

DOI: 10.3901/JME.2023.14.352

面向离散化临界状态空间的重要抽样法^{*}

周金宇¹ 王志凌¹ 程锦翔¹ 韩文钦²

(1. 金陵科技学院机电工程学院 南京 211169;

2. 江苏理工学院材料工程学院 常州 213001)

摘要: 对于呈现非正态、小概率、非线性特征的功能函数, 传统的结构失效概率计算方法难以以较低成本获得满意精度。为克服现有方法的不足, 将通用生成函数与重要抽样原理有机结合, 提出面向离散化临界状态空间的 UGF-重要抽样法。对随机变量进行低密度离散化, 通过复合运算获得结构通用生成函数, 由此将随机空间划分为失效域、临界域和可靠域。失效域失效概率由结构通用生成函数直接获得, 而临界域失效概率主要借助针对域内热点焦元的重要抽样法求取, 两区域失效概率之和即为结构失效概率估计值。数值算例验证了所提方法的合理性和可行性。新方法既能发挥通用生成函数对任意分布随机变量和非线性功能函数的普适性, 又借助重要抽样技术避免了组合爆炸, 从而为涉及复杂功能函数的结构可靠性快速、精确计算开辟可行途径。

关键词: 结构可靠性; 通用生成函数; 离散化; 临界焦元; 重要抽样

中图分类号: TH122; TB114

Importance Sampling Method for Discrete Critical State Space

ZHOU Jinyu¹ WANG Zhiling¹ CHENG Jinxiang¹ HAN Wenqin²

(1. School of Electromechanical Engineering, Jinling Institute of Technology, Nanjing 211169;

2. School of Material Engineering, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001)

Abstract: For performance functions with characteristics of non-normality, small failure probability and nonlinearity, it is difficult to obtain satisfactory accuracy of structural failure probability at low overhead by using traditional methods. For the structural reliability problem with consideration of complex performance functions, the UGF-importance sampling method focusing on the discrete critical state space is proposed by organically combining the universal generating function with the importance sampling. The continuous random variables are discretized in low density, and the universal generating function of the structure can be obtained by means of combination operations, thus the random space is divided into failure domain, critical state domain and reliability domain. The failure probability of the failure domain is directly figured out by the universal generation function, whereas the failure probability of the critical state domain is mainly obtained by employing the important sampling for the hot focal elements. The sum of the failure probabilities of the two domains is the estimate of the structural failure probability. The numerical examples verify the rationality and feasibility of the proposed method. The new method not only gives full play to the universality of the universal generating function technique for arbitrarily distributed random variables and nonlinear performance functions, but avoids combination explosion with the help of importance sampling as well, so as to give a feasible path for the rapid and accurate calculation of structural reliability involving complex performance functions.

Key words: structural reliability; universal generating function; discretization; critical focal element; importance sampling

^{*} 国家自然科学基金(52075232, 51905242)、江苏省自然科学基金(BK20201112)和金陵科技学院科研课题(jit-rcyj-201901)资助项目。
20220112收到初稿, 20221211收到修改稿

0 前言

工程结构的载荷环境、材料特性和边界条件普遍存在不确定性。针对分析变量的随机不确定性和认知不确定性, 目前已基于概率理论、模糊理论、证据理论、可能性理论、凸模型理论发展出各类可靠性分析方法。鉴于数学模型普适性优、理论框架完备性好以及不确定性信息利用率高, 概率分析方法的应用最广泛。当前计算结构可靠度的常用概率方法包括快速概率积分(Fast probability intergration, FPI)法、点估计法^[1]、随机扩展法^[2]和 Monte Carlo(MC)法等。

FPI 法包括一次二阶矩法(FORM)、二次二阶矩法(SORM)等, 该类方法根据正态分布函数的单峰性和对称性, 利用功能函数在最可能失效点(Most probable failure point, MPP)处的泰勒展开简化积分计算。对于很难获取梯度信息的隐式功能函数, 可借助响应面、人工神经网络、Kriging 等代理模型搜索 MPP 并完成概率分析。尽管 FPI 法的工程应用最为广泛, 但当随机变量非正态性强或功能函数非线性程度高时, 其计算误差较大。与 FPI 法相比, 点估计法避开功能函数的梯度和 MPP 计算, 直接利用功能函数在某些特征点处的值近似求解低阶矩, 并借助当量正态化和函数逼近理论得到功能函数的概率密度函数, 从而完成可靠度计算。当变量分散性大、功能函数非线性程度高时, 此类方法的精度不足^[3]。随机扩展法利用随机场来描述随机载荷和力学性能参数的变异性, 分析结构响应量与输入量变异性之间的传递关系, 当变量分散性大、功能函数非线性程度高时计算误差亦不可控。MC 法简单直接, 适应性强, 但是为了获得精确稳定解需要大规模重复计算, 尤其在多变量小概率失效条件下抽样成本更高, 一般仅用于验证其他计算方法的有效性。基于 MC 原理的重要抽样、子集模拟、线抽样、方向抽样^[4-7]设法使样本落入失效域的概率增加, 从而提高抽样效率加快收敛速度, 但对于随机变量非正态性强或功能函数非线性程度高的场合存在较大误差。

机械产品设计与制造不断向精细化、节约型方向发展, 产品的功能结构日趋复杂, 人们对结构不确定性评估与分析的要求变高、难度增大^[8]。对于复杂结构, 现有可靠度分析方法通常不能适应功能函数的多变量、非正态、小概率、非线性特征, 亟待寻求合理可行的新方法。

