DOI: 10.3901/JME.2014.21.189

谐波齿轮中柔轮中性层的伸缩变形规律^{*}

陈晓霞¹ 刘玉生² 邢静忠¹ 徐 蔚¹

(1. 天津工业大学现代机电装备技术天津市重点实验室 天津 300387;

2. 浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室 杭州 310027)

摘要: 在波发生器作用下, 柔轮的中性层变形是谐波齿轮啮合分析的基础。柔轮变形分析基于小变形和中性层不伸长假定, 但几何分析计算表明: 柔轮的中性层出现伸长变形。为了真实揭示柔轮在双圆盘波发生器作用下的变形特征, 提出基于强制几何约束条件和力平衡方程及连续性条件的柔轮中性层变形和内力计算方法。将波发生器作用下圆环受力分为接触区和非接触区, 接触区由波发生器的强制位移条件确定柔轮中性层内力和变形; 非接触区的变形和内力根据弯曲微分方程及其边界条件、连续性条件来确定。利用胡克定律, 基于齿圈的周向力获得柔轮中性层周向应变和伸长变形。建立壳单元的柔轮有限元模型, 实例表明理论解与有限元模型结果吻合良好, 验证了柔轮中性层伸缩变形计算方法的正确性。获得的双圆盘波发生器作用下柔轮中性层变形及其周向应变分布, 为后续的啮合分析、共轭齿廓设计及其侧隙计算提供了更准确的理论基础。

关键词: 谐波齿轮传动; 柔轮; 伸缩变形; 力学分析; 双圆盘波发生器

中图分类号: TH132; TG721

Neutral Line Stretch of Flexspline in Harmonic Driver

CHEN Xiaoxia¹ LIU Yusheng² XING Jingzhong¹ XU Wei¹

(1. Tianjin Key Lab of Modern Mechatronics Equipment Technology,

Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387;

2. The State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract: Under the action of wave generator, the deformation of the neutral line of flexspline is the fundamental of mesh analysis in harmonic drive. The deformation analysis is built on assumption of small deformation and inextensible of the neutral line in flexspline tooth ring. However geometric analysis of flexspline has shown that stretch deformation is produced in neutral layer of flexspline. In order to truly describe the deformation of flexspline under two-disk wave generator, a calculation method to describe the deformation and the internal forces of neutral surface of flexspline is presented based on the force equilibrium equations and continuous conditions with geometric constraints. The ring model of the neutral line of flexspline under two-disk wave generator is divided into contact segment and non-contact segment. The internal forces and deformation in the ring in contact segment are solved by geometric constraint conditions from the wave generator. The deformation and internal forces in the non-contact segment is determined with geometric and forces boundary conditions, continuous conditions and the bending differential equation between bending deformation and bending moment. Finally, stretch deformation of neutral line of flexspline is obtained with the circumferential force in tooth ring by Hook's law. A finite element model with shell element is built, and theoretical results of an example agree very well with results of the FEA model, which indicates that the theory of stretch of neutral line of flexspline is reasonable. Deformations and hoop strains of the neutral line of flexspline under two-disk wave generators provide reasonable theoretical basis for subsequent mesh analysis, conjugated tooth profile design, gap calculation and mesh status simulation.

Key words: harmonic drive; flexspline; stretch deformation; mechanical analysis; two-disk wave generator

0 前言

谐波齿轮是基于柔轮弹性变形来实现运动或

动力传动, 具有传动比大、精度高等特性^[1-2], 被广泛应用于航空航天、机器人^[3]、仪器仪表^[4]、交通运输等众多领域^[5]。柔轮变形的准确表达对提高其传动精度和传动性能具有重要意义。MUSSE^[1]提出的确定谐波齿轮传动齿形的计算模型, 只考虑了波发生器作用下柔轮中性层变形曲线的径向位移, 没有考虑中性层变形曲线的曲率变化引起柔轮轮齿

^{*} 天津市应用基础与前沿技术研究计划(14JCYBJC19200)、浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室开放课题(A1114)和国家自然科学基金(61173126)资助项目。20131129 收到初稿, 20140802 收到修改稿

