

DOI: 10.3901/JME.2023.17.097

基于二重对称剪纸的新型超材料胞元结构的设计与特性分析*

杨富富^{1,2} 林维炜¹ 杨飞雨¹ 张俊^{1,2} 姚立纲^{1,2}

(1. 福州大学机械工程及自动化学院 福州 350108;

2. 福建省制造业数字化设计工程研究中心 福州 350108)

摘要: 新型机械超材料结构通常由一些简单的单元(称之为胞元)通过三维规则阵列组合而成。得益于超常的物理特性,这些机械超材料结构往往具有轻质高强度、多稳态、优异能量吸收能力等优点,正成为众多领域的热门研究方向。为进一步丰富超材料结构种类,需探索更多优质胞元结构。折纸结构具有结构简单、便于折叠等优势,为构建超材料胞元提供了一种重要方式。利用一种具有较好对称的剪纸图案——二重对称剪纸图案,提出一种具有负泊松比特性且单自由度折展的二重对称剪纸胞元。通过分析胞元结构的几何参数对折展运动的影响,发现胞元具有一定的拉胀(即负泊松比)特性,当剪纸的设计变量 γ 趋近于0时,该胞元趋于经典的内凹蜂窝结构。相较于后者,所提出的胞元还具备单自由度折展特性,为快速搭建吸能结构提供了便利。该胞元结构利用折叠后的物理干涉产生的自锁效应,使得其处于折叠极限状态下具有负载能力。通过静态压缩试验,发现二重对称剪纸芯比内凹蜂窝结构具有更优异的负载能力,是一种优异的纸质超材料结构。该胞元的提出,为探索更多新型超材料结构提供了可能,还为之奠定了理论分析基础。

关键词: 剪纸图案; 二重对称 Bricard 6R 连杆; 负泊松比; 超材料

中图分类号: TH122

Design and Characteristic Analysis of a New Metamaterial Cell Structure Based on Twofold-sym Kiri Pattern

YANG Fufu^{1,2} LIN Weiwei¹ YANG Feiyu¹ ZHANG Jun^{1,2} YAO Ligang^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108;

2. Digital Design Center for Manufacturing of Fujian Province, Fuzhou 350108)

Abstract: Novel mechanical metamaterial structures usually consist of a number of simple cells combined by three-dimensional regular arrays. Due to their extraordinary physical properties, these mechanical metamaterial structures often have the advantages of light weight, high strength, multi-stability, excellent energy absorption capability, etc., and are becoming a research focus in many fields. In order to further enrich metamaterial structures, more high-quality cellular structures need to be explored. Origami structure has the advantages of simple structure and easy folding, which provides an important way to construct metamaterial cells. In this paper, a twofold-symmetric kirigami (Twofold-sym Kiri) pattern with good symmetry is adopted, and a cell with negative Poisson's ratio and single degree of freedom folding is proposed. By analyzing the influence of the geometric parameters of the cell structure on the folding motion, it is found that the cell has a stretching characteristic, namely negative Poisson's ratio. When the variable γ of the kirigami pattern approaches 0, the cell tends to the classical reentrant honeycomb structure. Compared to the classical reentrant honeycomb structure, the proposed cell has the advantage of single DOF which will benefit to construct large deployable energy-absorption structures quickly. With the usage of the self-locking function caused by the physical interference during folding, the cellular structure in the folding limit state has the load capacity. Through the static compression test, it is found that the

* 国家自然科学基金(51905101)和福建省自然科学基金(2019J01209)资助项目。
目。20221222 收到初稿, 20230312 收到修改稿

Twofold-sym Kiri structure has better load capacity than the reentrant honeycomb structure, which is an excellent origami metamaterial structure. The proposed cell provides the possibility for exploring more new metamaterial structures and lays the theoretical analysis foundation for it.

Key words: kirigami pattern; twofold-symmetric Bricard 6R linkage; negative Poisson's ratio; metamaterial structure

0 前言

机械超材料是一类由内部结构而非成分决定其机械性能的新型人造材料,依据现有的物理学规律,通过对结构上的设计,为新型材料赋予超常的物理性能。典型的机械超材料包括:能够在不同频率范围内表现类似固体和流体物理性质的波动超材料^[1]; PLA 单元空腔和特异电磁特性蒸馏水复合组成的吸波超材料^[2];通过调节通孔的共振频率拓宽吸声带宽的吸声超材料^[3];同时具备负热膨胀和负泊松比特性的双负超材料^[4-5];设计材料内部几何拓扑获得轻质高强的结构超材料^[6-8]。我国早在“十三五”国家科技创新规划时,就已将超材料列入发展规划当中^[9]。超材料的发展,意在发掘结构材料新功能、提高材料综合性能、突破稀缺资源瓶颈,将新材料带入信息技术、人工智能、国防工业等领域,引发重大变革,获得国际竞争优势。

结构超材料具有零准刚度^[10]、双稳态^[11-13]、可编程性^[14-16]等自然界少有的物理性能,具有广泛的工程应用潜力。通过几何拓扑和材料选型所构建的结构超材料主要基于两种结构类型:模块化拓扑结构^[15]和折纸结构^[12, 17]。模块化拓扑结构是通过特化单元特性,阵列组合单元结构,各个单元之间保持相对独立,使模块化结构超材料具有可编程性。折纸结构基于平面折纸图案设计而成,通过平铺、堆叠的方式使折纸超材料的单元之间保持一致特性。相较于前者,折纸超材料结构更加简单、易制造,更便于工程实际应用。折纸结构具有良好的拉胀特性,其中以 Miura-ori 图案最为经典,通过堆叠单层 Miura 图案构建的折纸超材料具有负泊松比特性^[18]。折叠能够为折纸超材料带来丰富的变形模式,可实现非线性本构^[19]和多稳态^[20]等特点。其中,多稳态的特性能够通过将具备多种构型的变胞机构应用到折纸结构中来实现^[21-22]。当折纸超材料满足自锁条件时,结构将进入弹性变形阶段,诱发刚度跳跃特性^[23]。堆叠而成的折纸超材料在压溃过程中表现出多级刚度, WEN 等^[24]提出的 ZBSO(zigzag-base stacked-origami)超材料通过改变微观结构和堆叠方

式定制多级刚度,是一种良好的可编程能量吸收结构。设计具有轻质高强度、多稳态、优异能量吸收能力的结构,是折纸超材料热门研究方向之一。折纸超材料的设计基石是折纸图案,而折纸图案在机构学中是一类杆长为 0 的空间过约束机构,并通过平铺构成 Network 结构^[25]。通过空间机构分析,不仅能够拓宽折纸超材料种类,还能为后续利用机构学分析超材料胞元间运动传递的衰减变化^[26]提供结构模型。

本文分析基于二重对称 Bricard 6R 连杆构建的二重对称剪纸图案^[25],结合该剪纸图案在两种排布方式下的折展特点,设计一种新的单自由度平铺图案,并通过堆叠平铺图案获得一种形似内凹蜂窝结构的双稳态结构——二重对称剪纸芯。通过分析图案几何参数对结构折展运动的影响,深入解析了二重对称剪纸芯与内凹蜂窝结构的关联性。二重对称剪纸芯具有折叠自锁特性,构成一种稳定的三维构型;折展过程中还存在正负泊松比转化的特性。通过实验分析比对二重对称剪纸芯与内凹蜂窝结构的力学性能,进一步验证二重对称剪纸芯具有作为折纸超材料的潜力。

