性矩形薄板振动理论,建立每小块矩形薄板的自由振动方程,提出各跨间薄板的连续性条件,利用传递矩阵方法推导出了整张筛网的传递方程,根据边界条件得到筛网自由振动的频率方程。对某一型号平板式叠层筛网的自由振动特征方程进行数值求解,得到不同螺栓预紧力、不同橡胶支撑条数目及刚度下筛网的固有频率,数据分析表明这三种参数均与筛网的固有频率呈正相关性,并且互相之间有一定影响。

关键词: 平板式筛网; 连续矩形板; 传递矩阵; 自由振动

中图分类号: TH113

Free Vibration Analysis of Shale Shaker Laminated Flat-screen

HOU Yongjun¹ WANG Luyou¹ MA Jun²

(1. Southwest Petroleum University, School of Mechanical Engineering, Chengdu 610500;

2. Chongqing Changan Industry (Group) Company Limited, Chongqing 404110)

Abstract: Laminated flat-screen is widely used in shale shaker, study of the influence of the structural parameters and installation parameters of the shale shaker to the free vibration of the screen can provide the basis for the design and employment of the shale shaker and screen. Elastic support multi-span continuous unidirectional rectangular plate model which is simplified by using the bolt tightening method of the screen installation model is proposed, and regardless of the structure of the nonlinear characteristics of the screen. The whole screen is divided into $k+1$ pieces small rectangular plates by the rubber support. Based on the elastic rectangular plate vibration theory, the free vibration equation on each piece of small rectangular plates are established, the continuity conditions of small rectangular plates between each span are put forward, the transfer function of the entire screen by using the transfer matrix method is derived, and get the free vibration frequency equation of screen according to the boundary conditions. Numerical solution for free vibration characteristic equation is conducted on a version of flat-screen to obtain the natural frequency with different magnitude of bolt preload and different numbers and stiffness of rubber support bar. Data analysis shows that these three parameters are positively correlated with the natural frequency of the screen, and have effects on each other.

Key words: flat-screen; continuous rectangular plate; transfer matrix; free vibration

0 前言

筛网是振动筛上执行钻井液筛分任务的重要部件,也是振动筛最主要的易损件。钻井液振动筛处理能力的大小、筛网使用寿命的长短与筛网的动力学特性密切相关,对振动筛主要以筛箱结构、工

作原理及固相颗粒运移规律^[1]等为研究对象,但是,筛网的研究也是其重要的组成部分。以往对钻井液振动筛筛网振动特性的研究^[2-5],多集中于 20 世纪 90 年代,大都以当时广泛使用的单层筛网、普通叠层筛网及勾边软式粘结筛网为研究对象,这些筛网使用不锈钢丝正交编织而成,由于钢丝的刚度很小,筛网本身可以看成一种柔性结构物,因此,底部橡胶支承条对其产生的弯矩和剪力较小,在进行理论研究时,可以应用弦、悬索等振动模型对其编织结

* 国家自然科学基金资助项目(51074132)。20141228 收到初稿,20150416 收到修改稿

构进行分析, 并且忽略弯矩和剪力对振动的影响。但随着技术进步, 现在各油田已广泛使用平板式叠层筛网(这种筛网通常由两到三层不锈钢筛网布黏合在开孔的金属衬板上构成), 相比单层筛网、普通叠层筛网及勾边软式粘结筛网这种筛网整体刚度更大, 需要考虑弯矩和剪力对其振动的影响, 所以, 原来的理论已经不再适用于平板式叠层筛网的分析。目前, 对平板式叠层筛网的研究并不多见, 其振动理论模型尚没有学者确定或提出。由于该种筛网整体刚度较大并且文章研究的重点在分析不同安装参数及结构参数对筛网固有频率的影响^[6], 所以, 在分析时可以忽略筛网上的结构非线性特征, 整张筛网被看成各向同性连续的矩形薄板, 整个安装模型同于静不定的弹性支承多跨度单向连续矩形板。