对称线的转动。基于满足定传动比和使轮齿实现面接触以提高承载能力,采用直线齿形。但这种齿形不能保证柔轮和刚轮啮合时的相互共轭,无法获得最佳的啮合性能^[6]。目前应用较广的渐开线齿廓谐波齿轮^[6-9],在共轭齿廓求解中采用近似算法^[6],计算柔轮中性层变形曲线的切向位移引起的转角和齿廓对称线相对于径矢的转角,可大大简化设计计算。由于渐开线齿廓谐波齿轮的共轭啮合区位于长轴附近的很小区域内^[6],近似算法引起的偏差不大,该方法是目前渐开线谐波齿轮传动采用的计算方法^[10]。文献[11]提出了一种基于柔轮弹性变形的共轭精确算法。精确计算切向位移引起的转角和齿廓对称线相对于径矢的转角。对共轭区间和共轭齿廓的比较计算发现:近似算法对齿廓共轭区间的影响较大,对共轭齿廓形状的影响较小。DONG等^[12-13]建立谐波齿轮传动基于瞬心线的运动几何学方法,把柔轮弹性变形与运动及构件的相对运动统一表述为刚体定、动瞬心线纯滚动的运动几何学问题;用空载状态谐波齿轮的几何学传动原理,从几何学角度对谐波齿轮传动原理进行研究。上述研究中,柔轮变形的理论计算模型均基于中性层不伸长假定。但利用等分弧长算法计算得到的装配状态柔轮中性层的伸长^[14]和利用有限元方法得到的装配状态和传动状态下中性层的伸缩变形^[15]均表明:柔轮中性层存在伸缩变形。

本文根据圆环理论,将双圆盘波发生器作用下齿圈受力分为接触区和非接触区,提出基于强制几何约束条件和基于力平衡方程及连续性条件的变形求解方法。理论研究双圆盘波发生器作用下的齿圈周向力分布,计算传统圆环理论忽略不计的中性层伸缩变形,并利用有限元模型验证理论结果。

1 问题的提出

随着计算机技术的发展,数字化模型及其虚拟样机已广泛应用于产品的初期设计。为正确呈现谐波齿轮传动状态,文献[14]提出基于柔轮变形的谐波齿轮装配模型,直观显示柔轮装配后的轮齿啮合状况及齿间侧隙分布。针对公切线双圆弧齿廓谐波齿轮,在共轭齿廓求解中,根据共轭离散点,以拟合圆弧与原始齿廓不干涉为条件,利用圆弧拟合得到刚轮圆弧齿廓。但得到的柔轮齿廓相对于刚轮齿槽的运动轨迹图显示齿廓干涉(图1),其干涉部位的局部放大图如图2所示。

对变形后柔轮中性层曲线的弧长积分发现:变形后的中性层曲线的长度略大于变形前周长^[14]。为了反映柔轮变形后轮齿间的弧长伸长情况,图3所

示为1/4圆周上,柔轮变形后中性层弧长伸长量。图中横坐标为中性层上轮齿位置的极角分布, $\varphi=0^\circ$ 和 90° 分别为波发生器长轴和短轴。在1/4圆周上的累积弧长伸长 $8.7\mu\text{m}$ 。

图1 柔轮的运动轨迹图

图2 齿廓干涉区放大图

图3 1/4圆周上齿间的弧长伸长量

这说明目前指导谐波齿轮啮合分析和齿廓设计的柔轮中性层变形与预期假设相矛盾,那么柔轮中性层曲线在波发生器作用下是否存在伸长?下面以双圆盘波发生器为例,利用力学分析方法求解柔轮中性层内力和变形,研究柔轮中性层周向应变和伸缩变形。

2 齿圈变形和内力

在空载传动状态,柔轮变形由波发生器的形状决定。如图4所示是双圆盘波发生器作用下柔轮中性层变形示意图。

2.1 齿圈变形和内力计算的圆环模型

在波发生器作用下,柔轮的中性层横截面从变形前的半径为 r_m 的圆形(图4中点画线圆)变为非圆曲线(图4中径矢为 ρ 的粗实线)。

双圆盘波发生器是利用与其轴线偏心距为 e 的圆盘迫使柔轮在波发生器作用部位实现最大径向变形 u_0 。中性层任意位置 φ 处的点在变形后的径矢

$$\rho = r_m + u(\varphi) \quad (1)$$

式中 r_m ——变形前柔轮中性层曲线半径;