1 二重对称剪纸芯的构建

1.1 二重对称剪纸图案分析

在早期的研究中,提出了一类基于空间过约束机构——二重对称 Bricard 6R 连杆的剪纸图案^[25]。利用机构学的分析方法,可在过约束 6R 机构之间引入球面 4R 机构进行拼接,构成一类具有单自由度折展特点的平铺图案,称之为二重对称剪纸图案。在研究过程中,发现二重对称剪纸图案存在作为折纸超材料的潜力。

二重对称剪纸图案根据单元之间不同的组合方式分为两类,如图 1 所示。其中 γ 为二重对称图案中的等腰三角形顶角, ω 为六边形模块中与顶角 γ 相邻的内角,均是设计参数; φ_v 表示图案折叠过程中的运动角,是运动变量; ε 为卷曲角,是菱形的钝角连接的两条折痕构成的夹角。平行分布图案,见图 1a,镂空菱形平移排布,结构在横向上保持同

一折叠趋势，卷曲呈类曲面结构；交错分布图案单元之间错位排布(即镂空菱形交错分布)，结构在横向上保持正反交错卷曲(向纸面内卷曲为“正”，如图 1a 中图案的卷曲形式；向纸面外为“负”)，图 1b 由上至下卷曲方向为“正”、“负”、“正”，呈现波浪状。

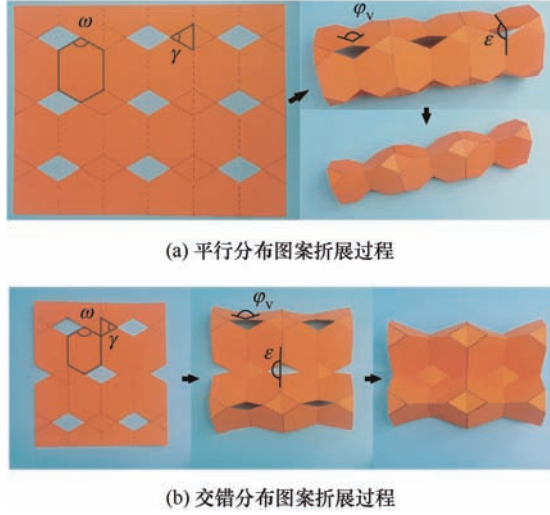


图 1 二重对称剪纸图案及其折叠状态

二重对称剪纸图案任意正负卷曲，都将使得镂空的菱形变小直至消失，卷曲角 ε 能反映图案的卷曲程度和折展的运动区间。参照文献[25]，平行分布图案和交错分布图案的卷曲角 ε 均满足同一关系式

$$\cos \varepsilon = -2 \left(1 - \frac{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \tan^2 \frac{\phi_v}{2}} \right)^2 + 1 \quad (1)$$

由公式(1)可知，与卷曲角 ε 相关的图案设计变量只有 γ ，所以当图案中的 γ 都相等，图案在折展过程中始终保持同一卷曲程度。因此，两种排布方式可混合，还可根据需要设计二重对称剪纸图案的“正”“负”卷曲方向。

1.2 二重对称剪纸芯的设计

本文提出一种混合图案的排布方式，图案卷曲时依照“正”“正”“负”“负”“正”“正”…的规律无限拓展，如图 2a 所示。图案在平面展开状态下，镂空的菱形两列为一组交错排布，其可折叠呈类三角形紧密排布的三维构型。堆叠是折纸超材料结构设计时常用的一种方法，使得折纸结构在垂直于纸面方向上无限拓展^[27]。因为二重对称剪纸图案在折展过程中，卷曲角度始终相同，所以二重对称剪纸

结构具有可堆叠的特点。为简化堆叠结构的复杂度，将所有的等腰三角形模块与六边形模块设定为同一样式，如图 2b 所示。堆叠方法：两个完全相同且具有奇数行的二重对称剪纸 1、2 沿相反方向卷曲，此时两者第 1、5、9 列的六边形保持同一折展趋势，通过重合粘连实现图案堆叠。

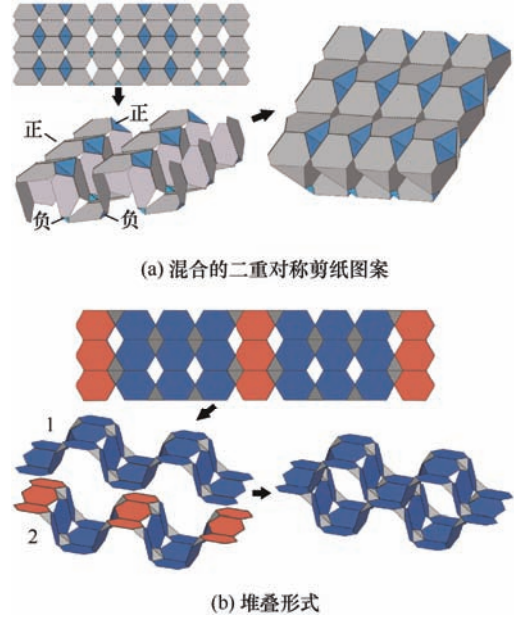


图 2 混合的二重对称剪纸图案及堆叠方法

堆叠所用的混合二重对称剪纸图案的六边形模块均全等，所以其正视图与内凹蜂窝结构^[28]相似。当内凹六边形坍塌到极限状态时，六边形转变为两个正三角形形状。若将此构型置入二重对称剪纸芯中，可得到一个由若干个三角形拼接而成的稳定结构。当二重对称剪纸图案的镂空菱形消失时，结构折展达到极限位置，此时的卷曲角达到最小值 ε_{\min} ，只与图案的几何参数有关

$$\cos \varepsilon_{\min} = -2 \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \left(\omega + \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin^2 \omega} + 1 \quad (2)$$

为搭建目标构型，令最小卷曲角 $\varepsilon_{\min}=60^\circ$ ，代入公式(2)，计算得满足此条件下的图案参数关系式

$$\gamma + \omega = \pi \quad (3)$$

即，等腰三角形模块的顶角与镂空菱形的锐角互为对顶角。特别地，当 $\gamma > 2\omega$ 时，满足折平条件^[29]，二重对称图案折展过程中将不产生物理干涉，转而折叠成新的二维平面。

通过上述的设计方案，搭建出形似蜂窝的层叠结构，称之为二重对称剪纸芯，如图 3a 所示。二重

对称剪纸芯具有以下三种特点。

(1) 二重对称剪纸芯可以在垂直于纸面方向上利用堆叠进行无限拓展；而在纸面内，混合的二重对称剪纸图案本身就具有可无限拓展的能力。所以堆叠混合二重对称剪纸图案所获得的层叠结构——二重对称剪纸芯，能够在三个维度下进行无限拓展。

