

DOI: 10.3901/JME.2023.13.110

# 振动频率对电涡流阻尼非线性行为的影响<sup>\*</sup>

李力源 李 斌 王东升  
(西北工业大学航空学院 西安 710072)

**摘要:** 电涡流阻尼器是一种非接触式的阻尼消振装置,在结构振动控制领域具有广泛的应用前景。但是电涡流阻尼在实验中表现出显著的振动频率相关性,具有明显的阻尼非线性特征,而目前尚缺少深入的研究方法对这一现象进行定量分析与机理阐释。为此,以板式电涡流阻尼器为研究对象,考虑电涡流产生的时变反抗磁场的作用,提出了基于动磁场分布的电涡流阻尼力简化计算方法,并通过全耦合的磁-力有限元仿真及实验等验证了简化方法的有效性。与基于静磁场分布的传统线性电涡流阻尼模型相比,该简化方法可以有效表征不同振动频率工况下阻尼力的非线性变化趋势;在 100 Hz 频率范围内,简化方法与精细有限元方法的计算结果之间表现出良好的一致性,误差不超过 10%。之后进一步分析了运动诱导的反抗磁场强度和动磁场相位延迟与振动频率的相关性,进而揭示了两者的竞争影响机制。研究结果表明,在振动频率较低时,电涡流阻尼的非线性主要受控于频率增大引发的动磁场相位延迟;而随着振动频率的持续增大,动磁场相位延迟的影响逐渐减弱,电涡流阻尼的非线性主要受控于反抗磁场对静磁场的影响。研究结论为电涡流阻尼器的宽频减振设计提供了有益的理论参考。

**关键词:** 电涡流阻尼; 动态磁场分布; 反抗磁场; 非线性; 相位延迟

**中图分类号:** TB535

## Effects of Vibration Frequency on the Nonlinear Behavior of the Eddy Current Damping

LI Liyuan LI Bin WANG Dongsheng  
(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

**Abstract:** The eddy current damper is a non-contact damping device to realize vibration attenuation with wide application prospects in the field of structural vibration control. However, the eddy current damping shows obvious vibration frequency dependency with nonlinear damping characteristics, and there are no thorough research methods to quantitatively analyze and theoretically explain the phenomenon. Therefore, taking the eddy current damper with a plate configuration as the research object, the simplified calculation method of the eddy current damping force is proposed considering the effects of the time-varying opposing magnetic field caused by eddy currents based on the distribution of the dynamic magnetic field. Moreover, the validity of the simplified method is verified by the fully coupled magnetic-mechanical finite element simulations and experiments. Compared to the traditional linear eddy current damping model based on the distribution of the static magnetic field, the simplified method is available to characterize the nonlinear changing trend of the damping force under different vibration frequencies effectively. Within 100 Hz, there is a good agreement between the calculation results by the simplified method and that by the fine finite element method with the error no more than 10%. Furthermore, the correlation between the opposing magnetic field intensity and the dynamic magnetic field phase delay both induced by motions and vibration frequency is analyzed, and then the competitive effect mechanism of them on eddy current damping is revealed. The results show that in the low frequency range, the nonlinearity of eddy current damping mainly depends on the dynamic magnetic field phase delay caused by the increase of frequency. As the frequency continues to increase, the influence of the dynamic magnetic field phase delay is gradually weakened, and the nonlinearity of eddy current damping is mainly determined by the influence of the opposing magnetic field on the static magnetic field. Finally, the conclusion provides a beneficial theoretical reference for the

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(11872312)。20220726 收到初稿, 20230406 收到修改稿

design of eddy current dampers in broadband vibration suppression.

**Key words:** eddy current damping; dynamic magnetic field distribution; opposing magnetic field; nonlinearity; phase delay

## 0 前言

振动噪声抑制是实现高端装备或运载工具动力学品质提升、舒适性改善及系统耐久性增长的关键所在,而通过外加阻尼器进行阻尼消振是工程上最为常用的减振手段之一。电涡流阻尼器能够提供一种非接触式的阻尼力,从而大大降低传统阻尼器耗能介质的运动磨损,提高阻尼器的耐久性和可靠性,在振动控制领域具有良好的应用前景,引起了国内外学者们的广泛关注<sup>[1-4]</sup>。目前,电涡流阻尼器在土木工程领域和高端机床领域<sup>[5-7]</sup>已经有若干成功应用,如湖南大学的陈政清院士团队<sup>[8-18]</sup>设计研制的板式电涡流调谐质量阻尼器(Eddy current tuned mass damper, ECTMD)装置已成功应用于大型桥梁以及建筑的振动控制。