$u(\varphi)$ ——变形后柔轮中性层曲线上任意点的径向位移。

图4 柔轮中性层变形示意图

图4中, R 为圆盘的计算半径; e 为圆盘轴线的偏心距; γ 为柔轮对圆盘的包角。包角范围内柔轮齿圈变形后与波发生器完全贴合, 呈现等曲率弯

图5 双圆盘波发生器作用下载面内力计算简图

2.2 任意截面上的内力

双圆盘波发生器作用下圆环受力分为接触区和非接触区。在接触区内, 圆环受径向分布力 q_r 作用, 其内力计算简图如图5b所示。依据弯矩和曲率改变量的关系, 得接触区任意截面的弯矩

$$M_1(\varphi) = EI_z(1/R - 1/r_m) \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma \quad (3)$$

式中, EI_z 是圆环周向弯曲刚度。

由于接触区的曲率和弯矩均为常数, 可知接触区的 q_r 为常数, 剪力为零, 周向力为常数。

非接触区的内力计算简图如图5c所示, 依据力矩平衡关系, 可得非接触区任意截面的内力

$$\begin{aligned} M_2(\varphi) &= X_1 + X_2 r_m (1 - \sin \varphi) \\ F_{N2}(\varphi) &= X_2 \sin \varphi \\ F_{S2}(\varphi) &= X_2 \cos \varphi \\ \gamma &< \varphi \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (4)$$

在 $\varphi = \gamma$ 截面, 弯矩和周向力连续; 但由于弯矩的变化率不连续, 可知剪力不连续。由此推断, 该截面处圆环与波发生器圆盘之间存在集中力作用, 并获得该集中力的大小为 $X_2 \cos \gamma$ 。由式(4)可得接触区的周向力

$$F_{N1}(\varphi) = X_2 \sin \gamma \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma \quad (5)$$

曲变形。

利用圆环理论计算波发生器作用下的圆环内力和变形, 并基于周向力, 计算圆环中性层的周向伸缩变形。图5为双圆盘波发生器作用下载面内力计算简图, 从图4圆环对称位置截取 1/4 模型(图5a), 设 X_1 和 X_2 分别为水平截面 B 上的弯矩和周向力。根据对称性, B 截面的剪力等于零。由几何关系, 得圆盘计算半径和偏心距

$$R = R_m + s_w + s_1/2 \quad e = r_m + u_0 - R \quad (2)$$

式中 R_m ——圆盘半径;

s_w ——衬环厚度;

s_1 ——柔轮轮缘厚度。

2.3 圆环弯曲方程及其解

在双圆盘波发生器作用下, 圆环弯曲方程为

$$d^2 u / d\varphi^2 + u(\varphi) = -M(\varphi)r_m^2 / (EI_z) \quad (6)$$

将式(3)、(4)的弯矩代入方程式(6), 求解得到径向位移

$$\begin{aligned} u_1 &= C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi - r_m^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_m} \right) \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma \\ u_2 &= D_1 \sin \varphi - \frac{r_m^2}{EI_z} (X_1 + X_2 r_m) + \\ &D_2 \cos \varphi - \frac{r_m^3}{2EI_z} X_2 \varphi \cos \varphi \quad \gamma < \varphi \leq \pi/2 \end{aligned} \quad (7)$$

式中, C_1 , C_2 , D_1 和 D_2 由边界条件和连续性条件确定。

当 $\varphi = 0$ 时, $u_1(0) = u_0$, $(du_1/d\varphi)|_{\varphi=0} = 0$; 当 $\varphi = \pi/2$ 时, $(du_2/d\varphi)|_{\varphi=\pi/2} = 0$; 当 $\varphi = \gamma$ 时, 有连续条件 $u_1(\gamma) = u_2(\gamma)$, $(du_1/d\varphi)|_{\varphi=\gamma} = (du_2/d\varphi)|_{\varphi=\gamma}$, $M_1(\gamma) = M_2(\gamma)$ 。根据边界条件和连续性条件确定出