(2) 从宏观的角度来看，二重对称剪纸芯可视为 n 个类六边形管紧密连接而成的结构。在二维平面结构中，当仅由正六边形构成的结构转换为内凹六边形时，该结构具有负泊松比的特性。此时将结构沿横向拉伸，其纵向同时被拉伸，反之亦然，该图案称为拉胀结构^[30]。二重对称剪纸芯在正视平面中的六边形同样能够折叠至内凹六边形状态，其基础胞元如图 3b 所示。因此，二重对称剪纸芯也是一种具有平面负泊松比的拉胀结构。

(3) 二重对称剪纸芯折叠过程中通过模块之间的物理干涉达到运动极限状态，此时卷曲角度 ε 均为 60° ，结构中的内凹六边形转换为若干个紧密相连的正三角形，并相互支承。二重对称剪纸芯具有自锁状态。

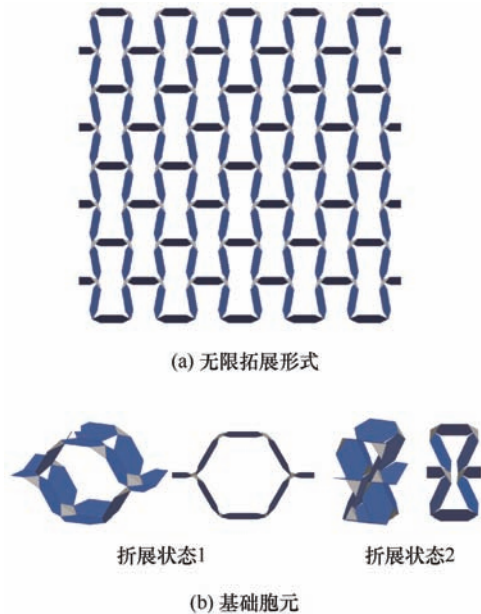


图 3 二重对称剪纸芯

2 二重对称剪纸芯胞元结构分析

二重对称剪纸芯是由多个六边形胞元拼接而成，通过分析胞元的结构特点，探究二重对称剪纸芯的物理特性。二重对称剪纸芯包含两类图形模块，分别是全等的二重对称六边形与全等的等腰三角

形。因为二重对称剪纸图案中等腰三角形的边长与顶角 γ 均可由六边形图案参数确定，所以可通过六边形的参数来分析二重对称剪纸芯的折展状态。

二重对称剪纸图案的六边形模块仍具有二重对称性，尺寸参数如图 4a 所示，它的长、宽分别为 a 、 b 。 ω 为六边形的一个内角。二重对称剪纸芯的胞元正视图，如图 4b 所示，利用几何方法，可得胞元的长、宽、高(L 、 W 、 H)之间的关系

$$L = 2b \sin \frac{\varphi_v}{2} \quad (4a)$$

$$W = 2a(1 - \cos \varepsilon) \quad (4b)$$

$$H = 2a \sin \varepsilon + b \cos \frac{\varphi_v}{2} \quad (4c)$$

$$\cos \frac{\varphi_v}{2} = \frac{\tan^2 \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(1 + \sin \frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (5a)$$

$$\sin \frac{\varphi_v}{2} = \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\left(1 + \sin \frac{\varepsilon}{2}\right)}} \quad (5b)$$

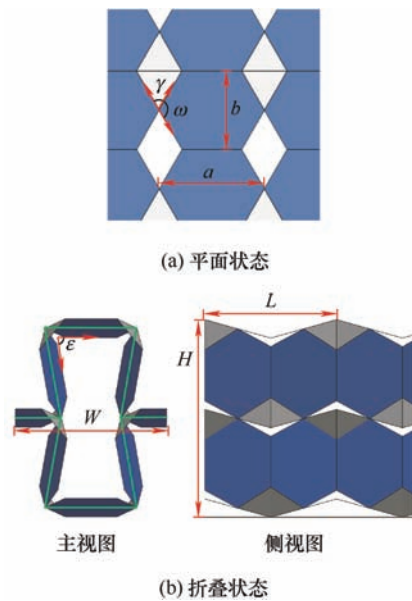


图 4 二重对称剪纸图案几何参数

根据二重对称剪纸图案特点^[31]，在折叠过程中，折展运动角 φ_v 始终在 $(0, 180^\circ)$ 范围内单调递减。所以由式(4a)可知，二重对称剪纸芯的长度 L 在折叠过程中不断缩小。二重对称剪纸芯的卷曲角 ε ，反映图案折展程度。该二重对称剪纸芯折展范围在 60° 至 180° 之间。当 $\varepsilon=60^\circ$ 时，为最小折叠状态；当

$\varepsilon=180^\circ$ 时, 为平面展开状态。折叠过程中, 卷曲角 ε 不断减小, 二重对称剪纸芯的宽度 W 也在减小。例如 $\gamma=60^\circ$ 、 $a=40\text{ mm}$ 、 $b=30\text{ mm}$, 可得二重对称剪纸芯在折展过程中的长 L 、宽 W 、高 H 变化曲线。从图 5 可直观看出, 折展过程中 L 、 W 单调变化, 而高度 H 先增大后减小, 当折展角度达到 ε_0 时, H 达到最大值。在 $(60^\circ, \varepsilon_0)$ 范围内, 三维尺寸变化趋势相同, 二重对称剪纸芯表现出负泊松比特性。

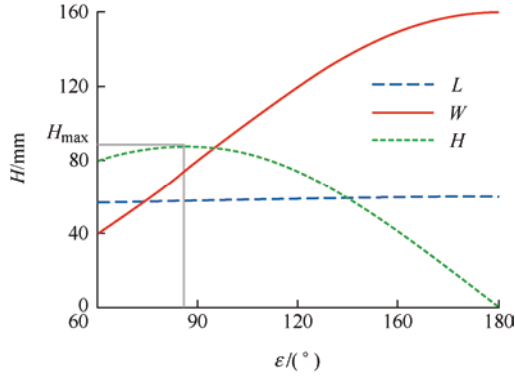


图 5 二重对称剪纸芯胞元三维尺寸关系图

六边形图案的正负泊松比转换临界点为 90° , 即当 $\varepsilon \in (0, 90^\circ)$ 时表现为负泊松比; 当 $\varepsilon \in (90^\circ, 180^\circ)$ 时表现为正泊松比。二重对称剪纸芯作为与内凹蜂窝结构相似的折纸超材料, 期望其处于负泊松比特性的范围较广, 即 $(60^\circ, \varepsilon_0)$ 的区间尽可能广, 换言之, ε_0 尽可能接近 90° 。于是, 需要了解图案参数对二重对称剪纸芯的高度 H 的影响。公式(4c)中 a 、 b 为六边形的长和宽, 根据二重对称六边形的特点, 始终有 $a > b \tan \frac{\gamma}{2}$ 。设定 $\frac{a}{b} = \tan \frac{\gamma}{2} + \xi$, 其中 $\xi > 0$ 。当 b 为单位长度时, 二重对称剪纸芯的高度函数 H_b

$$H_b = 2 \left(\tan \frac{\gamma}{2} + \xi \right) \sin \varepsilon + \sqrt{\frac{\tan^2 \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\left(1 + \sin \frac{\varepsilon}{2} \right)}} \quad (6)$$