对于矩形板薄板, 已有较多学者对其进行过振动理论的研究^[7-14], 张福范^[15-16]研究了在板平面内有张力或压力与垂直于板面荷重共同作用的及在弹性地基上的连续板的振动特性以及正交各向异性连续矩形板的平衡、稳定、振动问题, VELETSOS 等^[17-18]曾用 Holzer 法、MUKHOPADHYAY 用半解析法研究了两边简支单向连续矩形板的固有频率, AZIMI^[19]用敏感性法研究了单向和双向连续矩形板的固有频率, 周叮^[20]采取将梁函数与多项式函数叠加作为基函数的方式, 用李兹法近似求解了连续板的固有振动特性。本文采用传递矩阵法分析两端受拉力、各跨间弹性支撑的连续矩形薄板, 整块板被划分 $k+1$ 块小的矩形板条, 用板条一边的状态参数表示另一边的状态参数, 根据板的节线处的连续性条件, 推导出整个板的传递矩阵, 将简支边界条件带入, 得到频率方程。

1 筛网自由振动模型的建立与求解

1.1 数学模型的建立

平板式叠层筛网使用螺栓绷紧方法安装在振动筛上如图 1 所示。

图1 平板式叠层筛网使用螺栓绷紧方法安装在振动筛上的装配示意图

1. 筛网 2. 橡胶支承条 3. 螺栓张紧机构 4. 筛箱

将图 1 中筛网安装模型简化为弹性支承多跨矩形板模型, 如图 2、3 所示。设矩形薄板长为 a , 宽为 b , 厚度为 h , 以此矩形薄板长度方向为 x 轴, 宽度方向为 y 轴, 厚度方向为 z 轴建立空间直角坐标系, 图 2 为正视图, 图 3 为俯视图。如图 2 所示, 在薄板下方, 有 k 个平行于 y 轴的弹性支承条(图 3 中虚线表示弹性支撑条), 长度为 b , 位置为 $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$, 且 $x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k$, 因为橡胶支承条在实际工作过程中只存在很小的弹性变形, 所以在理论模型中, 可以将其当作线性支承弹簧处理(只沉降, 不发生扭转^[21]), 设其刚度为 S , 整个薄板被弹性支承条分解为 $k+1$ 块小矩形板, 每块小矩形板长均为 b , 宽为 $l_1, l_2, \dots, l_k, l_{k+1}$, 显然 $l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_k + l_{k+1} = a$, 此外, 在薄板左右边界 $x=0$ 和 $x=a$ 处, 受到平行于 x 轴的均布拉力 F 。

图2 筛网理论安装模型正视图

图3 筛网理论安装模型俯视图

模型的边界条件为: $x=0$ 和 $x=a$ 处为简支边界; $y=0$ 和 $y=b$ 处, 为自由边界。

设第 i 块小矩形板的挠度为 $w_i(x, y, t)$, 每一小块矩形薄板均满足矩形薄板理论, 第 i 块小矩形板的自由振动方程为^[22]

$$\frac{\partial^4 w_i(x, y, t)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_i(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_i(x, y, t)}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial t^2} - \frac{F}{D} \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

式中, $x_{i-1} < x < x_i$, $i=1, 2, \dots, k, k+1$ 。 ρh 为薄板单位面积上的质量, t 为时间, $D = \frac{Eh}{12(1-\mu^2)}$ 为板的抗弯刚度, μ 和 E 分别为材料的泊松比和弹性

模量。

每相邻两块小矩形薄板的连续性条件如下。

(1) 两块小矩形板相接处的挠度相同, 表示为

$$w_i(x_i^-, y, t) = w_{i+1}(x_i^+, y, t) \quad (2a)$$

(2) 两块小矩形板相接处切线斜率相同(即转角), 表示为

$$\frac{\partial w_i(x_i^-, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial w_{i+1}(x_i^+, y, t)}{\partial x} \quad (2b)$$

(3) 两块小矩形板相接处弯矩相同, 表示为

$$-D \left(\frac{\partial^2 w_i(x_i^-, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_i(x_i^-, y, t)}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w_{i+1}(x_i^+, y, t)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_{i+1}(x_i^+, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (2c)$$

(4) 因为在弹性支承的薄板边界上从薄板传递至边界 $x=i$ 位置在 z 方向的压力可以表示为^[21]

$$-V_x = - \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=i} = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w_i(x, y, t)}{\partial y^2} \right]_{x=i}$$