近年来,关于电涡流阻尼器工作机理的研究也很受重视。EBRAHIMI 和 KHAMESEE 等<sup>[19]</sup>基于静态磁场假设,通过圆柱形永磁体的理论磁场分布公式推导得到电涡流阻尼力和永磁体与导体之间的相对运动速度成正比关系,从而将电涡流阻尼等效为线性黏滞阻尼。陈政清院士团队<sup>[20]</sup>采用匀强磁场假设,推导出电涡流阻尼力的初步公式,然后加入磁感应强度修正系数,通过实验数据修正实际磁场与匀强磁场之间的误差,最终同样将电涡流阻尼等效为线性黏滞阻尼。虽然将电涡流阻尼等效处理为线性黏滞阻尼是目前工程应用中较为主流的方法,但实际上,电涡流阻尼具有明显的非线性,即使在低频工况下也是如此。BAE 等<sup>[21]</sup>在进行实验时发现,随着永磁体运动频率的增大,实验结果与基于线性黏滞阻尼建模的理论模型之间的误差越来越大,他们对此做出了定性解释,当运动频率增大到一定程度时,由电涡流产生的反抗磁场对于原磁场来说不能忽略,使得导体上的磁感应强度减小,故电涡流阻尼力不再线性增大。陈政清院士等<sup>[22-23]</sup>借助滚珠丝杠机构,设计了一种耗能效率与流体黏性阻尼器相当的电涡流阻尼器,通过理论计算、有限元分析与实验方法验证了阻尼力与丝杠轴向速度间的高度非线性关系,他们认为电涡流阻尼器的阻尼力随着速度的增加而增加,在临界速度时达到最大值,然后随着速度的增加而减小,并同样将这一现象归因于电涡流引发的反抗磁场对原磁场的影响。香港科技大学的张志成课题组以及同济大学的单伽铨课题

组<sup>[24-25]</sup>提出了一种电涡流阻尼力近似分析方法,通过引入依赖于磁铁和导体板形状的电场形函数,对电涡流阻尼力进行二阶近似推导,将电涡流阻尼力等效为耗散力(与速度成正比)、伪惯性力(与加速度成正比)、伪耗散力(与冲击成正比)之和,构建出电涡流阻尼力与频率之间的非线性关系式,并通过实验验证了其合理性。同时他们也指出,二阶近似对于频率小于 5 Hz 的运动是准确的,而对于更高频率的运动还需要更高阶的近似。

综合来看:从应用层面来说,电涡流阻尼器已有的成功工程应用一般限于 20 Hz 以下的振动工况,对于航空航天等关注更高或更宽减振频带工况的领域,还需进一步研发新型电涡流减振器件;从机理研究层面来说,现有定量分析主要基于静态磁场假设,忽略了电涡流本身带来的感生磁场与永磁体原有磁场之间的耦合叠加效应,使得对电涡流阻尼非线性现象的认识处于定性状态。事实上,当振动的频率或振幅增大到一定程度时,叠加磁场的磁感线就会发生非常明显的折曲现象,如图 1 所示,这种磁场畸变将会导致电涡流阻尼器呈现出明显的非线性阻尼现象。为了进一步厘清电涡流阻尼与运动频率之间的非线性关系,揭示不同频率下电涡流阻尼效应的演变机理,文章基于时变电磁场理论建立板式电涡流阻尼器的物理模型,并结合理论分析与有限元仿真方法,阐明电涡流阻尼非线性演变的过程,提出电涡流阻尼力的简化计算方法,为电涡流阻尼器的宽频设计应用提供参考。