H'_b 是 H_b 关于 ε 的一阶导数, 如式(7)所示

$$H'_b = 2 \left(\tan \frac{\gamma}{2} + \xi \right) \cos \varepsilon + \tan \frac{\gamma}{2} \left(2 \cos \varepsilon - \frac{\cos \frac{\varepsilon}{2}}{2 \left(\sin \frac{\varepsilon}{2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \sin \frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (7)$$

已知 $H_b(\varepsilon_0)$ 为极大值, 令 $H'_b=0$, 可行域范围取 $\gamma \in (0, 120^\circ)$, $\xi \in (0, 2)$, 绘制关于 ε_0 的可行解三维

图像, 如图 6 所示。从三维图形可知, ε_0 的可行解范围在 $(81^\circ, 90^\circ)$ 之间, 可行域越接近点 $(\gamma=120^\circ, \xi=0)$, 可行解 ε_0 越小, 则二重对称剪纸芯在折展过程中具有负泊松比特性的范围占比越小。当 ξ 一定, 即 a 、 b 长度固定时, ε_0 随着 γ 减小而增大, 且 γ 趋近 0 时, ε_0 也趋近 90° 。由此推断, 内凹等边六边形是二重对称剪纸芯的极限状态。但当 $\gamma=0$ 时, 二重对称剪纸芯中的二重对称 Bricard 机构消失, 则图形不再具有单自由度特性, 即内凹六边形图案折展呈现多自由度。当 γ 一定时, ε_0 随着 ξ 增大而增大, 即六边形模块的长宽比 $\frac{a}{b}$ 越大, a 对高度函数 H 的影响越大。

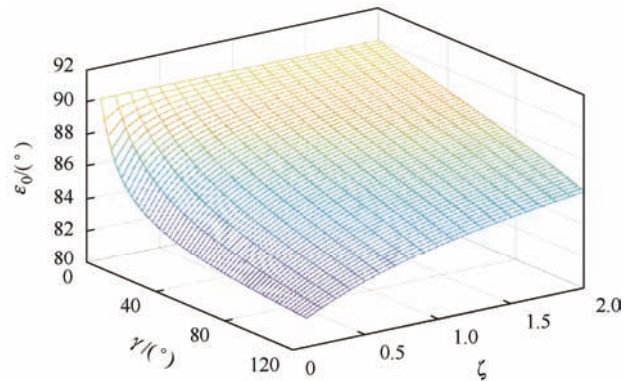


图 6 临界点 ε_0 的可行解

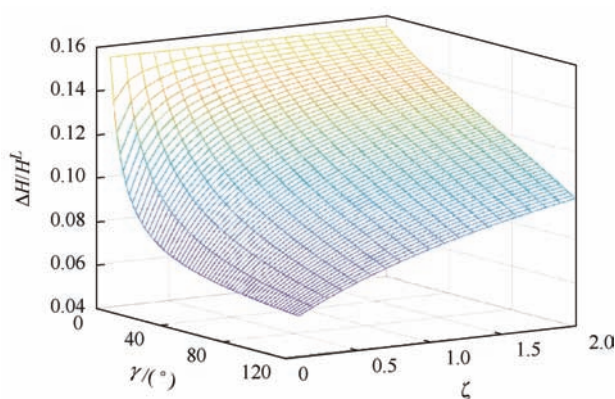
选取同样的可行域范围, 可以分析二重对称剪纸芯在负泊松比阶段中, 高度变化 ΔH 与自锁状态高度 H^L 的比值, 它反映出二重对称剪纸芯的拉胀能力, 比值越大越拉胀效果越优异。其中

$$\Delta H = H_b(\varepsilon_0) - H_b^L \quad (8)$$

$$H_b^L = \sqrt{3}\xi + \frac{4\sqrt{3}}{3} \tan \frac{\gamma}{2} \quad (9)$$

$\Delta H/H^L$ 可行解范围如图 7 所示, 其变化趋势与 ε_0 相同。所以可以得出结论, 当 γ 越小, ξ 越大时, 二重对称剪纸芯的拉胀能力表现越优异。

综上所述, 二重对称剪纸芯的卷曲角处于 $(0, \varepsilon_0)$ 范围内时具有负泊松比特点, 卷曲角 ε_0 是其正负泊松比转换的临界点。当图案参数中的 γ 越小, ξ 越大时, ε_0 不断趋近于 90° , 高度变换比值 $\Delta H/H^L$ 也越大, 拉胀性能表现越优异。当 $\gamma=0$ 时, 二重对称剪纸芯将转换为内凹蜂窝结构, 但此时不再具备单自由度折展的特性。内凹蜂窝结构是二重对称剪纸芯的一种极限存在方式。

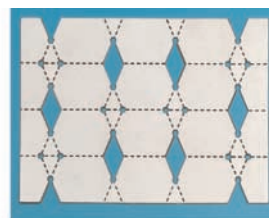
图 7 高度变换比 $\Delta H/H^L$ 可行解

3 静态压缩试验

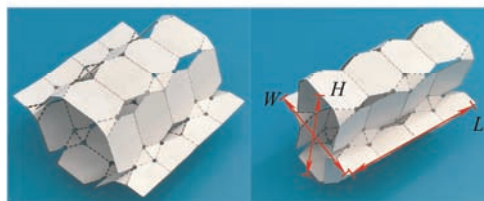
3.1 纸模型压缩试验

二重对称剪纸芯可单自由度折展, 折叠极限状态形成结构具有自锁的特点, 能够作为一种可快速搭建的夹心层结构。当二重对称剪纸芯处于自锁状态, 即 $\varepsilon=60^\circ$ 时, 每个模块之间相互支承, 形成紧凑的三菱柱状结构, 此时结构强度得到提升。同时自锁状态也是二重对称剪纸芯处于负泊松比特性下的最小体积状态, 具有更大的密度。因此二重对称剪纸芯结构是一种潜在的吸能结构。为确定该自锁结构的强度特点, 制定压缩试验, 通过分析不同设计参数 γ 下的二重对称剪纸芯的基础胞元, 来反映整体结构特点。同时作为二重对称剪纸芯的极限状态, 将内凹蜂窝结构设置为对照组进行试验对比。

根据二重对称剪纸芯胞元结构分析, 已知结构在图案参数 γ 越小, 比例系数 ζ 越大时, 其拉胀性能越优异。现分析不同 γ 情况下, 对二重对称剪纸芯承载能力的影响。设定二重对称剪纸芯的设计参数 $a=40\text{ mm}$ 、 $b=30\text{ mm}$, 使得平面状态的压缩试验模型具有相同的轮廓。 γ 选取 30° 、 45° 、 60° 作为实验样品的设计参数。模型所用的材料为 400 g 白卡纸, 纸面厚度为 0.45 mm 。利用激光切割机在纸面上绘制图案, 如图 8a 所示。折痕处采用虚线切割的方式, 在保持模块与模块之间连接的同时, 具有较好的可折叠性能。由于纸板材料厚度很小, 面与面之间通过胶水粘连构成公共模块时, 可以忽略叠加厚度对图案带来的影响, 制作的模型同样保持二重对称剪纸图案的折叠特点。压缩实验样品模型如图 8b 所示, 它是由 2 个二重对称剪纸芯胞元沿 L 方向拼接而成, 这便于压缩试验时受力。