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \quad C_2 = u_0 - r_m + r_m^2/R \\ D_1 &= \frac{(2 - \cos^2 \gamma)(u_0 - r_m + r_m^2/R)}{A_1} \\ D_2 &= \frac{\pi(u_0 - r_m + r_m^2/R)}{2A_1} \end{aligned}$$

$$X_1 = \frac{EI_z}{r_m^2 A_1} \left[\sin \gamma \left(r_m (2 - \cos \gamma) \left(1 - \frac{r_m}{R} \right) - 2u_0 \right) + r_m \left(\frac{\pi}{2} - \gamma - 2 \right) \left(1 - \frac{r_m}{R} \right) - 2u_0 \right]$$

$$X_1 = \frac{2EI_z(u_0 - r_m(1 - r_m/R))}{r_m^3 A_1}$$

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma$$

柔轮在波发生器作用下, 轮齿变形后的位置和方位是根据柔轮中性层曲线的径向位移、周向位移和法线转角位移确定的。故由位移表示的变形条件是谐波齿轮运动学分析的基础。

2.4 线位移和法线转角

将 $C_1, C_2, D_1, D_2, X_1, X_2$ 代入式(7), 可得径向位移, 根据中性层曲线不伸长条件

$$v = -\int_0^\varphi u d\varphi$$

及中性层曲线法线转角定义

$$\theta = (v - du/d\varphi)/r_m$$

得到中性层曲线的径向位移、周向位移和转角

$$\begin{cases} u_1 = \frac{A_1 \cos \varphi - B_1}{A_1 - B_1} u_0 \\ v_1 = -\frac{A_1 \sin \varphi - B_1 \varphi}{A_1 - B_1} u_0 \\ \theta_1 = \frac{B_1 \varphi}{r_m (A_1 - B_1)} u_0 \end{cases} \quad 0 < \varphi \leq \gamma \quad (8)$$

$$\begin{cases} u_2 = \frac{u_0}{A_1 - B_1} [(1 + \sin^2 \gamma) \sin \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos \varphi - 2 \sin \gamma - B_1] \\ v_2 = \frac{-u_0}{A_1 - B_1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sin \varphi - (2 \sin \gamma + B_1) \varphi + 2(\cos \gamma + \gamma \sin \gamma) - (2 + \sin^2 \gamma) \cos \varphi \right] \\ \theta_2 = \frac{u_0}{r_m (A_1 - B_1)} [(2 \sin \gamma + B_1) \varphi + 2 \cos \varphi - 2(\cos \gamma + \gamma \sin \gamma)] \end{cases} \quad \gamma < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

$$A_1 = \pi/2 - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma$$

$$B_1 = 4/\pi [\cos \gamma - (\pi/2 - \gamma) \sin \gamma]$$

2.5 弯矩和弯曲应力

柔轮齿圈在波发生器作用下, 弯矩引起的弯曲

应力是柔轮疲劳强度校核的主要依据。将 X_1 和 X_2 代入式(3), 得弯矩

$$M_1(\varphi) = EI_z (1/R - 1/r_m) \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma$$

$$M_2(\varphi) = \frac{EI_z}{r_m^2 A_1} \left[2u_0 (\sin \gamma - \sin \varphi) + r_m \left(1 - \frac{r_m}{R} \right) \times \left(2 \sin \varphi - (2 - \cos \gamma) \sin \gamma + \gamma - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad \gamma < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

弯矩引起的弯曲应力

$$\sigma = \frac{Mh}{2I_z} = C_\sigma \frac{Ehu_0}{r_m^2} \quad (11)$$

式中 h ——圆环的矩形截面高度;

E ——材料弹性模量;

C_σ ——弯曲应力系数。

接触区和非接触区的弯曲应力系数

$$C_{\sigma 1} = \frac{B_1}{2(A_1 - B_1)} \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma$$

$$C_{\sigma 2} = \frac{B_1 + 2 \sin \gamma - 2 \sin \varphi}{2(A_1 - B_1)} \quad \gamma < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

双圆盘波发生器作用下, 由式(11)得不同包角弯曲应力分布(图 6)。从图 6 看出, 随包角 γ 的增大, 长轴区的弯曲应力减小, 短轴区的弯曲应力增大。

图 6 不同包角的弯曲应力

2.6 齿圈周向力

在现有的柔轮结构分析中, 基于小变形假定, 认为圆环周向力引起的周向变形很小, 忽略周向应变和伸缩。在此, 计算周向应变, 需要求解齿圈的周向力。

将 X_2 代入式(4)和式(5), 得齿圈周向力

$$F_{N1} = u_0 \frac{2EI_z}{r_m^3} \frac{1 - \frac{r_m}{u_0} \left(1 - \frac{r_m}{R} \right)}{\frac{\pi}{2} - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma} \sin \gamma \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma \quad (13)$$

$$F_{N2} = u_0 \frac{2EI_z}{r_m^3} \frac{1 - \frac{r_m}{u_0} \left(1 - \frac{r_m}{R}\right)}{\frac{\pi}{2} - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma} \sin \varphi \quad \gamma < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