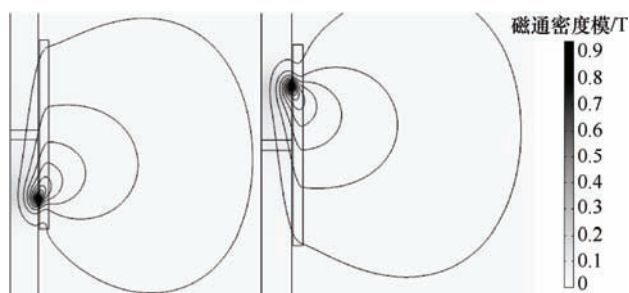


图 1 永磁体运动频率为 10 Hz、振幅为 0.1 m 时磁感线的折曲现象

## 1 电涡流阻尼的非线性现象

基于前述学者的研究工作,本文建立了一种板式构型的电涡流阻尼实验模型,实验装置如图 2 所示。圆柱形磁铁通过铝制夹具与振动台相连,通过

对振动台输入特定频率、特定位移幅值的正弦信号驱动磁铁做水平方向的简谐运动, 方形铜板竖直放置在磁铁附近, 其中心与磁铁中心位于同一条水平线上, 其表面与磁铁运动方向垂直。分别采用激光位移传感器和拉压力传感器记录磁铁运动过程中的位移和所受的作用力。实验中, 磁铁直径为 60 mm, 厚度为 10 mm, 铜板边长为 200 mm, 厚度为 20 mm, 磁铁位于平衡位置处时铜磁间隙为 2 mm; 振动台运动的位移振幅为 1 mm, 频率范围为 5~20 Hz。

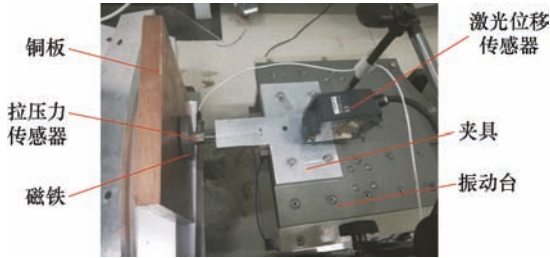


图2 电涡流阻尼模型实验装置

根据阻尼耗散能量等效原则对实验测量结果进行处理, 得到不同频率工况下该电涡流阻尼模型的等效线性阻尼系数如图3所示。结果表明, 随着磁铁运动频率的增大, 电涡流阻尼的等效线性阻尼系数逐渐减小。不同于线性阻尼的阻尼系数不随频率发生变化, 电涡流阻尼呈现出非常明显的关于频率的非线性效应。

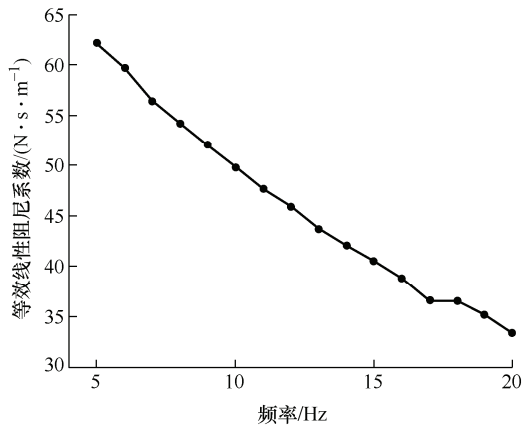


图3 电涡流阻尼模型的等效线性阻尼系数随频率的变化曲线

## 2 电涡流阻尼力简化计算方法

### 2.1 板式电涡流阻尼器的物理模型

根据电磁场理论, 变化的磁场产生电场, 变化的电场产生磁场。对于如图4所示的板式构型电涡流阻尼器抽象模型, 圆柱形导体板放置于地面静止不动, 圆柱形永磁体的几何中心与导体板几何中心

在同一条地垂线上, 永磁体在导体板上方向隔一定距离处做往复简谐运动。由于永磁体与导体板之间持续发生相对运动, 导体板中随之产生变化的涡旋电场, 最终形成阻碍永磁体与导体板相对运动的洛伦兹力, 将该力应用于设计阻尼器时, 可称其为电涡流阻尼力。

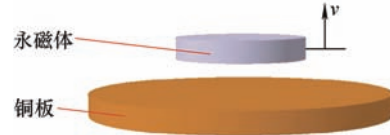


图4 板式电涡流阻尼器的工作原理示意图

### 2.2 电涡流阻尼效应下的洛伦兹力公式

设导体板中任一电流元  $JdV = JdS \cdot dl = Idl$  中共有  $ndV = ndSdl$  个载流子（自由电子），其中  $J$  为导体板中该电流元的电流密度矢量， $dV$  为该电流元的微体积， $I$  为该电流元的电流强度， $n$  为载流子数密度，另设每个载流子所带电量为  $-q$ ，漂移速度为  $v_e$ ，该电流元处的磁通密度矢量为  $B$ ，则一个载流子所受到的洛伦兹力为  $(-qv_e \times B)$ ，因此整个电流元所受的洛伦兹力<sup>[26-27]</sup>为