(a) 激光切割的二重对称剪纸芯图案



(b) 二重对称剪纸芯胞元折叠状态

图 8 二重对称剪纸芯胞元的白卡纸模型

极限折叠状态下, 2 个二重对称剪纸芯胞元阵列的三维尺寸为

$$L^L = \frac{4\sqrt{3}}{3}b\sqrt{3 - \tan^2 \frac{\gamma}{2}} \quad (10a)$$

$$W^L = a \quad (10b)$$

$$H^L = \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}b \tan \frac{\gamma}{2} \quad (10c)$$

试验模型尺寸如表 1 所示。

表 1 试验模型尺寸

类别	长 L^L/mm	宽 W^L/mm	高 H^L/mm
内凹蜂窝结构	120	40	69.28
二重对称剪纸芯 $\gamma=30^\circ$	118.56	40	73.92
二重对称剪纸芯 $\gamma=45^\circ$	116.52	40	76.46
二重对称剪纸芯 $\gamma=60^\circ$	113.14	40	79.28

内凹蜂窝结构是机械超结构的热门研究对象, 许多学者对该结构进行了实验研究^[32-34]。对照组所用的内凹蜂窝结构样品采用与实验组的二重对称剪纸芯结构相同的参数, 使两者在平面展开状态下具有相同尺寸大小, 样品模型如图 9 所示。实验组的二重对称剪纸芯胞元 $\gamma=30^\circ$ 、 45° 、 60° , 其质量分别为 13.71 g 、 13.32 g 、 12.86 g ; 对照组的内凹蜂窝结构胞元质量为 14.81 g 。

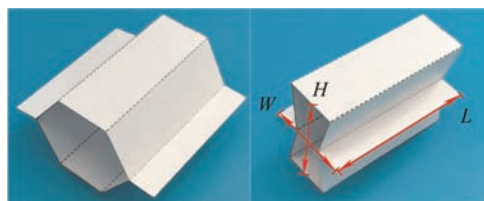


图 9 内凹蜂窝结构的白卡纸模型

3.2 压缩载荷-位移曲线

二重对称剪纸芯与内凹蜂窝结构在正视图内均具有负泊松比特性, 拉胀效果明显, 且俯视图可作为良好负载平面。所以本次静态压缩试验是在 H 方向上进行压缩。压缩试验所用的万能试验机型号为英斯特朗 5982, 负载速度为 3 mm/min, 将样品压缩至自锁结构高度 H^L 的 95%^[35]。试验过程中的压缩位移与对应的压溃力将由计算机实时记录。二重对称剪纸芯与内凹蜂窝结构的试验过程中的完整静态压缩试验见视频附件。

实验组的二重对称剪纸芯胞元静态压缩试验的压溃力-位移曲线如图 10 所示。在二重对称剪纸芯胞元的压缩试验中, 样品的结构均在压缩至高度的 67% 时失效, 进入致密阶段($\gamma=30^\circ$ 、 45° 、 60° 分别为 49.5 mm、51.2 mm、53.1 mm)。从曲线图中可直观看出, 在结构进入致密阶段前存在两个峰值。以 $\gamma=45^\circ$ 为例说明二重对称剪纸芯的压缩变化过程。压缩位移 2 mm 时, 二重对称剪纸芯胞元获得充分折叠, 模块之间相互支承, 达到自锁状态, 结构更加紧实。压缩位移 2~16 mm 之间, 结构进入屈服变形阶段, 纸面材料开始压溃, 压溃力逐渐变大, 至 16 mm 时达到第一个峰值。该阶段中, 主要变形是二重对称剪纸芯胞元上下接触面中凸起的山折痕, 同时因为纸面变形, 胞元结构压缩变形成上下两个三棱柱相互支撑的结构。压缩位移在 16~35 mm 之间, 压溃力逐渐下降, 该阶段被压缩变形的是上三棱柱; 随着进一步压缩, 压溃力进一步上升, 至 44 mm 时达到第二峰值, 此时下三棱柱作为该阶段的主要支撑结构。压缩至 44 mm 之后, 胞元结构最后的支撑结构开始被压溃直至致密阶段。

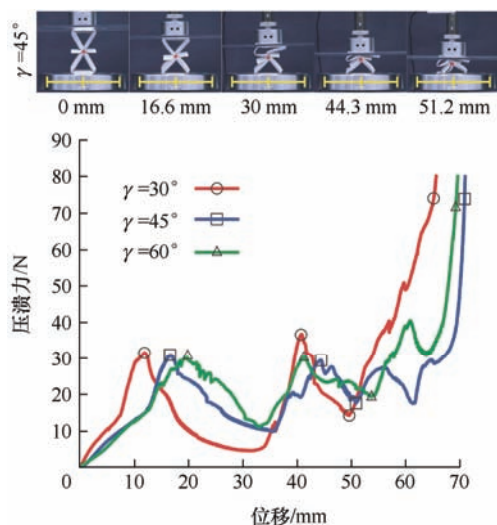


图 10 二重对称剪纸芯的压溃力-位移曲线

实验组中, 二重对称剪纸芯抵达第二峰值时,

模型结构出现不同程度的压溃情况, 故不做比较。着重分析初始压溃值(第一峰值点)的情况。三种不同设计参数 γ 所表现的初始压溃值存在明显差异。 $\gamma=30^\circ$ 、 45° 、 60° 时, 模型初始压溃值出现的位置分别为压缩模型高度的 15.82%、21.60%、24.69%, 随 γ 的增大而滞后; 初始压溃值分别为 31.22 N、30.61 N、29.75 N, 随 γ 的增大而减小。从结构上分析, 越大 γ 的模型, 其支承面的折痕处隆起的高度越高, 然而此“山峰”更容易被压溃至扁平, 使得曲线第一次峰值的出现滞后。

相较于实验组, 在对照组两次试验中, 内凹蜂窝结构的压缩变形中间过程中不存在第二个峰值, 如图 11 所示。压缩位移 1 mm 时, 内凹蜂窝结构中部的两侧面产生物理干涉, 左右纸面相互支承, 可以清晰地看到对照组中胞元结构上下两个相互支承的三棱柱。随后压溃力迅速上升, 在压缩位移 2 mm 处形成峰值, 产生屈服变形。对照组的两次压缩试验, 内凹蜂窝结构的初始压溃值相当, 但试验一在初始压溃值出现后的 1.6 mm 位置出现了较低的二次峰值。从图 11 的试验一实物图可以看出, 当试验一的模型压缩至第一峰值时, 下三棱柱的侧面首先被压弯; 至第二峰值时, 上三棱柱的侧面才被压弯。试验二并未出现此现象, 这是由于模型上下结构的材料误差导致的。在随后的压缩中, 右侧纸面的弯曲变形为主要变形, 整体结构不再出现明显的支承结构。试验一的模型压缩至结构高度的 67% (46.4 mm) 时, 压溃力出现轻微上升, 但该时刻后结构进入致密阶段。而试验二的模型压缩至高度的 67% 后曲线迅速攀升, 抵达试验仪器量程最大值。