通用生成函数(Universal generating function, UGF)是现代离散数学领域中的重要工具^[9], 它能以统一的程序方式处理形式多样的问题, 其复合算子具有普适性、归一性、递推性、可分性、互换性、可扩展性等优异特性。鉴于其强大的功能与简洁的形式, 20 世纪 80 年代以来, UGF 被引入工程领域并取得丰硕成果。LISNIANSKI 等^[10-15]在多状态系统可靠性理论研究领域中进一步推广应用 UGF, 逐渐形成了系统可靠性分析的方法体系。自从 LISNIANSKI 基于变量离散化思想提出利用 UGF 计算连续状态系统可靠性指标的界^[10], 通用生成函数法被逐步扩展到具有连续型随机变量的结构体系概率分析^[16-21], 近年来分析变量已从随机型扩展为模糊、区间等多类不确定性变量^[22-24]。然而, 尽管通用生成函数法已在多状态系统分析中得到成功应用, 但因面临组合爆炸的壁垒在连续状态的结构系统分析中应用受限, 目前未能发展成为结构可靠性分析的成熟方法。

针对具有复杂功能函数的结构可靠性问题, 为克服现有方法的不足同时保证分析精度和计算效率, 本文将 UGF 工具与重要抽样原理有机结合, 提出面向离散化临界状态空间的 UGF-重要抽样法, 既发挥 UGF 对任意分布随机变量和复杂功能函数的普适性, 又借助重要抽样技术避免组合爆炸, 从而为涉及非正态变量和非线性功能函数的结构可靠度快速、精确计算提供新思路。

1 结构可靠度计算的通用生成函数法

1.1 连续型随机变量离散化及其 UGF 表达

UGF 可将随机变量的统计信息描述为多项式, 多项式的各项指数和系数分别表示随机变量离散状态值及相应概率值。

对于结构可靠性分析中普遍存在的连续型随机变量 X , 累积分布函数及概率密度函数分别为 $F_X(x)$ 和 $f_X(x)$, 将其在定义域 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 内均匀离散为 m 个点 x_1, x_2, \dots, x_m , 可根据下式计算各离散点 x_i 对应的概率值 p_i

$$p_i = \int_{x_{\min} + (i-1)\delta}^{x_{\min} + i\delta} f_X(x) dx = F_X(x_{\min} + i\delta) - F_X(x_{\min} + (i-1)\delta) \quad (1)$$

式中, $\delta = (x_{\max} - x_{\min})/m$, 表示变量的离散步长。这样, 可根据离散数据集 $\{(x_i, p_i) | i=1, 2, \dots, m\}$ 定义连续型随机变量 X 的 UGF

$$U_X(z) = \sum_{i=1}^m p_i z^{x_i} \quad (2)$$

式中, 多项式的指数 x_i 表示随机变量的第 i 个状态值, $x_i = x_{\min} + (i-0.5)\delta$; 多项式的系数 p_i 为对应的概率, 其值由式(1)给出。

1.2 基于 UGF 的结构可靠性分析

对于涉及 n 维连续型随机向量 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的工程结构, 设 \mathbf{X} 各分量统计独立, 概率密度函数分别为 $f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \dots, f_{X_n}(x)$ 。可利用式(1)~(2)获得 \mathbf{X} 各分量的 UGF, 记为

$$U_{X_i}(z) = \sum_{j_i=1}^{m_i} p_{ij_i} z^{x_{ij_i}} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3)$$

式中, x_{ij_i} 、 p_{ij_i} 分别表示随机变量 X_i 的第 j_i 个状态值和对应的概率值, m_i 为 X_i 的离散状态数。

设结构功能函数为 $g(\mathbf{X})$, 当 $g(\mathbf{X}) > 0$ 时结构可靠, 否则失效。对 \mathbf{X} 各分量的 UGF 进行复合运算, 可获得描述总体性能分布的结构 UGF, 即

$$U_g(z) = \otimes_g (U_{X_1}(z), U_{X_2}(z), \dots, U_{X_n}(z)) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{i=1}^n p_{ij_i} \right) z^{g(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n})} \quad (4)$$

式中, $U_g(z)$ 表示对应于功能函数 $g(\mathbf{X})$ 的结构 UGF; \otimes_g 为复合算子, 可根据结构物理内涵定义各变量 UGF 之间的运算规则。定义随机变量状态组合 $(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n})$ 所对应的 n 维子空间为焦元 $B(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 。

结构 UGF 由式(4)可进一步约化、整理为

$$U_g(z) = \sum_{k=1}^M p_k z^{(X_k, g_k)} \quad (5)$$

式中, g_k 、 p_k 分别表示功能函数 $g(\mathbf{X})$ 的第 k 个状态值和相应概率值, $k=1, 2, \dots, M$, $M = \prod_{i=1}^n m_i$; 记 UGF 各项对应的焦元为 B_k , 则 \mathbf{X}_k 表示焦元 B_k 的中心点。

对 $U_g(z)$ 的概率项进行条件求和, 得结构的失效概率为

$$p_f = \psi(U_g(z)) = \sum_{k=1}^M p_k I_B(g_k) \quad (6)$$

式中, $\psi(\cdot)$ 表示条件求和算子; $I_B(\cdot)$ 为焦元失效示性函数, 当焦元功能函数值 g_k 小于 0 时取 1, 否则取 0。

可见, 基于 UGF 分析结构可靠性的实质是基于概率测度对随机变量离散状态组合焦元的条件枚举。借助 UGF 复合算子内禀的优异特性, 该方法适用于任意分布的随机变量, 以及任意形态的非线性功能函数。

2 随机变量空间的区域划分

对于连续状态的结构系统, 如果通过低密度离散化将连续型变量描述为 UGF, 由此得到的状态组合焦元过于粗糙, 不能细腻刻画失效域与可靠域之间的界限, 通常达不到预期精度; 如果采用高密度离散化, 将在多个随机变量复合运算中产生海量焦元, 针对每个焦元计算功能函数值将消耗巨大计算成本。借助同类项合并的增效技术在较多场合下无效, 因为同类项合并的依据是多变量空间中各焦元功能函数值的差异程度, 而在随机分量逐次复合过程中无法预先获知仅当所有复合运算全部完毕之后才能得出的焦元功能函数值。