$$dF = ndSdl(-qv_e \times B) \quad (1)$$

又电子的运动方向和电流方向相反, 且有

$$Idl = -ndSqv_e dl = JdV \quad (2)$$

故

$$dF = J \times BdV \quad (3)$$

根据力的叠加原理, 整个导体板上受到的洛伦兹力为

$$F = \int_V J \times BdV \quad (4)$$

其中  $V$  为整个导体板的体积; 由微分形式的欧姆定律得到电流密度  $J$  和电场强度  $E$  之间的关系

$$J = \sigma E \quad (5)$$

式中,  $\sigma$  为导体板的电导率, 电流密度矢量  $J$  和电场强度矢量  $E$  的方向相同。对于电场强度  $E$ ，基于其产生机理的不同可以分为两部分：动生电动势产生的动生场强  $E_k$ ，以及感生电动势产生的感生场强  $E_i$ ；有

$$E_k = v \times B \quad (6)$$

$$\oint_L E_i \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (7)$$

$$E = E_k + E_i \quad (8)$$

式(7)中, 感生场强  $E_i$  与变化的磁场  $\frac{\partial B}{\partial t}$  在方向上成

左手螺旋关系，如图 5 所示。

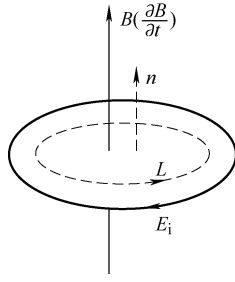


图 5 感生电场的环路定理

对于板式构型的电涡流阻尼器，以导体板底面的几何中心处为原点、径向方向为  $r$  轴、厚度方向为  $z$  轴建立如图 6 所示的轴对称柱坐标系。在导体板内任意一点  $(r_0, z_0)$  处取一微体积元  $dV$ ，此处的磁通密度矢量  $\mathbf{B}$  存在  $r$  方向和  $z$  方向两个分量；对于动生场强  $\mathbf{E}_k$ ，计算式(6)中的  $\mathbf{v}$  为永磁体与导体板的相对运动速度矢量，方向为  $-z$  方向，故  $\mathbf{B}_z$  对  $\mathbf{E}_k$  的贡献为 0，只有  $\mathbf{B}_r$  对  $\mathbf{E}_k$  贡献了  $\phi$  方向的分量，写成标量的形式即

$$E_{k\phi} = -vB_r \quad (9)$$

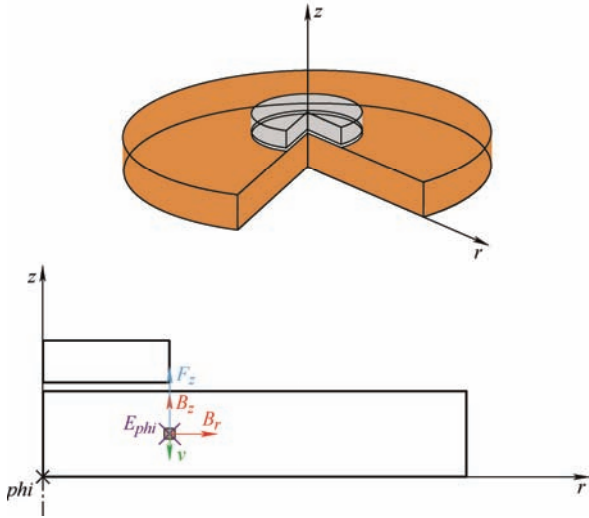


图 6 板式电涡流阻尼器的阻尼力

对于感生场强  $\mathbf{E}_i$ ，由计算式(7)有  $\frac{\partial \mathbf{B}_r}{\partial t}$  产生的分量以及  $\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t}$  产生的  $\phi$  方向分量，前者由于圆柱形永磁体的轴对称性而相互抵消，故  $\mathbf{B}_r$  对  $\mathbf{E}_i$  的贡献为 0，只有  $\mathbf{B}_z$  对  $\mathbf{E}_i$  贡献了  $\phi$  方向的分量，写成标量的形式即

$$E_{i\phi} = -\frac{\int_s \frac{\partial B_z}{\partial t} dS}{2\pi r_0} \quad (10)$$