2.7 包角的计算

上述内力、变形和应力计算式中, 除极角 φ 以外, r_m 是柔轮中性层半径, u_0 是谐波齿轮传动中的最大径向位移要求。这两个参数是柔轮设计时需要确定的基本参数, 它们不随波发生器类型的变化而变化。但另外两个参数 R 和 γ 则与双圆盘波发生器设计参数有关。它们相互关联, 已知其中一个, 即可确定另外一个^[2]。通常情况下, 设计时需要给定圆盘半径 R 。

柔轮在波发生器作用下主要应力是弯曲应力。为了延长柔轮的疲劳寿命, 从设计角度应尽可能降低弯曲应力。图 7 给出了长轴区弯曲应力系数 $C_{\sigma 1}(0)$ 和短轴区弯曲应力系数 $C_{\sigma 2}(\pi/2)$ 随包角 γ 的变化规律。从图 7 看出, 当长轴区的弯曲应力系数等于短轴区的弯曲应力系数时, 柔轮的弯曲应力最低。

图 7 弯曲应力系数随包角的变化趋势

依据式(12)确定出弯曲应力最低的包角满足

$$\frac{B_1 + \sin \gamma - 1}{A_1 - B_1} = 0 \quad (15)$$

由式(15)确定出最佳包角等于 20.72° 。

3 齿圈周向伸缩变形

3.1 中性层的周向应变

根据胡克定律, 齿圈周向应变

$$\varepsilon_H = \frac{F_N(\varphi)}{EA} \quad (16)$$

式中, $F_N(\varphi)$ 为齿圈周向力, EA 是齿圈的拉压刚度。

对于宽度 b , 高度 h 的矩形截面, $I_z = bh^3/12$, $I_z/A = h^2/12$ 。则齿圈周向应变

$$\varepsilon_{H1} = \frac{h^2 u_0}{6r_m^3} \frac{1 - r_m(1 - r_m/R)/u_0}{\frac{\pi}{2} - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma} \sin \gamma \quad 0 \leq \varphi \leq \gamma \quad (17)$$

$$\varepsilon_{H2} = \frac{h^2 u_0}{6r_m^3} \frac{1 - r_m(1 - r_m/R)/u_0}{\frac{\pi}{2} - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma} \sin \varphi \quad \gamma < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

3.2 中性层伸缩变形量

1/4 圆周上的周向总伸长

$$\Delta s = r_m \int_0^{\pi/2} \varepsilon_H d\varphi \quad (19)$$

将式(17)、(18)代入式(19), 得双圆盘波发生器作用下 1/4 圆周上的总伸长

$$\Delta s = \frac{h^2 u_0}{6r_m^2} \frac{1 - r_m(1 - r_m/R)/u_0}{\frac{\pi}{2} - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma} (\gamma \sin \gamma + \cos \gamma) \quad (20)$$

从式(17)、(18)看出, 周向应变与圆环的截面高度 h 、最大径向位移 u_0 、变形前柔轮中性层曲线半径 r_m 、波发生器圆盘的半径 R 及包角 γ 有关。图 8 给出包角 γ 分别等于 15° 、 20.72° 、 25° 和 30° 时, 式(17)、(18)给出的周向应变分布。图 8 中横坐标 0° 为波发生长轴位置, 该部位柔轮的径向变形达到最大值 u_0 , 90° 为波发生器短轴位置; 将式(17)、(18)的 $h^2 u_0 / 6r_m^3$ 作为纵坐标的单位。从图 8 看出, 周向应变随包角增大而增大。当包角一定时, 柔轮包角范围内的周向应变保持不变, 为最小, 在短轴区的周向应变最大。表明: 柔轮在双圆盘波发生器作用下, 长轴区的伸长小, 短轴区的伸长大。

图 8 不同包角柔轮中性层周向应变分布

4 计算实例

取柔轮中性层半径 $r_m = 80.4 \text{ mm}$, 等效圆环横截面高度 $h = 2.373 \text{ mm}$, 在圆盘半径 $R = 77.576 \text{ mm}$ 的