克服以上困难的一个可行途径是, 针对可靠性分析对随机空间进行区域划分。如图 1 所示, 根据定义域对各随机变量进行低密度离散化, 通过各变量 UGF 的复合运算得到若干个 n 维空间焦元 $B(j_1, j_2, \dots, j_n)$, 及对应的概率值 $\prod_{i=1}^n p_{ij_i}$ 和功能函数值 $g(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n})$, 分别简化记为 B_k 、 p_k 和 g_k , $k=1, 2, \dots, M$ 。根据下式, 可将随机空间中各焦元划入互不相交的失效域 R_f 、可靠域 R_s 和临界域 R_c

$$B_k \subseteq \begin{cases} R_f & g(\mathbf{X} | \mathbf{X} \in B_k) < 0 \\ R_s & g(\mathbf{X} | \mathbf{X} \in B_k) > 0 \\ R_c & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

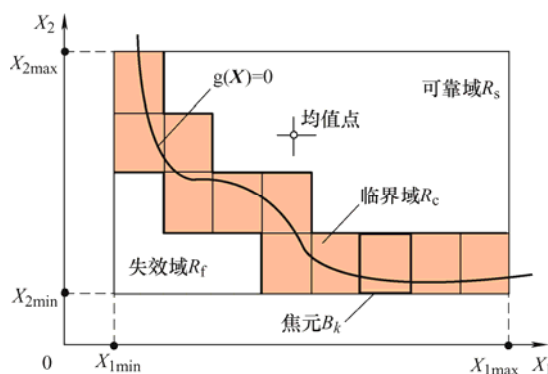


图 1 结构随机空间的区域划分(以 2 维为例)

利用式(7)划分随机空间的关键环节是各焦元的功能函数极值求解。分别求出焦元子空间中功能函数极小值 g_{kL} 和极大值 g_{kU} , 若 $g_{kL} > 0$ 则焦元 B_k 处于可靠域, 若 $g_{kU} < 0$ 则焦元 B_k 处于失效域, 若 $g_{kL} \leq 0 \leq g_{kU}$ 则焦元 B_k 处于临界域。式(6)中, 统一利用 UGF 各项指数值 g_k 近似替代各焦元功能函数极值 g_{kL} 和 g_{kU} 显然会导致较大误差。

极值求解是个典型的优化问题, 面向全体焦元集计算结构功能函数极值将消耗巨大成本。本文同时采取两条措施有效地缩减计算成本: 一是首先划分临界域再确定其他区域, 只涉及临界焦元的功能函数极值计算; 二是避开优化迭代采用简化方法计算临界焦元功能函数极值。

随机空间区域划分的主要步骤如下。

(1) 根据功能函数表达式 $g(\mathbf{X})$ 对各随机变量 UGF 实施复合运算, 得到结构 UGF, 即 $U_g(z)$ 。

(2) 对 $U_g(z)$ 各项依指数值 g_k 进行升序排列, 调整次序后得

$$U_g(z) = \sum_{k=1}^M p_{(k)} z^{(X_{(k)}, g_{(k)})} \quad (8)$$

式中, $g_{(1)}, g_{(2)}, \dots, g_{(M)}$ 依次增大, 或自左向右严格非减。选择功能函数绝对值 $|g_{(k)}| (k=1, 2, \dots, M)$ 最小项为功能函数最接近零值的 UGF 项, 记其序号为 (r) , 显然焦元 $B_{(r)}$ 可率先划入临界域。

(3) 自 $U_g(z)$ 第 (r) 项起, 依次向左逐项分析各焦元状态, 直至焦元功能函数极大值小于零停止, 将位于终止项与第 (r) 项之间的相关 k_1 个焦元划入临界域; 类似地, 自 $U_g(z)$ 第 (r) 项起依次向右逐项分析各焦元状态, 直至焦元功能函数极小值大于零停止, 将位于第 (r) 项与该终止项之间的相关 k_2 个焦元划入临界域。最终, 将 $B_{(r-k_1)}, \dots, B_{(r+k_2)}$ 共 $1+k_1+k_2$ 个临界焦元划入临界域, 而焦元 $B_{(1)}, B_{(2)}, \dots, B_{(r-k_1-1)}$ 无需计算直接划入失效域, 剩余焦元显然隶属可靠域。

关于焦元功能函数极值的计算, 可采用两种简化方法。一种方法是分别计算焦元 B_k 超立方体各顶点的功能函数值, 取其最小值为 g_{kL} , 最大值为 g_{kU} 。该方法需调用 2^n 次功能函数, 对于高维问题效率偏低; 另一种方法借鉴区间分析理论^[25], 利用功能函数梯度信息快速求解焦元功能函数极值(图 2), 仅需要较少次调用功能函数, 其基本原理简述如下。

将功能函数 $g(\mathbf{X})$ 在焦元 B_k 的中心点 \mathbf{X}_k 处进行

一阶泰勒展开

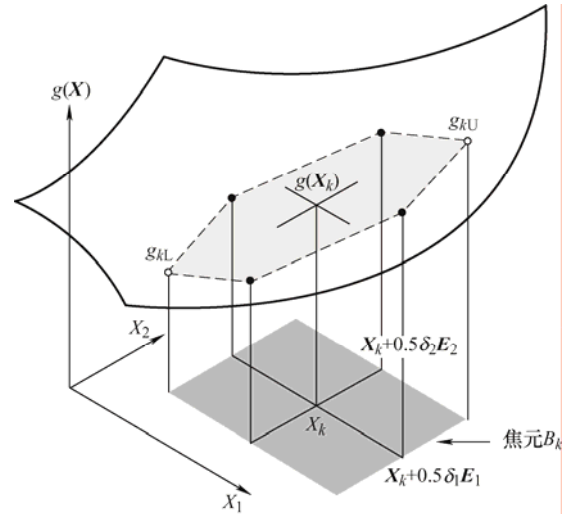


图 2 焦元功能函数极值求解原理

$$g \approx g(\mathbf{X}_k) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \bigg|_{\mathbf{X}_k} (X_i - x_{ki}) \quad (9)$$