式中， $S$  为以  $(0, z_0)$  为圆心、 $r_0$  为半径的圆。将式(9)和式(10)代入式(8)，再代入式(5)，得到电涡流密度矢量  $\mathbf{J}$  的方向为  $\phi$  方向；由计算式(4)可知洛伦兹力分为  $r$  方向的磁通密度  $\mathbf{B}_r$  产生的  $z$  方向的洛伦兹力分量  $\mathbf{F}_z$  以及  $z$  方向的磁通密度  $\mathbf{B}_z$  产生的  $r$  方向的洛伦兹力分量  $\mathbf{F}_r$  两部分， $\mathbf{F}_r$  由于圆柱形永磁体的轴对称性而相互抵消，故  $\mathbf{B}_z$  对  $\mathbf{F}$  的贡献为 0，只有  $\mathbf{B}_r$  对  $\mathbf{F}$  贡献了  $z$  方向的分量。据此得到了整个导体板产生的总洛伦兹力，写成标量的形式即

$$F_z = \int_V \sigma \left( -vB_r - \frac{\int_s \frac{\partial B_z}{\partial t} dS}{2\pi r_0} \right) B_r dV \quad (11)$$

因为永磁体所受的阻尼力与导体板所受的洛伦兹力是一对作用力与反作用力，两者大小相等，方向相反，所以式(11)也即该板式电涡流阻尼器的阻尼力公式。

### 2.3 板式电涡流阻尼器的磁场计算

由式(11)可知，求解电涡流阻尼器的阻尼力，必须先确定阻尼器周围的磁场分布。在永磁体的运动频率不是很高的工况下，可以忽略永磁体运动对于其原静磁场的影响，直接将阻尼器周围的磁场分布近似取为永磁体的静磁场分布；而当永磁体的运动频率较高时，永磁体运动对于其原静磁场的影响不可忽略，必须采用时变电磁场理论分析求解出阻尼器周围真实的动态电磁场分布。

#### 2.3.1 圆柱形永磁体的静磁场分布

根据圆柱形永磁体环形电流解析模型，将永磁体的静磁场等效为圆柱体表面的无数圈环形电流产生的磁场，应用毕奥-萨伐尔定律计算圆柱形永磁体的空间静磁场分布<sup>[28]</sup>。

环形电流模型建立的基础来源于磁介质磁化的结果，一方面使介质内部出现了不等于零的磁化强度，另一方面使介质的某些部位出现了等效的宏观磁化电流（束缚电流）。对于均匀磁化的圆柱形永磁体而言，磁化电流只分布于圆柱体外表面，设磁化电流线密度为  $i_m$ ，磁化强度为  $\mathbf{M}$ ，则有

$$\mathbf{M} = i_m \quad (12)$$

即磁化强度的大小等于磁化电流线密度；又有永磁体磁化后其表面的剩余磁通密度  $\mathbf{B}_{rem}$  与磁化强度  $\mathbf{M}$  之间的关系

$$\mathbf{B}_{rem} = \mu_0 \mathbf{M} \quad (13)$$

式中， $\mu_0$  为真空磁导率。

如图 7 所示，以永磁体中心为原点建立直角坐



标系。

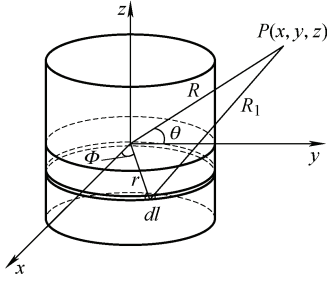


图 7 圆柱形永磁体环形电流模型

设永磁体高度为  $h$ ，在永磁体表面任取一等效环形电流元  $i_m dl$ ，其  $z$  方向坐标为  $z_1$ ，则其在  $P$  点产生的磁通密度矢量为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i_m dl \times \mathbf{R}_1}{4\pi R_1^3} \quad (14)$$

式中， $\mathbf{R}_1$  为环形电流元到  $P$  点的空间矢量，且有

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{r} \quad (15)$$

$$\mathbf{R} = y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \quad (16)$$

$$\mathbf{r} = b\cos\Phi\mathbf{a}_x + b\sin\Phi\mathbf{a}_y \quad (17)$$

$$d\mathbf{l} = -b\sin\Phi d\Phi\mathbf{a}_x + b\cos\Phi d\Phi\mathbf{a}_y \quad (18)$$

式中， $b$  为圆柱形永磁体的半径， $\mathbf{a}_x$ 、 $\mathbf{a}_y$ 、 $\mathbf{a}_z$  分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴方向的单位向量， $d\Phi$  为环形电流元  $i_m dl$  对应的角度微量。将式(15)~(18)代入式(14)，并在整个圆环上积分，得到单个等效环形电流在  $P$  点产生的磁通密度，用标量形式表示为

$$dB_x(y, z) = \frac{\mu_0 i_m b (z - z_1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\Phi}{\left(b^2 + y^2 + (z - z_1)^2 - 2by\sin\Phi\right)^{\frac{3}{2}}} d\Phi \quad (19)$$

$$dB_y(y, z) = \frac{\mu_0 i_m b (z - z_1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\Phi}{\left(b^2 + y^2 + (z - z_1)^2 - 2by\sin\Phi\right)^{\frac{3}{2}}} d\Phi \quad (20)$$

$$dB_z(y, z) = \frac{\mu_0 i_m b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b - y\sin\Phi}{\left(b^2 + y^2 + (z - z_1)^2 - 2by\sin\Phi\right)^{\frac{3}{2}}} d\Phi \quad (21)$$