式中, Q_x 表示扭矩, M_{xy} 表示弯矩。所以, 在 $x=i$ 处剪力与支反力的关系可以表示为

$$D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w_i(x_i^-, y, t)}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w_i(x_i^-, y, t)}{\partial y^2} \right] = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w_{i+1}(x_i^+, y, t)}{\partial x^2} + (2-\mu) \frac{\partial^2 w_{i+1}(x_i^+, y, t)}{\partial y^2} \right] + Sw(x_i, y, t) \quad (2d)$$

式中, x_i^- , x_i^+ 分别表示第 i 个弹性支承处左右截面的位置, $i=1, 2, \dots, k$ 。

1.2 模型的求解

可令振动微分方程(1)的解 $w_i(x, y, t)$ 表示成下列形式

$$w_i(x, y, t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) w_{0i}(x, y) \quad (3)$$

式中, $i=1, 2, \dots, k, k+1$, A, B 为待求常数, 根据初始条件决定; ω 表示板的固有频率; $w_{0i}(x, y)$ 称为本征函数, 描述在满足边界条件时的薄板弯曲的基本形状, 本征函数可近似表达为

$$w_{0i}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n_i}(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

式中, $i=1, 2, \dots, k, k+1$; $n=1, 2, \dots$, $f_{n_i}(x)$ 是变量 x

的函数^[21]。

将式(4)代入式(3), 可得到

$$w_i(x, y, t) = (A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t) \sum_{n=1}^{\infty} f_{n_i}(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

将式(5)代入式(1)得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f_{n_i}'''(x) - \left[2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{F}{D} \right] f_{n_i}''(x) + \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right] f_{n_i} \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (6)$$

欲求式(6)异于零的解, 则只有大括号中的量等于零, 即

$$f_{n_i}'''(x) - \left[2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{F}{D} \right] f_{n_i}''(x) + \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right] f_{n_i} = 0 \quad (7)$$

式中, $x_{i-1} < x < x_i, i=1, 2, \dots, k, k+1, n=1, 2, \dots$ 。

将式(5)代入式(2)得到

$$f_{n_i}(x_i^-) = f_{n_{i+1}}(x_i^+) \quad (8a)$$

$$f_{n_i}'(x_i^-) = f_{n_{i+1}}'(x_i^+) \quad (8b)$$

$$f_{n_i}''(x_i^-) - \mu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 f_{n_i}(x_i^-) = f_{n_{i+1}}''(x_i^+) - \mu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 f_{n_{i+1}}(x_i^+) \quad (8c)$$

$$f_{n_i}'''(x_i^-) - (2-\mu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 f_{n_i}'(x_i^-) = f_{n_{i+1}}'''(x_i^+) - (2-\mu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 f_{n_{i+1}}'(x_i^+) + \frac{S}{D} f_{n_i}(x_i) \quad (8d)$$

式中, $x_{i-1} < x < x_i, i=1, 2, \dots, k, k+1$ 。

式(7)的特征方程为

$$r^4 - \left[2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{F}{D} \right] r^2 + \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right] = 0 \quad (9)$$

令

$$\alpha = 2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \frac{F}{D} \quad \beta = \left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right]$$

则式(9)的根为

$$r_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}} \quad (10a)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}} \quad (10b)$$

$$r_3 = -\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}} \quad (10c)$$

$$r_4 = -\sqrt{\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}} \quad (10d)$$

经计算, r_1, r_3 为实根, 当 $\beta < 0$ 时, r_2, r_4 为虚根; 当 $\beta \geq 0$ 时, r_2, r_4 也为实根。