双圆盘波发生器作用下, 最大径向位移 $u_0=0.955$ mm。柔轮对波发生器的包角 $\gamma=15^\circ$ 。

由式(8)、(9)可得变形后柔轮轮齿在中性层上的位置和方位, 通过积分可计算出齿间弧长。为了便于和力学方法得到的柔轮中性层周向应变进行比较, 将柔轮变形后的相邻齿间弧长减去变形前的齿间弧长与变形前的原弧长的比值定义为齿圈中性层周向伸长率。该计算方法称为几何分析法, 由此得到 $1/4$ 圆周上的周向伸长率分布(图 9 实线)。从图 8 中实线看出, 整个圆周上的周向伸长率大于零, 表明柔轮中性层存在周向伸长变形; 在 $1/4$ 圆周上近似地呈正态分布, 在 40° 附近达到最大值 $137.6 \times 10^{-6} \varepsilon$ 。

利用本文力学分析方法, 依据式(16)计算获得的中性层周向应变分布如图 9 虚线所示。由于两条曲线变化幅值的差异很大, 虚线的分布特征在图 9 中不明显。图 9 虚线即为图 8 中包角 $\gamma=15^\circ$ 所对应的曲线。其分布规律显示在整个圆周上周向应变大于零, 表明中性层存在伸长变形, 但分布规律和变化幅值与几何分析方法的结果完全不同。其周向应变在长轴区 15° 的包角内最小, 随后逐渐增大, 在短轴 $\varphi=90^\circ$ 达到最大值 ($6.6 \times 10^{-6} \varepsilon$)。两种方法给出的最大值之比达 20.8 倍。

图 9 柔轮中性层周向伸长率比较

利用几何分析方法, 对图 9 的实线在 $1/4$ 圆周上积分得总伸长 $8.68 \mu\text{m}$; 由式(20)计算可得 $1/4$ 圆周上总伸长 $0.53 \mu\text{m}$ 。两者总伸长之比达 16.4。表明波发生器作用下柔轮中性层的确存在周向伸长, 但几何学方法给出的周向伸长率分布未能反映实际情况。这主要因为几何学方法中中性层曲线变形后位置是基于小变形假定给出的。当中性层的径向变形越小, 该方法给出的伸长偏差越小。下面用有限元方法模拟验证本文力学分析方法。

5 有限元验证

为了验证本文方法, 建立基于壳单元齿圈和柔

轮有限元模型。在齿圈部位, 剖分单元时指定齿圈厚度可以形成局部增厚的齿圈。由于理论分析基于圆环理论, 为了验证理论结果, 同时真实反映柔轮在双圆盘波发生器作用下中性层的周向应变分布。这里建立一种宽度为 3 mm 的窄圈有限元模型, 以验证理论结果; 另一种为柔轮整体有限元模型。采用前节算例的参数: $r_m=80.4$ mm, $h=2.373$ mm, $R=77.576$ mm, $u_0=0.955$ mm。

5.1 窄圈有限元模型

利用壳单元窄圈有限元模型, 数值计算获得中性层周向应变(图 10)。从图 10 看出, 长轴区的周向应变小, 短轴区的周向应变大。

图 10 窄圈有限元模型的周向应变

即使宽度很小的柔轮齿圈, 沿齿圈宽度的周向应变分布仍然不均匀。主要是由于泊松比的影响, 即使是窄圈模型, 只有边缘近似处于单向应力状态, 中间区域因泊松效应影响在弯曲应力方向的刚度增大, 造成中间区域的应力和应变略大于边缘。如果取材料的泊松比近似等于零, 沿齿圈宽度方向的应力和应变不均匀现象消失。

为了更清晰分析周向应变分布规律, 沿齿圈宽度方向前、中、后截面定义三条路径, 得到三条路径上的周向应变(图 11)。周向应变沿齿圈宽度方向前后对称, 故前、后截面上的周向应变一致(图 11 中的双点画线); 中间截面路径上的周向应变分布如

图 11 不同路径的周向应变及理论解比较

图 11 中的虚线所示。图 11 中结果显示, 不同路径上长轴包角范围内周向应变相同, 为最小值。在包角处有明显的转折, 表明该算例的柔轮对波发生器的包角约为 15° 。之后, 周向应变随极角增大, 在短轴处达到最大值。