式中, x_{ki} 表示焦元中心点 \mathbf{X}_k 的分量, $i=1, 2, \dots, n$; 偏导数可用前向差分法求解, 即

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} \bigg|_{\mathbf{X}_k} \approx \frac{g(\mathbf{X}_k + 0.5\delta_i \mathbf{E}_i) - g(\mathbf{X}_k)}{0.5\delta_i} \quad (10)$$

式中, \mathbf{E}_i 表示第 i 个分量为 1 而其余分量全部为 0 的 n 维向量, δ_i 表示随机变量 x_i 的离散步长。将该式代入式(9), 经分析得焦元子空间 B_k 中功能函数极小值 g_{kL} 和极大值 g_{kU} 可通过以下两式之一求取

$$f_1 = (1-n)g(\mathbf{X}_k) + \sum_{i=1}^n g(\mathbf{X}_k + 0.5\delta_i \mathbf{E}_i) \quad (11)$$

$$f_2 = (1+n)g(\mathbf{X}_k) - \sum_{i=1}^n g(\mathbf{X}_k + 0.5\delta_i \mathbf{E}_i) \quad (12)$$

即 $g_{kL} = \min(f_1, f_2)$, $g_{kU} = \max(f_1, f_2)$, $k=1, 2, \dots, M$ 。

利用式(11)、(12)求解临界焦元功能函数极值时, 由于焦元中心点 \mathbf{X}_k 的功能函数值 $g(\mathbf{X}_k)$ 等于 g_k , 直接由预先求得的 $U_g(z)$ 获知, 故每个焦元仅需再调用 n 次功能函数即可判定是否归属临界域, 计算成本可接受。

3 UGF-重要抽样法

结构失效概率计算只涉及失效域 R_f 和临界域 R_c 。对于失效域焦元, 全域功能函数值均严格小于零, 可直接通过 $U_g(z)$ 中相关项的 UGF 指数值 $g_{(k)}$

表征焦元子空间的功能函数极值,对相关项的 UGF 系数值 $p_{(k)}$ 求和直接得到失效域失效概率 p_{f1} ;而对于临界域焦元,为保证计算精度不宜通过 UGF 指数值 $g_{(k)}$ 表征焦元子空间的功能函数极值,可针对临界域运用重要抽样法获得临界域失效概率 p_{f2} 。结构在整个随机空间的总体失效概率 $p_f = p_{f1} + p_{f2}$ 。

3.1 面向临界域的重要抽样原理

重要抽样法是研究人员针对 MC 法处理小概率问题计算效率低的问题,提出的常见改进技术之一。其基本思想是通过重要抽样密度函数来代替原抽样密度函数,使得样本落入失效域的概率增大,由此获得高的抽样效率和快的收敛速度。

由于失效概率计算结果通常不能预知,所以重要抽样密度函数的确定成为重要抽样法的研究难点。本文首先通过 UGF 运算对随机变量空间进行了粗略的全域分析,再根据各焦元的功能函数极值信息划分了失效域和临界域,可进一步选择适宜的重要抽样密度函数使样本全部落入临界域,求得局部失效概率 p_{f2} 。

设随机向量 \mathbf{X} 的原概率密度函数为 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ 。定义重要抽样密度函数 $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ 为临界域 R_c 上的均匀分布,即

$$h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \frac{1}{V_c}, \mathbf{X} \in \bigcup (B_{c,1}, B_{c,2}, \dots, B_{c,s}) \quad (13)$$

式中, $B_{c,i}$ 为第 i 个临界焦元, $i=1, 2, \dots, s, s=1+k_1+k_2$;

$V_c = s \prod_{i=1}^n \delta_i$, 表示 s 个临界焦元体积之和。

基于 $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$, 可将结构失效概率积分式变换为如式(14)所示。

$$\begin{aligned} p_f &= \int \dots \int_{R_f \cup R_c} I_F(\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \\ p_{f1} &+ \int \dots \int_{R_c} I_F(\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \\ p_{f1} &+ \int \dots \int_{R_c} I_F(\mathbf{X}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})} h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \\ p_{f1} &+ E_h \left(I_F(\mathbf{X}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $E_h(\cdot)$ 表示依 $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$ 抽样的样本数学期望; $I_F(\cdot)$ 为样本失效示性函数,当样本点处的功能函数值小于 0 时取 1, 否则取 0; 末端第一项 p_{f1} 可通过 $U_g(\mathbf{z})$ 中失效域对应项概率系数求和得出, 第二项即为临界域失效概率的估计值 \hat{p}_{f2} 。