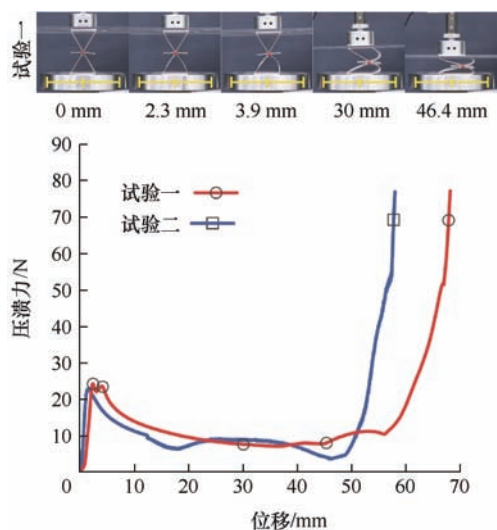


图 11 内凹六边形的压溃力-位移曲线

实验组与对照组的压溃力-位移曲线对比表明,在压缩变形过程中实验组的二重对称剪纸芯胞元较对照组的内凹蜂窝结构,具有更多段支承结构,这得益于二重对称剪纸芯中的折痕图案。折痕图案将纸面分割成多个模块,在承载过程中不仅使二重对称剪纸芯模块之间有规律地排布,相互支撑,还使分割的小模块在纸面变形阶段相较于对照的长条形纸面具有更好的抗变形能力。同时,由于二重对称剪纸图案的单自由度运动与自锁特性,当上三棱柱首先被压溃时,下棱柱仍然依靠自锁特性,保持较好的承载构型。二重对称剪纸芯的自锁点(图 10 中红点)在压缩试验过程中未出现明显左右滑移,而内凹蜂窝结构的自锁点(图 11 中红点)向右滑移,所以二重对称剪纸芯的承载结构更稳定。综上分析,二重对称剪纸芯结构是具有刚度跳跃特性且结构稳定的吸能结构。

3.3 吸能指标对比

使用三个吸能指标来直观地量化评价二重对称剪纸芯与内凹蜂窝结构的吸能特性:吸收能量、质量比吸能、压溃效率^[36]。

吸收能量(EA)是压缩试验中常用的指标,它表示结构压缩变形到某移位置时的能量吸收量。

$$EA = \int_0^{\delta} F(\delta) d\delta \quad (11)$$

式中, δ 表示瞬时压溃位移; $F(\delta)$ 表示对应的压溃力。吸收能量能够直观评价结构能量吸收的强弱,但在评价不同结构之间吸能强度的优劣时,应该考虑质量对结构的影响,所以质量比吸能(SEA_m)也是一个重要的评价指标。

$$SEA_m = \frac{\int_0^{\delta} F(\delta) d\delta}{m} \quad (12)$$

式中, m 表示所试验结构的质量。

压溃效率($\bar{\eta}$)是平均压溃值($\bar{F} = EA/\delta$)与初始最大压溃值 F_{\max} 的比值,它能直接反应两者之间差距,值越大,表明结构吸能效果越好。

$$\bar{\eta} = \frac{\int_0^{\delta} F(\delta) d\delta}{F_{\max} \delta} \quad (13)$$

压缩试验中二重对称剪纸芯和内凹蜂窝结构均在高度的 67% 左右进入致密阶段,因此量化两者能量吸收能力的压缩范围均选择在 0~67% 之间。由于

试验样品的高度存在差异,所以将各组的能量吸收 EA 相对于二重对称剪纸芯 $\gamma=60^\circ$ 的高度比例进行换算。试验结构的能量吸收指标见表 2。

表 2 试验结构能量吸收指标

类别	能量吸收 $EA/(10^{-3} \cdot J)$	质量 m/g	质量比吸能 $SEA_m/(10^{-3} \cdot J/g)$
内凹蜂窝结构一 (46.42 mm)	540.56	14.81	36.50
内凹蜂窝结构二 (46.42 mm)	532.82	14.81	35.98
二重对称剪纸芯 $\gamma=30^\circ(49.53 \text{ mm})$	775.60	13.71	56.57
二重对称剪纸芯 $\gamma=45^\circ(51.23 \text{ mm})$	886.60	13.32	66.56
二重对称剪纸芯 $\gamma=60^\circ(53.12 \text{ mm})$	983.20	12.86	76.45
类别	平均压溃值 \bar{F}/N	初始压溃值 F_{\max}	压溃效率 $\bar{\eta}(\%)$
内凹蜂窝结构一 (46.42 mm)	11.64	23.95	48.62
内凹蜂窝结构二 (46.42 mm)	11.48	23.57	48.70
二重对称剪纸芯 $\gamma=30^\circ(49.53 \text{ mm})$	15.66	31.22	50.16
二重对称剪纸芯 $\gamma=45^\circ(51.23 \text{ mm})$	17.31	30.61	56.54
二重对称剪纸芯 $\gamma=60^\circ(53.12 \text{ mm})$	18.51	29.75	62.22

从表 2 可知,二重对称剪纸芯比内凹蜂窝结构具有高的能量吸收能力,且单位质量的比吸能和压溃效率亦略高。这是因为内凹蜂窝结构单一,压缩破坏的模块仅有一条弯痕;二重对称剪纸芯的多个模块相互错位支承,压缩产生的弯痕复杂且无规则,所以压缩二重对称剪纸芯需要吸收更多的能量,表现出更为优异的负载能力。同时值得注意的是,二重对称剪纸芯的初始压溃值出现的位置比内凹蜂窝结构晚了许多。

由图 10 的压溃力-位移曲线可知,在二重对称剪纸芯的实验组中, γ 越大,初始压溃值表现越小。但在能量吸收能力、质量比吸能、平均压溃值、压溃效率这四个能量吸收指标中, γ 越大,表现越优异。 γ 越大的模型,模块与水平压面形成的二面角越趋向垂直,压缩过程中模块受到更多的切向力,所以吸收的能量更多,承载能力更好。

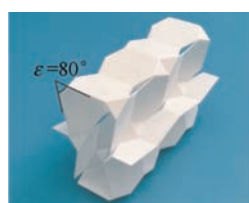
总得来说,二重对称剪纸芯比内凹蜂窝结构具有更优异的能量吸收能力, γ 越大,结构负载能力

表现越优异, 且二重对称剪纸芯压缩过程中的自锁点更加稳定。在压溃曲线上, 二重对称剪纸芯表现出刚度跳跃特性。刚度跳跃特性能够丰富超材料的动态性能, 对超材料和自适应结构的开发具有重要意义^[23]。

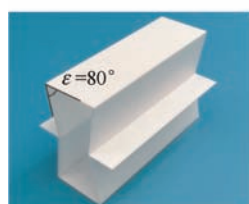
4 PLA 模型的结构分析

具有折痕图案的薄壁管结构, 在冲击试验中具有引导结构变形趋势的作用^[37-38]。利用增材制造技术制造的内凹蜂窝结构的中部连接节点由三块矩形板拼接而成。此节点处的板块在压缩试验过程中不易达到预期的弯曲效果^[33]。与内凹蜂窝结构相似的二重对称剪纸芯结构内部包含折痕图案, 或许在压缩变形中具有更加积极的影响。于是利用增材制造技术制造二重对称剪纸芯与内凹蜂窝结构进行压缩试验。