分两种情况进行讨论。若 $\beta < 0$, 也就是 $\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 < \frac{\rho h \omega^2}{D}$ 时, 特征方程式(9)有两个实根两个虚根, 则可令式(7)的通解为

$$f_{n_i}(x) = A_{n_i} \cosh r_1(x - x_{i-1}) + B_{n_i} \sinh r_1(x - x_{i-1}) + C_{n_i} \cos r_2(x - x_{i-1}) + D_{n_i} \sin r_2(x - x_{i-1})$$

$$x_{i-1} < x < x_i \quad i = 1, 2, \dots, k, k+1 \quad (11)$$

将式(11)代入式(8)得到

$$A_{n_{i+1}} + C_{n_{i+1}} = A_{n_i} \cosh r_1 l_i + B_{n_i} \sinh r_1 l_i + C_{n_i} \cos r_2 l_i + D_{n_i} \sin r_2 l_i \quad (12a)$$

$$r_1 B_{n_{i+1}} + r_2 D_{n_{i+1}} = r_1 A_{n_i} \sinh r_1 l_i + r_1 B_{n_i} \cosh r_1 l_i - r_2 C_{n_i} \sin r_2 l_i + r_2 D_{n_i} \cos r_2 l_i \quad (12b)$$

$$T_1 A_{n_{i+1}} - T_2 C_{n_{i+1}} = T_1 A_{n_i} \cosh r_1 l_i + T_1 B_{n_i} \sinh r_1 l_i - T_2 C_{n_i} \cos r_2 l_i - T_2 D_{n_i} \sin r_2 l_i \quad (12c)$$

$$H_1 B_{n_{i+1}} - H_2 D_{n_{i+1}} = A_{n_i} \left(H_1 \sinh r_1 l_i - \frac{S}{D} \cosh r_1 l_i \right) + B_{n_i} \left(H_1 \cosh r_1 l_i - \frac{S}{D} \sinh r_1 l_i \right) + C_{n_i} \left(H_2 \sin r_2 l_i - \frac{S}{D} \cos r_2 l_i \right) + D_{n_i} \left(-H_2 \cos r_2 l_i - \frac{S}{D} \sin r_2 l_i \right) \quad (12d)$$

$$T_1 = r_1^2 - \mu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad T_2 = r_2^2 - \mu \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

$$H_1 = r_1^3 - r_1 (2 - \mu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad H_2 = r_2^3 + r_2 (2 - \mu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2$$

联立式(12), 可以得到关于 $A_{n_{i+1}}, B_{n_{i+1}}, C_{n_{i+1}}$ 和 $D_{n_{i+1}}$

的传递矩阵公式

$$\begin{Bmatrix} A_{n_{i+1}} \\ B_{n_{i+1}} \\ C_{n_{i+1}} \\ D_{n_{i+1}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix}^i \begin{Bmatrix} A_{n_i} \\ B_{n_i} \\ C_{n_i} \\ D_{n_i} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{4 \times 4}^i \begin{Bmatrix} A_{n_i} \\ B_{n_i} \\ C_{n_i} \\ D_{n_i} \end{Bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, k, k+1 \quad (13)$$

$\mathbf{T}_{4 \times 4}^i$ 是 4×4 阶传递矩阵, 由方程式(7)和连续性条件式(8a)、(8b)确定, 与两端边界条件无关, 其元素值为

$$t_{11} = \cosh r_1 l_i \quad t_{12} = \sinh r_1 l_i \quad t_{13} = 0 \quad t_{14} = 0$$

$$t_{21} = \sinh r_1 l_i - \frac{S r_2}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \cosh r_1 l_i$$

$$t_{22} = \cosh r_1 l_i - \frac{S r_2}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \sinh r_1 l_i$$

$$t_{23} = -\frac{S r_2}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \cos r_2 l_i$$

$$t_{24} = -\frac{S r_2}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \sin r_2 l_i \quad t_{31} = 0 \quad t_{32} = 0$$

$$t_{33} = \cos r_2 l_i \quad t_{34} = \sin r_2 l_i$$

$$t_{41} = \frac{S r_1}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \cosh r_1 l_i$$

$$t_{42} = \frac{S r_1}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \sinh r_1 l_i$$

$$t_{43} = -\sin r_2 l_i + \frac{S r_1}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \cos r_2 l_i$$

$$t_{44} = \cos r_2 l_i + \frac{S r_1}{D(r_1 H_2 + r_2 H_1)} \sin r_2 l_i \quad (14)$$