设抽样次数为 N , 临界域所占概率总量为 p_c (可通过 $U_g(\mathbf{z})$ 中临界域对应项概率系数求和得出), 将

式(13)代入式(14), 进一步整理得

$$\begin{aligned} \hat{p}_{f2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_F(\mathbf{X}_i) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_i)}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_i)} = \frac{V_c}{N} \sum_{i=1}^N I_F(\mathbf{X}_i) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_i) = \\ &= \frac{p_c}{N \cdot \frac{\sum_{j=1}^s f_{\mathbf{X}}(B_{c,j}) \prod_{k=1}^n \delta_k}{\prod_{k=1}^n \delta_k}} \sum_{i=1}^N I_F(\mathbf{X}_i) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_i) = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N I_F(\mathbf{X}_i) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_i)}{\sum_{i=1}^N f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}_i)} p_c = \hat{p}_F p_c \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $\mathbf{X}_i (i=1, 2, \dots, N)$ 表示针对临界域均匀抽样获得的 N 个样本点。显然, 由重要抽样获得的失效概率 \hat{p}_F , 其实质是当随机向量处于临界域时结构的条件失效概率, 该值通常远大于结构失效概率 p_f 。与采用原始 MC 抽样法直接估计 p_f 相比, 由估计值变异系数公式

$$Cov(\hat{p}_f) \approx \sqrt{\frac{1}{(N-1) \hat{p}_f}} \quad (16)$$

可知, 在确定的抽样次数下, 估计值越大则变异系数越小, 因此面向临界域的重要抽样法可获得更精确的失效概率估计值。另一方面, 在确定的精度等级下, 面向临界域的重要抽样法只需较少的抽样次数即满足要求。

3.2 结构可靠性 UGF-重要抽样法流程

综合上文所述, 本节归纳结构可靠性分析 UGF-重要抽样法的具体流程。主要思路是在基于随机变量全域空间预分析得到结构 UGF 的基础上, 对失效域焦元概率直接累加求取局部失效概率 p_{f1} , 对临界域焦元采用重要抽样法求取局部失效概率 p_{f2} , 两者相加得结构失效概率 p_f 。

(1) 根据概率密度函数 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$, 选定步长进行低密度离散化, 运用式(1)、(3)建立各变量 UGF。再根据结构功能函数 $g(\mathbf{X})$, 运用式(4)、(5)对各变量 UGF 进行复合运算得到结构 UGF, 即 $U_g(\mathbf{z})$ 。

(2) 对焦元功能函数进行升序排列, 得到更新各项次序后的 $U_g(\mathbf{z})$ 。进一步根据式(8)、(11)、(12), 依次确定随机空间中分别隶属临界域和失效域的焦元集合。

(3) 针对失效域焦元集, 将 $U_g(\mathbf{z})$ 中前 $(r-k_1-1)$ 项概率系数求和得失效域失效概率 p_{f1} 。

(4) 观测 $U_g(\mathbf{z})$ 中 (k_1+k_2+1) 个临界焦元的对应

项, 将概率系数大于足够小阈值 ϵ (约低于失效概率预估值两个数量级) 的临界焦元纳入待抽样的热点焦元集, 其余临界焦元纳入不需抽样的边际焦元集。

(5) 针对热点焦元集, 参考式(13)、(15)所定义的重要抽样规则进行 N 次抽样, 得到域内条件失效概率 \hat{p}_F 。每次抽样均抽取 1 个 $[0,1]^{n+1}$ 上均布的 $n+1$ 维向量, 由该向量的首个分量选择热点焦元序号之一, 而其余 n 维分量标定所选焦元 n 维子空间中的具体分析点。通常, 抽样次数 N 仅需大于热点焦元数的 10 倍即可满足精度要求。

(6) 将 $U_g(z)$ 中热点焦元的对应项概率系数求和得热点焦元集概率 p_h , 域内失效概率 $\hat{p}_{F2} = \hat{p}_F p_h$ 。

(7) 对于边际焦元集, 由于对失效概率的贡献量偏小, 可作近似处理以简化计算。将其在 $U_g(z)$ 中对对应项的概率系数求和后再取半, 并入步骤(6)求得的 \hat{p}_{F2} , 得到临界域失效概率。

(8) 根据步骤(3)、(7)的计算结果, 结构失效概率 $p_f = p_{f1} + \hat{p}_{F2}$ 。

4 算例分析

4.1 数学算例

考虑如下 3 个功能函数

$$g(\mathbf{X}) = X_1^2 X_2 - X_3 \quad (17)$$

$$g(\mathbf{X}) = X_1^2 X_2 - X_3 + 10 \quad (18)$$

$$g(\mathbf{X}) = X_1^2 X_2 - X_3 + 15 \quad (19)$$

式中, 随机向量 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$, 各分量服从彼此独立的正态分布, 均值向量为(4.3, 2.7, 20), 标准差向量为(0.6, 0.6, 3)。

首先针对功能函数(17)计算结构失效概率。以均值点为中心, 取离散状态数 $m=20$, 选定 ± 4 倍标准差的区间进行随机变量离散化, 分别建立随机变量 X_1 、 X_2 、 X_3 的 UGF。运用式(4)、(5)对各变量 UGF 进行复合运算得到结构 UGF, 进一步依照 UGF 指数值 g_k 对各项进行升序排列, 调整次序后得

$$U_g(z) = \sum_{k=1}^{8000} p_{(k)} z^{(X_{(k)}, g_{(k)})} \quad (20)$$

根据式(11)、(12), 对 $U_g(z)$ 中的 8 000 个焦元项进行区域划分, 其中落入失效域的焦元数为 1 873, 落入临界域的焦元数为 371。将 $U_g(z)$ 中前 1 873 项系数求和得失效域失效概率 $p_{f1}=0.0152$ 。