周向应变沿齿圈宽度的不均匀分布不利于有限元模型结果和理论解的对比。取齿圈宽度方向的平均周向应变(图 11 中的点画线)和 $\gamma = 15^\circ$ 的理论解(图 11 中的实线)比较得出: 有限元模型结果的周向应变平均值与包角 $\gamma = 15^\circ$ 的理论结果吻合良好。表明本文提出的力学方法符合柔轮中性层的实际伸长情况。

5.2 柔轮整体有限元模型

柔轮的结构参数如图 12 所示, $L = 160 \text{ mm}$, 柔轮中性层直径 $d_1 = 160.8 \text{ mm}$, 筒体厚度 $h_1 = 1.6 \text{ mm}$, 齿圈部分厚度 $h_2 = 2.373 \text{ mm}$, 齿圈宽 $b = 25 \text{ mm}$, 开口端与齿圈间距离 $f = 8 \text{ mm}$, $d_2 = 80 \text{ mm}$, 齿顶到中性层距离 $h_3 = 2.08 \text{ mm}$, 齿数 $z = 200$, 压力角 $\alpha = 20^\circ$ 。波发生器宽度 $b_w = 15 \text{ mm}$, 作用在柔轮齿圈的中截面处, $u_0 = 0.955 \text{ mm}$ 。波发生器参数同第 4 节。

图 12 柔轮结构参数

用等厚度壳单元 Shell63 建立柔轮筒体和齿圈及轮齿, 柔轮筒体实常数 h_1 , 对齿圈部位定义实常数 h_2 。利用变厚度壳单元 Shell63 建立柔轮轮齿, 在齿顶和齿根处定义其截面尺寸。建立的柔轮整体模型在波发生器作用下的周向应变分布如图 13 所示。图中显示: 齿圈部位的周向应变较大。

图 13 整体有限元模型的周向应变

在齿圈部位从前到后等距定义五条周向路径, 其上的周向应变分布如图 14 所示。由于杯型筒体的锥度变形和轮齿的影响, 这五条路径上的周向应变分布差异很大, 长轴前端和短轴后端截面处出现负的周向应变。表明: 在双圆盘波发生器作用下, 整体模型的柔轮齿圈的不同截面上不仅存在伸长变形, 部分部位还出现压缩变形。而理论计算结果显示只有伸长变形。这是由于在波发生器作用下柔轮整体模型上的变形局部不均匀造成的。

图 14 整体模型上不同路径的周向应变分布

由于沿齿圈宽度的周向应变变化很大, 为便于和理论结果比较, 取上述五条路径上周向应变的平均值如图 15 所示。从图 15 中周向应变平均值的分布可以看出长轴区的周向应变变小, 并出现很小的压缩变形; 短轴区的周向应变变大, 同时包角处的应变转折变化不明显。最大的周向应变相比窄圈模型增大约 2.5 倍, 这是由于使整体模型产生同样最大径向位移 u_0 所需要的径向力和周向力更大, 更大的周向力引起了更大的伸长应变。

图 15 整体模型上不同路径的周向应变平均值

柔轮在双圆盘波发生器作用下实际的周向伸长变形应该为理论值的 2.5 倍左右。在本算例中, 1/4 柔轮圆周上的总伸长约为 $1.33 \mu\text{m}$ 。

故图 9 几何分析法给出的柔轮中性层周向伸长率没有真实反映柔轮中性层的伸长变形, 但这种几何分析方法是现有谐波齿轮运动学分析的基础。由

于目前谐波齿轮所采用的齿廓多为渐开线齿形,其啮合区间分布在长轴区较窄的范围内,伸长量偏差对啮合分析和共轭齿廓设计影响不大。对于啮合区间大的圆弧齿廓谐波齿轮,这种计算偏差将影响其啮合分析,从而不能正确指导共轭齿廓设计。

6 结 论

(1) 提出柔轮中性层变形求解方法,计算双圆盘波发生器作用下柔轮齿圈中性层周向应变及伸缩变形,为谐波齿轮传动的运动分析提供更准确的依据。

(2) 双圆盘波发生器作用下,柔轮齿圈在整个圆周上,中性层均有伸长,但伸长量很小。包角范围的周向应变最小,且为常数;短轴区的周向应变最大。周向应变随包角的增大而增大。