反复应用关系式(13), 即可得到第 $k+1$ 小块矩形薄板的待定常数 $A_{n_{k+1}}, B_{n_{k+1}}, C_{n_{k+1}}, D_{n_{k+1}}$ 与第 1 小块的待定常数 $A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}$ 和 D_{n_1} 之间的关系

$$\begin{Bmatrix} A_{n_{k+1}} \\ B_{n_{k+1}} \\ C_{n_{k+1}} \\ D_{n_{k+1}} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{4 \times 4}^k \mathbf{T}_{4 \times 4}^{(k-1)} \begin{Bmatrix} A_{n_{k-1}} \\ B_{n_{k-1}} \\ C_{n_{k-1}} \\ D_{n_{k-1}} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{4 \times 4}^k \mathbf{T}_{4 \times 4}^{(k-1)} \dots \mathbf{T}_{4 \times 4}^1 \begin{Bmatrix} A_{n_1} \\ B_{n_1} \\ C_{n_1} \\ D_{n_1} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

这样,整个系统的待定常数就只剩 4 个,即 A_{n_i} , B_{n_i} , C_{n_i} 和 D_{n_i} , 它们可以由两端 $x=0$ 和 $x=a$ 处的共四个边界条件确定。因为矩形薄板两端 $x=0$ 和 $x=a$ 处为简支边界, 所以有

$$w_{n_i}(x, y, t)|_{x=0} = 0 \rightarrow f_{n_i}(0)|_{x=0} = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{\partial^2 w_{n_i}(x, y, t)}{\partial^2 x} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow f_{n_i}''(x)|_{x=0} = 0 \quad (16b)$$

$$w_{n_{k+1}}(x, y, t)|_{x=a} = 0 \rightarrow f_{n_{k+1}}(x)|_{x=a} = 0 \quad (16c)$$

$$\frac{\partial^2 w_{n_{k+1}}(x, y, t)}{\partial^2 x} \Big|_{x=a} = 0 \rightarrow f_{n_{k+1}}''(x)|_{x=a} = 0 \quad (16d)$$

将边界条件式(15)代入式(10)得到

$$A_{n_i} = 0 \quad C_{n_i} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{n_{k+1}} \\ B_{n_{k+1}} \\ C_{n_{k+1}} \\ D_{n_{k+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n_{k+1}} \\ B_{n_{k+1}} \\ C_{n_{k+1}} \\ D_{n_{k+1}} \end{pmatrix} \quad (18)$$

这里, $N_{2 \times 4}$ 是 4×2 阶矩阵, 由式(16c)、(16d)代入式(11), 确定其元素值为

$$\begin{aligned} n_{11} &= \cosh r_1 l_{k+1} & n_{12} &= \sinh r_1 l_{k+1} & n_{13} &= \cos r_2 l_{k+1} \\ n_{14} &= \sin r_2 l_{k+1} & n_{21} &= r_1^2 \cosh r_2 l_{k+1} \\ n_{22} &= r_1^2 \sinh r_1 l_{k+1} & n_{23} &= -r_2^2 \cos r_2 l_{k+1} \\ n_{24} &= -r_2^2 \sin r_2 l_{k+1} \end{aligned} \quad (19)$$

将式(17)、(18)代入式(15), 则有

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N_{2 \times 4} \begin{pmatrix} A_{n_{k+1}} \\ B_{n_{k+1}} \\ C_{n_{k+1}} \\ D_{n_{k+1}} \end{pmatrix} = N_{2 \times 4} T_{4 \times 4}^{(k)} T_{4 \times 4}^{(k-1)} \dots T_{4 \times 4}^{(1)} \begin{pmatrix} A_{n_1} \\ B_{n_1} \\ C_{n_1} \\ D_{n_1} \end{pmatrix} = M_{2 \times 4} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{n_1} \\ 0 \\ D_{n_1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{n_1} \\ 0 \\ D_{n_1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

这里 $M_{2 \times 4} = N_{2 \times 4} T_{4 \times 4}^{(k)} T_{4 \times 4}^{(k-1)} \dots T_{4 \times 4}^{(1)}$ 。显然, 方程式(20)有非零解的条件为

$$\Delta(\omega^2) = \det \begin{pmatrix} m_{12} & m_{14} \\ m_{22} & m_{24} \end{pmatrix} = 0 \quad (21)$$