取临界焦元中概率值大于阈值 10^{-4} 的 53 个作为热点焦元, 其余 318 个为边际焦元。热点焦元集信息如表 1 所示。

表 1 热点焦元集信息

序号	焦元中心	功能函数值	概率系数
1	(3.220, 1.620, 18.200)	-1.403	0.000 1
2	(3.220, 1.860, 20.600)	-1.315	0.000 3
3	(2.980, 2.580, 24.200)	-1.289	0.000 1
4	(2.740, 2.580, 20.600)	-1.230	0.000 1
5	(3.220, 2.100, 23.000)	-1.226	0.000 3
6	(3.460, 1.620, 20.600)	-1.206	0.000 3
7	(3.220, 2.340, 25.400)	-1.138	0.000 1
8	(2.980, 2.340, 21.800)	-1.020	0.000 3
9	(3.700, 1.620, 23.000)	-0.822	0.000 3
10	(2.980, 2.100, 19.400)	-0.751	0.000 2
11	(3.460, 1.860, 23.000)	-0.733	0.000 3
12	(4.180, 1.140, 20.600)	-0.682	0.000 1
13	(2.740, 2.820, 21.800)	-0.629	0.000 1
14	(3.700, 1.380, 19.400)	-0.508	0.000 2
15	(3.940, 1.380, 21.800)	-0.377	0.000 3
16	(3.460, 2.100, 25.400)	-0.260	0.000 2
17	(3.940, 1.620, 25.400)	-0.252	0.000 1
18	(3.220, 1.860, 19.400)	-0.115	0.000 3
19	(2.980, 2.580, 23.000)	-0.089	0.000 2
20	(4.180, 1.380, 24.200)	-0.088	0.000 1
21	(2.740, 2.580, 19.400)	-0.030	0.000 1
22	(3.220, 2.100, 21.800)	-0.026	0.000 4
23	(3.460, 1.620, 19.400)	-0.006	0.000 3
24	(3.220, 2.340, 24.200)	0.062	0.000 3
25	(3.700, 1.860, 25.400)	0.063	0.000 2
26	(2.980, 2.340, 20.600)	0.180	0.000 3
27	(3.700, 1.620, 21.800)	0.378	0.000 4
28	(2.980, 2.100, 18.200)	0.449	0.000 2
29	(3.460, 1.860, 21.800)	0.467	0.000 5
30	(4.420, 1.140, 21.800)	0.472	0.000 1
31	(4.180, 1.140, 19.400)	0.519	0.000 1
32	(2.740, 2.820, 20.600)	0.571	0.000 1
33	(3.700, 1.380, 18.200)	0.692	0.000 2
34	(3.940, 1.380, 20.600)	0.823	0.000 3
35	(2.980, 2.820, 24.200)	0.843	0.000 1
36	(3.460, 2.100, 24.200)	0.940	0.000 3
37	(3.940, 1.620, 24.200)	0.948	0.000 3
38	(3.220, 1.860, 18.200)	1.085	0.000 3
39	(3.220, 1.860, 18.200)	1.111	0.000 3
40	(2.980, 2.580, 21.800)	1.112	0.000 2
41	(2.740, 2.580, 18.200)	1.170	0.000 1
42	(3.220, 2.100, 20.600)	1.174	0.000 5
43	(3.460, 1.620, 18.200)	1.194	0.000 3
44	(3.220, 2.340, 23.000)	1.262	0.000 4
45	(3.700, 1.860, 24.200)	1.263	0.000 3
46	(3.220, 2.580, 25.400)	1.351	0.000 2
47	(2.980, 2.340, 19.400)	1.380	0.000 3
48	(3.460, 2.340, 26.600)	1.414	0.000 1
49	(3.700, 1.620, 20.600)	1.578	0.000 5
50	(2.980, 2.100, 17.000)	1.649	0.000 1
51	(3.460, 1.860, 20.600)	1.667	0.000 6
52	(4.420, 1.140, 20.600)	1.672	0.000 1
53	(4.180, 1.140, 18.200)	1.719	0.000 1

面向表 1 中列示的 53 个热点焦元,运用上节所定义的重要抽样规则进行 530 次抽样,得到域内条件失效概率 $\hat{p}_F=0.335\ 9$ 。将表 1 中各焦元概率系数求和得 $p_c=0.012\ 8$,进一步求得热点焦元集失效概率 $\hat{p}_{f2}=\hat{p}_F p_c=0.004\ 3$ 。

将 $U_g(z)$ 中临界域边际焦元对应项概率系数求和后取半,并代入 \hat{p}_{f2} 得临界域失效概率 0.006 0。最终求得结构失效概率 $p_f=p_{f1}+\hat{p}_{f2}=0.021\ 2$ 。

为评估分析 UGF-重要抽样法的效果和特点,同时运用一次二阶矩法和 MC 法计算该结构的失效概率,计算过程中各指标的对比信息如表 2 所示。表中,FORM、UGF-IS 分别表示一次二阶矩法和 UGF-重要抽样法。

表 2 功能函数式(17)计算过程指标

指标名称	不同方法下的指标值		
	FORM	UGF-IS	MC
阈值	—	10^{-4}	—
临界焦元数	—	371	—
热点焦元数	—	53	—
抽样次数	—	530	80 000
$g(\mathbf{X})$ 调用次数	10	8 159	80 000
失效概率均值	0.017 4	0.021 2	0.021 4
失效概率变异系数	0	0.011 0	0.021 8
相对误差(%)	18.7	0.9	—

类似地,针对式(18)、(19)给出的功能函数,选定 ± 5 倍标准差的区间进行随机变量离散化,运用 3 种方法计算结构失效概率,相应的计算指标分别如表 3、4 所示。

表 3 功能函数式(18)计算过程指标

指标名称	不同方法下的指标值		
	FORM	UGF-IS	MC
阈值	—	10^{-5}	—
临界焦元数	—	127	—
热点焦元数	—	37	—
抽样次数	—	370	80 000
$g(\mathbf{X})$ 调用次数	23	8 111	80 000
失效概率均值	7.756×10^{-4}	1.119×10^{-3}	1.143×10^{-3}
失效概率变异系数	0	0.016 3	0.234 5
相对误差(%)	32.1	2.1	—