(3) 基于几何分析方法和力学分析方法给出的周向应变及伸长变形比较,指出现有谐波齿轮运动学分析的几何分析方法存在计算偏差。

参 考 文 献

- [1] MUSSER C W. Strain wave gearing: US, 2906143[P]. 1955-09-29.
- [2] 伊万诺夫. 谐波齿轮传动[M]. 沈允文, 译. 北京: 国防工业出版社, 1987.
IWANNOV H N. The harmonic drive[M]. Translated by SHEN Yunwen. Beijing: National Defense Industry Press, 1987.
- [3] KIM I M, KIM H S, SONG J B. Embedded joint torque sensor with reduced torque ripple of harmonic drive[C]// The 12th International Conference on Intelligent Autonomous Systems, IAS 2012, June 26-29, 2012, Jeju Island, Korea: Advances in Intelligent Systems and Computing, 2013, 194(2): 633-640.
- [4] CHEN Shangyue, XIN Hongbing. Speed torque measurement system design of micro harmonic drive[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 155-156: 455-458.
- [5] ROBERTS D. New frontiers for space tribology[J]. Tribology International, 1990, 23: 149-155.
- [6] 沈允文, 叶庆泰. 谐波齿轮传动的理论和设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1985.
SHEN Yunwen, YE Qingtai. Theory and design of harmonic drive[M]. Beijing: China Machine Press, 1985.
- [7] MAITI R. A novel harmonic drive with pure involute tooth gear pair[J]. ASME J. Mech. Des., 2004, 126 (1): 178-182.
- [8] KONDO K, TAKADA J. Study on tooth profiles of the harmonic drive[J]. ASME J. Mech. Des., 1990, 112(3): 131-139.
- [9] OGUZ K, FEHMI E. Shape optimization of tooth profile of a flexspline for a harmonic drive by finite element modeling[J]. Mater. Des., 2007, 28(2): 441-447.
- [10] 刘书海. 基于运动几何学的谐波齿轮传动齿形的研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2003.
LIU Shuhai. Research on tooth profile of harmonic driver based on the kinematic geometry[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2003.
- [11] 陈晓霞, 林树忠, 邢静忠. 谐波齿轮传动中基于柔轮装配变形的共轭精确算法[J]. 中国机械工程, 2010, 21(17): 2053-2057.
CHEN Xiaoxia, LIN Shuzhong, XING Jingzhong. Exact conjugate algorithm based on assemble deformation of flexspline in harmonic drive[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(17): 2053-2057.
- [12] DONG H, TING K L, WANG D. Kinematic fundamentals of planar harmonic drives[J]. ASME J. Mech. Des., 2011, 133: 011007.
- [13] DONG H, WANG D, TING K L. Kinematic effect of the compliant cup in harmonic drives[J]. ASME J. Mech. Des., 2011, 133: 051004.
- [14] 陈晓霞, 林树忠, 邢静忠, 等. 基于挠性构件变形的谐波齿轮装配模型研究[J]. 计算机集成制造系统, 2011, 17(2): 338-343.
CHEN Xiaoxia, LIN Shuzhong, XING Jingzhong, et al. Assemble modeling of harmonic drive based on deformation of elastic component[J]. Computer Integrated Manufacture System, 2011, 17(2): 338-343.
- [15] CHEN Xiaoxia, LIN Shuzhong, XING Jingzhong. The investigation of elongation of the neutral line in harmonic drive[C]// Institute of Electrical and Electronics Engineers. Proceedings of 2010 International Conference on Computer Design and Applications, June 25-27, 2010, Chengdu: IEEE, 2010: 4383-4386.

作者简介: 陈晓霞(通信作者), 女, 1969 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为谐波齿轮传动、数字化设计制造。

E-mail: chenxx@tjpu.edu.cn

刘玉生, 男, 1970 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为模型驱动设计、CAx 集成及虚拟样机、设计知识重用。

E-mail: yslu@cad.zju.edu.cn

邢静忠, 男, 1966 年出生, 博士, 教授。主要研究方向为工程力学, 复合材料力学性能, 有限元分析与计算。

E-mail: hsingjzh@tjpu.edu.cn

徐蔚, 女, 1977 年出生, 博士研究生, 讲师。主要研究方向为谐波齿轮传动。

E-mail: xuweihao960066@163.com