式(21)就是所求矩形薄板的频率方程, 通过数值方法, 可以得到薄板固有频率 ω 的值。在确定各阶频率后, 将值代入传递矩阵式(15), 可求得各小块矩形薄板待定常数 A_{n_i} , B_{n_i} , C_{n_i} 和 D_{n_i} , 进而可以确定每一小块矩形薄板的模态函数, 最终求出整个薄板的模态。

当第二种情况若 $\beta \geq 0$ 时, 式(9)有四个实根, 用同样的方法, 可以推导得到频率方程, 此处不再累述。

2 算例数值分析与讨论

取某一型号平板式叠层筛网为计算模型, 筛网长 $a=1050 \text{ mm}$, 宽 $b=697 \text{ mm}$, 厚 $h=3 \text{ mm}$, 密度 $\rho=7850 \text{ kg/mm}^3$, 泊松比 $\mu=0.3$, 弹性模量 $E=2 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。使用螺栓绷紧方法安装在振动筛上, 底部橡胶支承条共有 9 个, 两两之间跨度相等, 支承条的等效弹簧刚度为 46060 N/m 。

数值分析得到该模型在 n 分别取 1, 2, 3(筛网宽度方向半波数目), 螺栓预紧力大小等于 50 kN 时的前四阶固有频率值, 如表 1 所示。

表 1 某型号筛网安装模型前四阶固有频率值 Hz

序号 n	筛网前四阶固有频率			
	第 1 阶	第 2 阶	第 3 阶	第 4 阶
1	224.67	365.81	562.56	821.13
2	446.73	582.90	787.06	1052.51
3	838.27	891.66	1014.92	1211.53

文章着重研究振动筛安装参数(螺栓预紧力大小)、结构参数(橡胶支承条数目及刚度)对筛网固有频率的影响。下面对三种参数在 $n=1$ 时(当 $n=2, 3$ 时, 变化趋势相似, 故不单独做讨论)对筛网固有频率的影响进行分析。

2.1 单一参数变化对筛网前四阶固有频率的影响

数值求解得到筛网(安装在橡胶支撑条有 9 个、支撑条等效弹簧刚度等于 46060 N/m 的振动筛上)在不同螺栓预紧力大小作用下的前四阶固有频率如

图 3 所示, 从图可知, 当螺栓预紧力增大时, 筛网前四阶固有频率随着增大, 且基本呈线性递增关系; 可以看出, 螺栓预紧力大小对筛网高阶固有频率的影响较大, 对低阶固有频率影响较小, 在所取螺栓预紧力大小范围内, 筛网的一阶固有频率最低为 217.53 Hz, 远大于普通钻井液振动筛激振频率 23.5 Hz, 所以不会发生共振现象。

图 4 筛网前四阶固有频率随螺栓预紧力变化图

数值求解得到筛网(安装在螺栓预紧力大小等于 50 kN, 橡胶支承条等效弹簧刚度等于 46 060 N/m 的振动筛上)安装在不同橡胶支承条数目的振动筛上时的前四阶固有频率如图 5 所示, 由图 5 可知, 在所取橡胶支承条数目范围内, 当橡胶支承条数目增加, 筛网前四阶固有频率随着增大; 可以看出, 橡胶支承条数目对筛网高阶固有频率的影响大于对低阶固有频率的影响, 但随着橡胶支撑条数目增加, 前四阶固有频率的增幅在减小(尤其表现在高阶频率上), 当橡胶支撑条数目在增长到一定数值时, 可以预见固有频率的值将趋于恒定, 也就是说, 其对固有频率的影响将可以忽略。

图 5 筛网前四阶固有频率随橡胶支承条数目变化图

数值求解得到筛网(安装在橡胶支撑条有 9 个、螺栓预紧力大小等于 50 kN 的振动筛上)在不同橡胶支撑条等效弹簧刚度作用下的前四阶固有频率如

图 6 所示, 从图 6 可知, 当橡胶支承条等效弹簧刚度较小时(小于 10 000 N/m), 随着支承刚度增大, 筛网前四阶固有频率基本不变, 且接近于刚度为 0 时的固有频率, 可以近似看作无橡胶支撑条, 当橡胶支承条等效弹簧刚度较大时(大于 50 000 N/m)时, 随着支承刚度增大, 筛网前四阶固有频率也增大, 并且可以看出, 低阶固有频率的增幅大于高阶固有频率增幅。另外, 前四阶固有频率的值会随着支承刚度的增大而变得较为接近。