在此压缩试验中, 探究结构在压缩过程中折痕图案对试验结果的影响, 所以制造模型的初始卷曲角 ε 设定为 80° , 压缩试验至 $\varepsilon=60^\circ$, 即结构两侧在中部相接触。二重对称剪纸芯($\gamma=45^\circ$)与内凹蜂窝结构的板厚均为 1 mm, 3D 打印材料选用 PLA, 样品模型如图 12 所示。



(a) 二重对称剪纸芯模型



(b) 内凹蜂窝结构模型

图 12 3D 打印试验样品模型

3D 打印结构的静态压缩试验所用仪器英思特朗 1185, 负载速度为 3 mm/min, 完整静态压缩试验见视频附件。如图 13 所示, 从压缩试验结果可知, 二重对称剪纸芯在压缩至 8.2 mm 时, 两侧模块出现物理干涉, 达到自锁状态; 继续压缩, 压溃力显著提高。内凹蜂窝结构在压缩至 9.5 mm 时, 两侧模块

才相互接触; 此后继续压缩, 压溃力同样显著提升。在压缩过程中, 二重对称剪纸芯从压缩位移 0 至 8.2 mm, 所需的能量为 $56.34 \times 10^{-3} \text{ J}$; 而内凹蜂窝结构压缩至 9.5 mm 所需的能量为 $172.18 \times 10^{-3} \text{ J}$, 是前者的 3 倍左右。从实验图中可以发现两者压缩吸收能量差异巨大的原因。观察 9.5 mm 时刻的内凹蜂窝结构, 可明显看到两侧长方形模块均出现较大弯曲变形, 二重对称剪纸芯在自锁状态未出现明显的模块弯曲变形。所以在压缩过程中, 相较于二重对称剪纸芯在折痕处的弯曲变形, 内凹蜂窝结构的大部分能量被消耗在模块变形之中。

综上分析, 二重对称剪纸芯的折痕图案能够很好地引导结构变形趋势, 比内凹六边形更容易达到自锁状态, 并且更好地保持了模块的完整。多个内凹蜂窝结构构成的大尺寸承载结构因为模块变形会导致整体结构失稳变形^[34], 二重对称剪纸芯以其单自由度运动和需要较少的变形能量的特点, 能够克服结构失稳这一缺陷, 在轻质高强的机械超材料领域中具有良好的潜力。

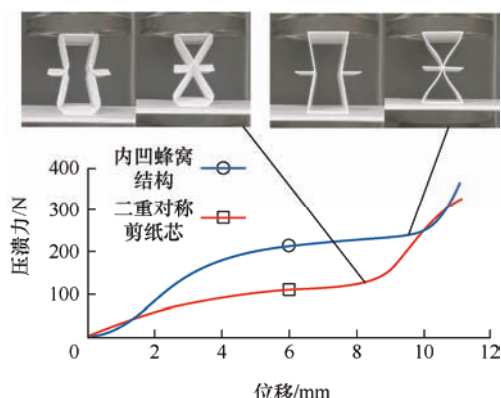


图 13 3D 打印试验样品的压溃力-位移曲线

5 结论

(1) 利用二重对称剪纸的平行分布图案与交错分布图案, 提出了一种机械超材料胞元结构, 可利用堆叠形式快速搭建能够单自由度折展的夹心层结构。该结构不仅具有单自由度折展和结构自锁的特性, 还兼具正负两种泊松比转化的特性。在结构分析过程中发现经典的内凹蜂窝结构是它的一种极限存在方式, 即当图案参数 $\gamma=0$ 时, 二重对称剪纸芯将转变为内凹蜂窝结构。二重对称对剪纸芯比内凹蜂窝结构具有更优异的结构特性。

(2) 不同于内凹蜂窝结构的不稳定性, 二重对称剪纸芯的单自由度折展特性为结构负载过程中提供更好地支承结构。在静态压缩负载试验中二重对称剪纸芯的能量吸收能力优于内凹蜂窝结构, 且二重对称剪纸芯在压溃力-位移曲线中出现多段峰值, 有望构建出自适应结构。二重对称剪纸芯的设计参数 γ 越大, 结构的吸能性能指标表现越优异。这与二重对称剪纸芯的拉胀性能表现规律相反, 因此后续研究中将在两者特性中寻找最优的设计参数 γ 。

(3) 二重对称剪纸芯中的折痕图案, 能够引导 PLA 样品模型的压缩变形趋势, 在同等尺寸的变形中, 它变形所需的能量更低, 结构模块完整度更高。所以二重对称剪纸芯是一种具有巨大发展潜力的双稳态折纸超材料结构。

需要指出的是, 基于二重对称剪纸胞元的机械超材料结构的自锁特性与模块的厚度和刚度相关。如图 14 所示, 可通过“厚板模块”+“柔性折痕”提高自锁的可靠性, 亦可实现快速折叠, 为二重对称剪纸芯在实际工程应用中提供一种新的制作方法^[39]。

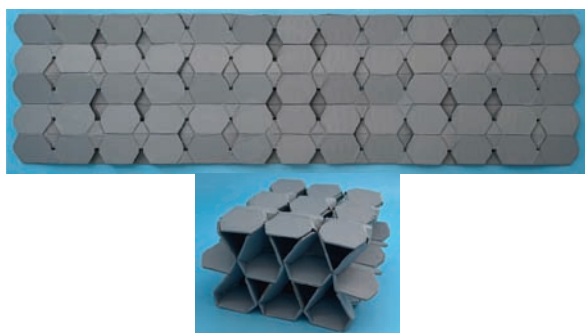


图 14 二重对称剪纸芯的厚板模型

参 考 文 献

- [1] LAI Y, WU Y, SHENG P, et al. Hybrid elastic solids[J]. *Nature Materials*, 2011, 10(8): 620-624.
- [2] 郭建勇, 梁庆宣, 江子杰, 等. 一种熔融沉积 3D 打印的高性能超材料吸波结构[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(23): 226-232.
GUO Jianyong, LIANG Qingxuan, JIANG Zijie, et al. A high-performance metamaterials absorbing structures based on fused deposition modeling[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(23): 226-232.
- [3] JIANG P T, JIANG T X, HE Q B. Origami-based adjustable sound-absorbing metamaterial[J]. *Smart Materials and Structures*, 2021, 30(5): 057002.
- [4] RAMINHOS J S, BORGES J P, VELHINHO A. Development of polymeric anepectic meshes: Auxetic metamaterials with negative thermal expansion[J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, 28(4): 045010.
- [5] AI L, GAO X L. Three-dimensional metamaterials with a negative Poisson's ratio and a non-positive coefficient of thermal expansion[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, 135: 101-113.
- [6] JIN L, KHAJEHTOURIAN R, MUELLER J, et al. Guided transition waves in multistable mechanical metamaterials[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2020, 117(5): 2319-2325.
- [7] LE D H, LIM S. Four-mode programmable metamaterial using ternary foldable origami[J]. *Acs Applied Materials & Interfaces*, 2019, 11(31): 28554-28561.
- [8] KAMRAVA S, MOUSANEZHAD D, EBRAHIMI H, et al. Origami-based cellular metamaterial with auxetic, bistable, and self-locking properties[J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 46046.
- [9] 陈焱. 基于机构运动的大变形超材料[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(19): 2-13.
CHEN Yan. Review on kinematic metamaterials[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(19): 2-13.
- [10] SADEGHI S, LI S. Fluidic origami cellular structure with asymmetric quasi-zero stiffness for low-frequency vibration isolation[J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, 28(6): 065006.
- [11] YASUDA H, YANG J. Reentrant origami-based metamaterials with negative Poisson's ratio and bistability[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(18): 185502.
- [12] YASUDA H, GOPALARETHINAM B, KUNIMINE T, et al. Origami-based cellular structures with in situ transition between collapsible and load-bearing configurations[J]. *Advanced Engineering Materials*, 2019, 21(12): 1.
- [13] FANG H B, LI S Y, JI H M, et al. Dynamics of a bistable Miura-origami structure[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(5): 052211.