转换为柱坐标系，并在  $z$  方向上积分，得到整个圆柱形永磁体在  $P$  点产生的磁通密度，用标量形式表示为

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 i_m b}{4\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z - z_1) \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(b^2 + r^2 \sin^2\Phi + (z - z_1)^2 - 2br\sin^2\Phi\right)^{\frac{3}{2}}} d\Phi dz_1 \quad (22)$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 i_m b}{4\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{(b - r\sin^2\Phi)}{\left(b^2 + r^2 \sin^2\Phi + (z - z_1)^2 - 2br\sin^2\Phi\right)^{\frac{3}{2}}} d\Phi dz_1 \quad (23)$$

$$B_{phi}(r, z) = 0 \quad (24)$$

通过联立式(12)、(13)，可以用工程中易于测量的  $B_{rem}$  替换式(22)、(23)中难以测量的  $i_m$ 。

### 2.3.2 时变电磁场理论下的动态电磁场分布

对于一般电磁场，有微分形式的麦克斯韦方程组<sup>[26-27]</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (28)$$

又有介质的电磁特性方程

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (29)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (30)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (31)$$

式中， $\mathbf{D}$  为电位移矢量， $\rho$  为自由电荷体密度， $\mathbf{B}$  为磁通密度矢量， $\mathbf{E}$  为电场强度矢量， $t$  为时间， $\mathbf{H}$  为磁场强度矢量， $\mathbf{J}$  为传导电流密度矢量； $\varepsilon_0$  为真空中的介电常数， $\varepsilon_r$  为介质的相对介电常数， $\mu_0$  为真空中的磁导率， $\mu_r$  为介质的相对磁导率， $\sigma$  为介质的电导率。另有介质分界面上的边界条件

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (32)$$

$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (33)$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (34)$$

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (35)$$

式中， $\mathbf{e}_n$  为从介质 1 指向介质 2 的法向单位矢量， $\rho_s$  为自由电荷面密度， $\mathbf{J}_s$  为传导电流密度矢量。

满足麦克斯韦方程组、介质电磁特性方程组以及边界条件和初始条件的解是唯一的，也就是阻尼

器周围的真实电磁场。

### 2.3.3 运动永磁体周围动态磁场的简化计算方法

由前文的分析可知, 在永磁体运动频率较高的工况下, 变化的电场(位移电流)产生的反向的磁场(称其为反抗磁场  $\mathbf{B}_{\text{anti}}$ )对于原静磁场  $\mathbf{B}_{\text{sta}}$  的作用不能忽略, 需要加以考虑, 可令

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{sta}} + \mathbf{B}_{\text{anti}} \quad (36)$$

简谐振动的永磁体的位移和速度可分别表示为

$$x = A \sin(2\pi ft) \quad (37)$$

$$v = 2\pi f A \cos(2\pi ft) \quad (38)$$

式中,  $A$  为位移幅值,  $f$  为振动频率。建立和前文所述相同的二维轴对称模型以及柱坐标系如图 8 所示。

对于静磁场, 由 2.3.1 节中的解析方法可以分别计算出永磁体运动至不同位置处时周围的静磁场分布情况。假设永磁体运动的位移幅值很小, 那么对于永磁体周围的任意一点  $N$  来说, 该点的时变静磁通密度大小与永磁体的位移大小近似成线性关系, 则  $N$  点处的静磁场可以表示为如下的形式

$$B_{r,\text{sta}} = B_{r,\text{m,sta}} \sin(2\pi ft) + B_{r0,\text{sta}} \quad (39)$$

$$B_{z,\text{sta}} = B_{z,\text{m,sta}} \sin(2\pi ft) + B_{z0,\text{sta}} \quad (40)$$

式中,  $B_{r0,\text{sta}}$  和  $B_{z0,\text{sta}}$  为永磁体位于平衡位置处时  $N$  点的静磁场,  $B_{r,\text{m,sta}}$  和  $B_{z,\text{m,sta}}$  为永磁体运动过程中  $N$  点处静磁场的变化幅值, 这些系数均与  $N$  点的坐标有关。为满足永磁体的小振幅假设, 本文设定永磁体的位移幅值  $A$  为 1 mm。