表 4 功能函数式(19)计算过程指标

指标名称	不同方法下的指标值		
	FORM	UGF-IS	MC
阈值	—	10^{-6}	—
临界焦元数	—	131	—
热点焦元数	—	17	—
抽样次数	—	170	80 000
$g(\mathbf{X})$ 调用次数	38	8 051	80 000
失效概率均值	7.877×10^{-5}	1.286×10^{-4}	1.294×10^{-4}
失效概率变异系数	0	0.014 0	0.329 2
相对误差(%)	39.1	0.6	—

对比分析表 2~4 可知,即使随机变量均服从正态分布,对于非线性功能函数式(17)~(19),采用一次二阶矩法计算结构失效概率的相对误差分别达到 18.7%、32.1%和 39.1%,不符合工程分析精度要求。采用抽样 80 000 次的 MC 法,可得较为精确地计算结果,但其变异系数随估计值的减小而增大,对于功能函数(19)失效概率估计值的变异系数高达 0.329 2,需要显著提高抽样次数才能缩小估计值的分散性。而采用本文提出的 UGF-重要抽样法,只需可控的计算成本即获得精确稳定的失效概率,失效概率估计值的相对误差均低于 2.1%,变异系数均低于 0.016 3,且热点焦元数、功能函数调用次数和计算结果的稳定性不受估计值的大小而扰动。

4.2 齿轮传动

已知圆柱直齿标准渐开线齿轮传动的传动比 $i_{12}=3.2$,模数 $m=2\text{ mm}$,主动轮齿数 $z_1=24$,齿宽系数 $\Phi_d=1$,载荷系数 $k_F=1.7$ 、 $k_H=1.1$,齿形系数 $Y_{Fa}=2.68$,应力修正系数 $Y_{Sa}=1.59$,重合度系数 $Y_\epsilon=Z_\epsilon=1$,区域系数 $Z_H=2.5$,材料弹性影响系数 $Z_E=189.8\text{ MPa}^{0.5}$ 。主动轮转矩 T_1 服从区间[95 000, 120 000] N·mm 上的均匀分布,齿根弯曲疲劳极限 σ_{Flim} 服从均值 475 MPa、标准差 46 MPa 的正态分布,齿面接触疲劳极限 σ_{Hlim} 服从均值 920 MPa、标准差 80 MPa 的对数正态分布。结构功能函数

$$g(\mathbf{X}) = \min((g_1(\mathbf{X}), g_2(\mathbf{X}))) \quad (21)$$

式中, $\mathbf{X}=(T_1, \sigma_{Flim}, \sigma_{Hlim})$, $g_1(\mathbf{X})$ 、 $g_2(\mathbf{X})$ 分别表示齿根弯曲疲劳和齿面接触疲劳的功能函数,由式(22)、(23)给出

$$g_1(\mathbf{X}) = X_2 - \frac{2k_F X_1 Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\epsilon}{\Phi_d m^3 z_1^2} \quad (22)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = X_3 - Z_H Z_E Z_\epsilon \sqrt{\frac{2k_H X_1 (i_{12} + 1)}{\Phi_d m^3 z_1^3 i_{12}}} \quad (23)$$

尽管 $g_1(\mathbf{X})$ 、 $g_2(\mathbf{X})$ 在随机空间中为线性函数, 但由式(21)描述的两失效模式串联的整体功能函数呈现较强非线性(图 3), 且主动轮转矩 T_1 为均匀分布随机变量, 故所有矩法失效。

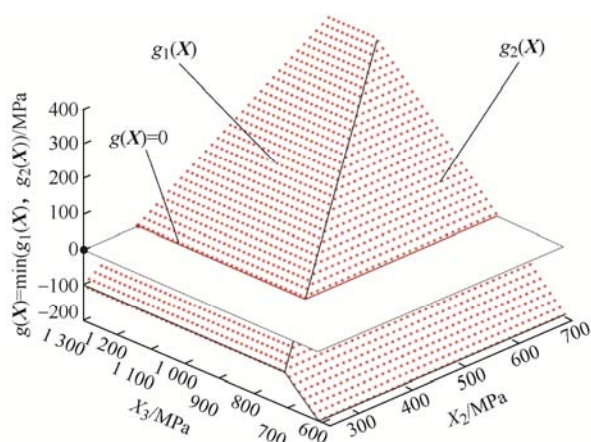


图 3 功能函数的非线性特征($T_1=110\,000\text{ N}\cdot\text{mm}$ 时)

分别采用 UGF-重要抽样法和 MC 法求解结构失效概率, 计算过程的主要指标如表 5 所示。

表 5 功能函数式(21)计算过程指标

指标名称	不同方法下的指标值	
	UGF-IS 法	MC 法
阈值	10^{-4}	—
临界焦点数	100	—
热点焦点数	22	—
抽样次数	220	80 000
$g(\mathbf{X})$ 调用次数	8 066	80 000
失效概率均值	0.065 1	0.064 9
失效概率变异系数	0	0.010 0
相对误差(%)	0.3	—

5 结论

(1) 本文提出了面向离散化临界状态空间的 UGF-重要抽样法, 可用于快速、精确计算结构失效概率。该方法有机结合 UGF 分析工具和重要抽样基本原理, 对拓展结构可靠性分析的方法体系具有一定的参考价值。

(2) 针对具有非正态、小概率、非线性特征的功能函数, UGF-重要抽样法可同时保证分析精度和计算效率, 分析精度显著高于传统的一次二阶矩法, 结果稳定性高于 MC 法, 计算效率满足工程应用要求。新方法为针对复杂功能函数的结构可靠度精确