- [14] TAN X J, CHEN S, WANG B, et al. Real-time tunable negative stiffness mechanical metamaterial[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2020, 41: 100990.
- [15] CHEN T, PAULY M, REIS P M. A reprogrammable mechanical metamaterial with stable memory[J]. *Nature*, 2021, 589(7842): 386-390.
- [16] ZHANG H, WU J, FANG D N, et al. Hierarchical mechanical metamaterials built with scalable tristable elements for ternary logic operation and amplitude modulation[J]. *Science Advances*, 2021, 7(9): eabf1966.
- [17] LV C, KRISHNARAJU D, KONJEVOD G, et al. Origami based mechanical metamaterials[J]. *Scientific Reports*, 2014, 4: 5979.
- [18] SCHENK M, GUEST S D. Geometry of Miura-folded metamaterials[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2013, 110(9): 3276-3281.
- [19] LIU K, PAULINO G H. Nonlinear mechanics of non-rigid origami : An efficient computational approach[J]. *Proceedings of the Royal Society a-Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2017, 473(2206): 20170348.
- [20] LIU Z L, FANG H B, XU J, et al. A novel origami mechanical metamaterial based on Miura-variant designs: Exceptional multistability and shape reconfigurability[J]. *Smart Materials and Structures*, 2021, 30(8): 085029.
- [21] WANG R Q, SONG Y Q, DAI J S. Reconfigurability of the origami-inspired integrated 8R kinematotropic metamorphic mechanism and its evolved 6R and 4R mechanisms[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 161:104245.
- [22] JIA G, HUANG H, GUO H, et al. Design of transformable hinged ori-block dissected from cylinders and cones[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2021, 143(9):1-22.
- [23] FANG H B, CHU S C A, XIA Y T, et al. Programmable self-locking origami mechanical metamaterials[J]. *Advanced Materials*, 2018, 30(15): 1706311.
- [24] WEN G L, CHEN G X, LONG K, et al. Stacked-origami mechanical metamaterial with tailored multistage stiffness[J]. *Materials & Design*, 2021, 212: 110203.
- [25] LIN W W, YANG F F, ZHANG J. A twofold-symmetric kirigami pattern and its mobile tessellations[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 174: 104916.
- [26] HOWELL L L. *Handbook of compliant mechanisms*[M]. Hoboken: Wiley, 2013.
- [27] 方虹斌, 吴海平, 刘作林, 等. 折纸结构和折纸超材料动力学研究进展[J]. *力学学报*, 2022, 54(1): 1-38.
- FANG Hongbin, WU Haiping, LIU Zuolin, et al. Advances in the dynamics of origami structures and origami metamaterials[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(1): 1-38.
- [28] KOLKEN H M A, ZADPOOR A A. Auxetic mechanical metamaterials[J]. *RSC Advances*, 2017, 7(9): 5111-5129.
- [29] LIN W W, CHEN K J, GAO Y, et al. A toy-inspired kirigami pattern and its kinematic performance by applying mechanisms and machine theory[J]. *Mechanical Sciences*, 2021, 12(2): 933-943.
- [30] 于靖军, 谢岩, 裴旭. 负泊松比超材料研究进展[J]. *机械工程学报*, 2018, 54(13): 1-14.
- YU Jingjun, XIE Yan, PEI Xu. State-of-art of metamaterials with negative Poisson's ratio[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 54(13): 1-14.
- [31] LIN W, YANG F, ZHANG J. Kirigami tessellation based on the two-fold symmetric Bricard 6R linkage and spherical 4R linkage[C]// *ASIAN MMS 2021. Advances in Asian Mechanism and Machine Science*, 2021: 60-68.
- [32] YANG S, QI C, WANG D, et al. A comparative study of ballistic resistance of sandwich panels with aluminum foam and auxetic honeycomb cores[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2013, 15: 589216.
- [33] ZHANG J J, LU G X, WANG Z H, et al. Large deformation of an auxetic structure in tension : Experiments and finite element analysis[J]. *Composite Structures*, 2018, 184: 92-101.
- [34] BODAGHI M, SERJOUEI A, ZOLFAGHARIAN A, et al. Reversible energy absorbing meta-sandwiches by FDM 4D printing[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 173: 105451.
- [35] ZHOU C H, WANG B, MA J Y, et al. Dynamic axial crushing of origami crash boxes[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, 118: 1-12.
- [36] YANG K J, QIAO C, XIONG F, et al. Theoretical investigation on the energy absorption of ellipse-shaped self-locked tubes[J]. *Science China-Physics Mechanics & Astronomy*, 2020, 63(9): 294611.

- [37] SONG J, CHEN Y, LU G X. Axial crushing of thin-walled structures with origami patterns[J]. *Thin-Walled Structures*, 2012, 54: 65-71.
- [38] 宋毅帆, 杨楠. 由折痕构建的扭转-吸能结构的形变与力学行为研究[J]. *机械工程学报*, 2022, 58(17): 125-134.
SONG Yifan, YANG Nan. Deformation and mechanical behavior of torsional energy absorbing structures constructed by folding creases[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(17): 125-134.
- [39] 杨富富, 林维炜, 陈昆精, 等. 可快速搭建的三明治板可动夹心层结构及其扩展方法: 中国, CN113445666B[P]. 2022-04-12.
YANG Fufu, LIN Weiwei, CHEN Kunjing, et al. A movable sandwich layer structure for quick construction and its extension method: China CN113445666B[P]. 2022-04-12.
-
- 作者简介:** 杨富富(通信作者), 男, 1985 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机构与机器人学、可展结构。
E-mail: yangfufu@fzu.edu.cn
林维炜, 男, 1997 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为折纸可展结构。
E-mail: 200227102@fzu.edu.cn
杨飞雨, 男, 1999 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为机械超材料。
E-mail: 210227155@fzu.edu.cn
张俊, 男, 1981 年生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构与机器人学。
E-mail: zhang_jun@fzu.edu.cn
姚立纲, 男, 1964 年生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机器人机构及机械传动学、康复机器人、现代设计方法、复杂曲面建模及精确制造。
E-mail: ylgao@fzu.edu.cn