对于反抗磁场, 由麦克斯韦“位移电流”假设<sup>[26-27]</sup>, 有

$$\oint_L \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (41)$$

式中, 变化的电场  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  和它所激发的磁场  $\mathbf{H}_i$  在方向上符合右手螺旋关系, 如图 9 所示。

在导体板上  $M(r_1, z_1)$  点处取一微面积元  $dS_1$ , 假设该微面积元内为随时间变化的匀强磁场和匀强电场, 并设其磁场为

$$B_r = B_{r,\text{m}} \sin(2\pi ft) + B_{r0} \quad (42)$$

$$B_z = B_{z,\text{m}} \sin(2\pi ft) + B_{z0} \quad (43)$$

式中,  $B_{r0}$  和  $B_{z0}$  为永磁体位于平衡位置处时  $M$  点处微面积元的动磁场,  $B_{r,\text{m}}$  和  $B_{z,\text{m}}$  为永磁体运动过程中  $M$  点处微面积元动磁场的变化幅值, 这些系数均与  $M$  点的坐标  $(r_1, z_1)$  有关; 将式(42)、(43)代入式(9)、

(10), 得到变化的磁场在该微面积元处产生的电场强度为

$$\begin{aligned} E_{\text{phi}} &= E_{\text{kphi}} + E_{\text{i phi}} = -v B_r - \frac{\int_S \frac{\partial B_z}{\partial t} dS}{2\pi r_1} \\ &= -2\pi f A B_{r,\text{m}} \sin(2\pi ft) \cos(2\pi ft) - \\ &\quad \left( 2\pi f A B_{r0} + \frac{f \int_S B_{z,\text{m}}(r) dS}{r_1} \right) \cos(2\pi ft) \\ &= -\pi f A B_{r,\text{m}} \sin(4\pi ft) - \\ &\quad \left( 2\pi f A B_{r0} + \frac{f \int_S B_{z,\text{m}}(r) dS}{r_1} \right) \cos(2\pi ft) \end{aligned} \quad (44)$$

与式(29)、(30)联立并代入式(41)可得该微面积元对  $N(r_2, z_2)$  处的反抗磁场的贡献为

$$\oint_L d\mathbf{B}_{\text{anti}} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L d(\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{\text{anti}}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial(\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_1 \quad (45)$$

写成标量的形式即为

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}_{\text{anti}} &= d(\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{\text{anti}}) \\ &= \mu_0 \mu_r \frac{\frac{\partial(\epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{phi}})}{\partial t}}{2\pi \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \cdot d\mathbf{S}_1 \\ &= \frac{2\pi f^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r dS_1}{\sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \cdot \\ &\quad (-AB_{r,\text{m}} \cos(4\pi ft) + (AB_{r0} + \\ &\quad \int_S B_{z,\text{m}}(r) dS / (2\pi r_1)) \sin(2\pi ft) \end{aligned} \quad (46)$$

反抗磁场的方向如图 8 中所示, 将其沿  $r$  轴和  $z$  轴分解为  $d\mathbf{B}_{r,\text{anti}}$  和  $d\mathbf{B}_{z,\text{anti}}$ , 然后在整个导体板截面积上积分得到  $N$  点处的总反抗磁场, 与式(39)、(40)联立代入式(36), 由于与静磁场叠加后  $\cos(4\pi ft)$  的系数远小于  $\sin(2\pi ft)$  的系数, 故忽略其中的极小项  $\cos(4\pi ft)$  项, 最终得到如式(42)、(43)所示的磁场, 验证了动态磁场假设的正确性。