图 6 筛网前四阶固有频率随橡胶支承条等效弹簧刚度变化图

2.2 双参数变化对筛网第一阶固有频率的影响

数值求解得到筛网(安装在螺栓预紧力等于 50 kN 的振动筛上)安装在不同橡胶条数目及刚度的振动筛上时, 筛网第一阶固有频率如图 7 所示, 从图 7 可知, 当橡胶支承条等效弹簧刚度较小时, 橡胶支承条数目对第一阶固有频率影响不大, 当橡胶支承条等效弹簧刚度较大时, 橡胶支承条数目对第一阶固有频率影响较大。

图 7 筛网第一阶固有频率随橡胶支承条数目及等效弹簧刚度变化图

数值求解得到筛网(安装在有 9 个橡胶支承条的振动筛上)安装在不同螺栓预紧力作用和不同橡胶支承条等效弹簧刚度的振动筛上时, 筛网第一阶固有频率如图 8 所示, 从图 8 可知, 无论在橡胶支承条等效弹簧刚度取多少, 螺栓预紧力大小对筛网

第一阶固有频率影响均不大,随着橡胶支承条等效弹簧刚度变大,螺栓预紧力大小对筛网第一阶固有频率的影响变得更小。

图8 筛网第一阶固有频率随预紧力大小和橡胶支承条等效弹簧刚度变化图

数值求解得到筛网(安装在橡胶支承条等效弹簧刚度等于46 060 N/m的振动筛上)安装在不同螺栓预紧力大小作用和不同橡胶支承条等效弹簧刚度的振动筛上时,筛网第一阶固有频率如图9所示,从图可知,当橡胶支承条数目变化时,螺栓预紧力大小对筛网第一阶固有频率的影响基本不变,均呈线性递增的趋势。

图9 筛网第一阶固有频率随螺栓预紧力大小和橡胶支承条数目变化图

3 结论

(1) 基于弹性矩形薄板振动理论,提出了平板式叠层筛网自由振动数学模型,利用传递矩阵方法推导出了筛网自由振动频率方程,并对算例进行了数值求解,得到筛网安装模型的固有频率值。

(2) 螺栓预紧力大小与筛网固有频率呈线性递增关系,且随着固有频率阶数的增加预紧力对其影响增大。在橡胶支承条数目较少时,其对筛网固有频率影响较大,当橡胶支承条数目增加到一定数目时,其对筛网固有频率影响不大。橡胶支承条等效弹簧刚度在10 000 N/m以内时,其对筛网固有频率

基本不产生影响,当橡胶支承条等效弹簧刚度较大时,其对筛网固有频率影响较大,且对低阶频率影响比高阶频率影响大。随着橡胶支承条等效弹簧刚度的增大,支承条数目对筛网第一阶固有频率影响增大;螺栓预紧力大小对筛网第一阶固有频率的影响基本不受橡胶支承条等效弹簧刚度及橡胶支承条数目的影响。

(3) 数值求解得到的固有频率值以及对数据的分析结果将为相关振动筛和筛网的设计及使用提供一定的参考。文章中对弹性支承多跨单向连续矩形板的频率方程的推导方法,可以应用于与之相似的机械及土木类工程模型中。