计算开辟了崭新途径。

(3) 数值算例表明, UGF-重要抽样法只需可控的计算成本即获得相对误差和变异系数小的失效概率估计值, 抽样规模和结果稳定性不受失效概率数量级的变化而波动, 功能函数调用次数可由 UGF 预分析环节的低密度离散步长灵活调控。但随着随机向量维数的增大, UGF 预分析势必消耗更多计算成本, 可基于自适应细分等思想进一步缩减单元总规模, 相关工作后继开展。

参 考 文 献

- [1] ZHAO Y G, ONO T. Moment methods for structural reliability[J]. Structural Safety, 2001, 23(1): 47-75.
- [2] GHANEM R G, SPANOS P D. Spectral stochastic finite element formulation for reliability analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1991, 117(10): 2351-2372.
- [3] 范文亮, 李正良, 王承启. 多变量函数统计矩点估计法的性能比较[J]. 工程力学, 2012, 29(11): 1-11.
FAN Wenliang, LI Zhengliang, WANG Chengqi. Comparison of point estimate methods for probability moments of multivariate function[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(11): 1-11.
- [4] MELCHERS R E. Importance sampling in structural system[J]. Structural Safety, 1989, 6(1): 3-10.
- [5] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimension by subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263-277.
- [6] LU Zhenzhou, SONG Shufang. Reliability sensitivity method by line sampling[J]. Structural Safety, 2008, 30(2): 517-532.
- [7] JINSUO N, ELLINGWOOD B R. Directional methods for structural reliability analysis[J]. Structural Safety, 2000, 22(3): 233-249.
- [8] SRIRAMULA S, MARIOS K C. Quantification of uncertainty modelling in stochastic analysis of FRP composites[J]. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2009, 40(11): 1673-1684.
- [9] USHAKOV I. Optimal standby problem and universal generating function[J]. Soviet Journal Computer and System Science, 1987, 25(1): 61-73.
- [10] LISNIANSKI A. Estimation of boundary points for continuum-state system reliability measures[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2001, 74(1): 81-88.
- [11] LISNIANSKI A, LEVITIN G. Multi-state system reliability[M]. New Jersey/London/Singapore: World

- Scientific, 2003.
- [12] LEVITIN G. A universal generating function approach for the analysis of multi-state systems with dependent elements[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2004, 84(2): 285-292.
- [13] 周金宇, 谢里阳. 多状态系统共因失效机理与定量分析[J]. 机械工程学报, 2008, 44(10): 77-84.
- ZHOU Jinyu, XIE Liyang. Common cause failure mechanism and risk probability quantitative estimation of multi-state systems[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(10): 77-84.
- [14] LISNIAISKI A, FRENKEL I, DING Y. Multi-state system reliability analysis and optimization for engineers and industrial managers[M]. London: Springer-Verlag, 2010.
- [15] JAFARY B, FIONDELLA L. A universal generating function-based multi-state system performance model subject to correlated failures[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2016, 152(1): 16-27.
- [16] XIE Liyang, ZHOU Jinyu. System-level load-strength interference based reliability modeling of k -out-of- n system[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2004, 84(3): 311-317.
- [17] AN Zongwen, HUANG Hongzhong, LIU Yu. A discrete stress-strength interference model based on universal generating function[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(12): 1485-1490.
- [18] ZHOU Jinyu, XIE Liyang. Generating function approach to reliability analysis of structural systems[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2009, 52(10): 2849-2858.
- [19] 郭惠听, 戴娟, 程立志, 等. 应力-强度干涉的直方图模型及可靠度计算的发生函数法[J]. 中国机械工程, 2013, 24(15): 2041-2042.
- GUO Huixin, DAI Juan, CHENG Lizhi, et al. Stress-intensity interference histogram model and the universal generating function of reliability calculation[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(15): 2041-2042.
- [20] 阚琳洁, 张建国, 王丕东, 等. 基于性能退化和通用发生函数的在轨空间机构系统多状态可靠性分析[J]. 机械工程学报, 2017, 53(11): 20-28.
- KAN Linjie, ZHANG Jianguo, WANG Pidong, et al. Multi-state system reliability analysis of space mechanism in orbit based on performance degradation and universal generating function[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(11): 20-28.
- [21] 刘成龙, 周金宇, 邱睿. 复合材料层合板可靠性分析的发生函数法[J]. 机械工程学报, 2019, 55(4): 67-74.
- LIU Chenglong, ZHOU Jinyu, QIU Rui. Reliability analysis of composite laminates based on generating function approach[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(4): 67-74.
- [22] JAISWAL N, NEGI S, SINGH S B. Reliability analysis of non-repairable weighted k -out-of- n system using belief universal generating function[J]. International Journal of Industrial and Systems Engineering, 2018, 28(3): 300-318.
- [23] MI Jinhua, LI Yanfeng, LIU Yu, et al. Belief universal generating function analysis of multi-state systems under epistemic uncertainty and common cause failures[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2015, 64(4): 1300-1309.
- [24] DONG Wenjie, LIU Sifeng, ZHANG Qin, et al. Reliability assessment for multi-state systems: An extension of fuzzy universal generating function[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2019, 21(3): 945-953.
- [25] 姜潮, 张哲, 韩旭, 等. 一种基于证据理论的结构可靠性分析方法[J]. 力学学报, 2013, 45(1): 103-114.
- JIANG Chao, ZHANG Zhe, HAN Xu, et al. An evidence-theory-based reliability analysis method for uncertain structures[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(1): 103-114.

作者简介: 周金宇(通信作者), 男, 1973 年出生, 博士, 教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机械可靠性、结构疲劳和现代设计方法。
E-mail: yuhangyuan888@sina.com

王志凌, 女, 1979 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为结构健康监测。
程锦翔, 男, 1988 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为复合材料自动铺放成形、制造可靠性。

韩文钦, 男, 1973 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为固体力学。