参考文献

- [1] 朱维兵,晏静江. 钻井振动筛固相颗粒运动规律[J]. 机械工程学报, 2005, 41(10): 231-234.
ZHU Weibing, YAN Jingjiang. Kinematical law of solids particles on a shale shaker[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(10): 231-234.
- [2] 龚伟安. 钻井液固相控制技术与设备[M]. 北京: 石油工业出版社, 1995.
GONG Weian. The technology and equipment of drilling soiling control[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1995.
- [3] 张明洪, 杨国俊. 不合理的筛网结构[J]. 石油矿场机械, 1985(5): 9-19.
ZHANG Minghong, YANG Guojun. The unreasonable shale shaker screen structure[J]. Oil Field Equipment, 1985(5): 9-19.
- [4] 赵国珍, 李君裕, 龚伟安. 振动筛筛网抛掷指数的研究[J]. 石油矿场机械, 1991(2): 3-11.
ZHAO Guozhen, LI Junyu, GONG Weian. Throwing index of shale shaker screen[J]. Oil Field Equipment, 1991(2): 3-11.
- [5] 王启伟. 泥浆振动筛筛网的模态分析[J]. 石油机械, 1987(5): 1-15.
WANG Qiwei. The modal analysis of shale shaker screen[J]. Oil Equipment, 1987(5): 1-15.
- [6] 罗筱英, 唐进元. 结构参数对砂轮主轴系统动态性能的影响[J]. 机械工程学报, 2007, 43(3): 128-134.
LUO Xiaoying, TANG Jinyuan. Effect of structure parameters on dynamic properties of spindle system[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(3): 128-134.
- [7] WEN Jihong, YU Dianlong, WANG Gang. Theory and experimental investigation of flexural wave propagation in thin rectangular plate with periodic structure[J].

- Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 18(3): 385-388.
- [8] WANG Yan, WANG Zhongmin, ZHOU Yingfeng. Transverse vibration characteristics of viscoelastic rectangular plate with crack[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 21(6): 36-40.
- [9] 洪善桃, 周正威. 正交各向异性连续板的振动[J]. 振动与冲击, 1984(1): 1-14.
HONG Shantao, ZHOU Zhengwei. Vibration of continuous orthotropic plates[J]. Journal of Vibration and Shock, 1984(1): 1-14.
- [10] GE Honghai, XU Jinyu. A numerical method for cavity identification in beams on an elastic foundation[J]. Tsinghua Science and Technology, 2007(5): 540-545.
- [11] LIN H P, CHANG S C, WU J D. Beam vibrations with an arbitrary number of cracks[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002(285): 987-999.
- [12] LIN H P, CHANG S C. Free vibration analysis of multi-span beams with intermediate flexible constraints[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005(281): 155-163.
- [13] GORMAN D J. Free vibration analysis of rectangular plates[M]. Holland: Elsevier, 1982.
- [14] XU M, CHENG D A. New approach to solving a type of vibration problem[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 177(4): 565-571.
- [15] 张福范. 连续矩形板[J]. 力学学报, 1958(3): 219-231.
ZHANG Fufan. Continuous rectangular plates[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1958(3): 219-231.
- [16] 张福范. 正交各向异性连续矩形板的平衡、稳定与振动[J]. 清华大学学报, 1959(5): 97-129.
ZHANG Fufan. The equilibrium, stability and vibration of anisotropic continuous rectangular plates[J]. Journal of Tsinghua University, 1959(5): 97-129.
- [17] VELESOS A S. Determination of natural frequencies of continuous plate hinged along two opposite edges[J]. Applied Mechanics, 1956, 23(1): 97-102.
- [18] UNGAR E E. Free oscillations of edge-connected simply supported plate system[J]. Engineering for Industry, 1961(83): 431-440.
- [19] AZIMI S. The reacceptance method applied to the free vibration of continuous rectangular plates[J]. Sound and Vibration, 1984, 93(1): 9-29.
- [20] 周叮. 连续矩形板横向振动固有特性的计算[J]. 工程力学, 1992(3): 124-131.
ZHOU Ding. The calculation of natural characteristics of transverse vibration of continuous rectangular plates[J]. Engineering Mechanics, 1992(3): 124-131.
- [21] 曹国雄. 弹性矩形薄板振动[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983.
CAO Guoxiong. The vibration of elastic rectangular thin plates[M]. Beijing: China Building Industry Press, 1983.
- [22] 盛宏玉. 结构动力学[M]. 合肥: 合肥工业大学出版社, 2005.
SHENG Hongyu. Structural dynamics[M]. Hefei: Hefei University Press, 2005.

作者简介: 侯勇俊, 男, 1967 年出生, 博士, 教授。主要研究方向为机械系统动力学、石油钻采机械。

E-mail: hyj2643446@126.com

王禄友(通信作者), 男, 1989 年出生。主要研究方向为机械系统动力学、石油钻采机械。

E-mail: wangluyouswpu@163.com