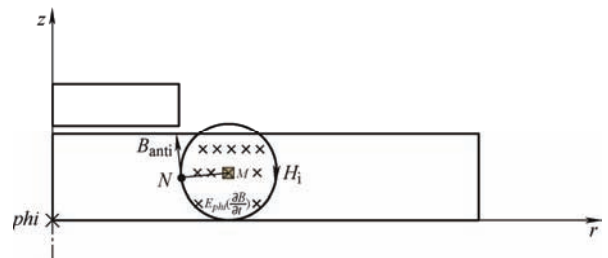


图 8 板式电涡流阻尼器的反抗磁场

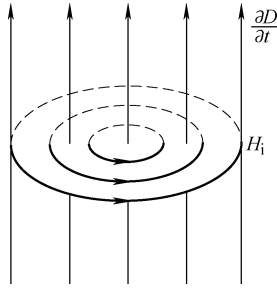


图9 变化的电场在其周围激发磁场

实际上,以正弦函数表示的导体板内部各点处的磁场的初相并不为0,而是随着该点的 $r$ 和 $z$ 坐标(即距导体板轴线的径向距离和距导体板上表面的厚度)的不同而发生变化,其总体趋势为以导体板上表面 $r=3\text{ cm}$ (即永磁体的半径大小)处为初相零点,沿着 $r$ 轴的正、负两个方向以及 $z$ 轴的负方向均逐渐增大。同时由上述推导可知,初相的出现并不是因为电涡流产生的反抗磁场。因此在导体板上 $M(r_1, z_1)$ 点处的微面积元 $dS_1$ 内,假设其磁场为

$$B_r = B_{rm} \sin(2\pi ft + \varphi_1) + B_{r0} \quad (47)$$

$$B_z = B_{zm} \sin(2\pi ft + \varphi_2) + B_{z0} \quad (48)$$

代入式(9)、(10),得到变化的磁场在该微面积元处产生的电场强度为

$$\begin{aligned} E_{iphi} &= -\frac{\int_S \frac{\partial B_z}{\partial t} dS}{2\pi r_1} \\ &= -\frac{f \int_S B_{zm}(r) \cos(2\pi ft + \varphi_2) dS}{r_1} \\ &= -\frac{2\pi f}{r_1} \int_0^{\eta} B_{zm}(r) \cos(2\pi ft + \varphi_2) \cdot r dr \quad (49) \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \int_0^{\eta} B_{zm}(r) dr &= B_{zm, pri}(r_1) - B_{zm, pri}(0) \\ &= B_{zm, pri}(r_1) \quad (50) \end{aligned}$$

则原式(49)可以化简为

$$\begin{aligned} E_{iphi} &= -\frac{2\pi f}{r_1} (r_1 B_{zm, pri}(r_1) \cos(2\pi ft + \varphi_2) + \\ &\quad \Phi_{z1} \cdot \cos(2\pi ft) + \Phi_{z2} \cdot \sin(2\pi ft)) \quad (51) \end{aligned}$$

式中

$$\Phi_{z1} = -\int_0^{\eta} B_{zm, pri}(r) \cdot \left( \cos \varphi_2 - r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \sin \varphi_2 \right) dr \quad (52)$$

$$\Phi_{z2} = \int_0^{\eta} B_{zm, pri}(r) \cdot \left( \sin \varphi_2 + r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \cos \varphi_2 \right) dr \quad (53)$$

又

$$\begin{aligned} E_{kphi} &= -v B_r \\ &= -2\pi f A B_{rm} \sin(2\pi ft + \varphi_1) \cos(2\pi ft) - \\ &\quad 2\pi f A B_{r0} \cos(2\pi ft) \\ &= -\pi f A B_{rm} (\sin(4\pi ft + \varphi_1) + \sin \varphi_1) - \\ &\quad 2\pi f A B_{r0} \cos(2\pi ft) \quad (54) \end{aligned}$$

将式(51)、(54)与式(29)、(30)联立并代入式(41)可得该微面积元对 $N(r_2, z_2)$ 处的反抗磁场的贡献为

$$\oint_L d\mathbf{B}_{anti} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L d(\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{anti}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial(\epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_1 \quad (55)$$

写成标量的形式即为

$$\begin{aligned} d\mathbf{B}_{anti} &= d(\mu_0 \mu_r \mathbf{H}_{anti}) \\ &= \mu_0 \mu_r \frac{\frac{\partial(\epsilon_0 \epsilon_r E_{phi})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}_1}{2\pi \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ &= \frac{2\pi f^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r d\mathbf{S}_1}{\sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \left\{ -AB_{rm}(r_1) \cdot \right. \\ &\quad \cos(4\pi ft + \varphi_1) + (AB_{r0}(r_1) + \\ &\quad B_{zm, pri}(r_1) \cos \varphi_2 + \Phi_{z1}/r_1) \sin(2\pi ft) + \\ &\quad \left. (B_{zm, pri}(r_1) \sin \varphi_2 - \Phi_{z2}/r_1) \cos(2\pi ft) \right\} \quad (56) \end{aligned}$$

反抗磁场的方向如图8中所示,将其沿 $r$ 轴和 $z$ 轴分解为 $d\mathbf{B}_{r, anti}$ 和 $d\mathbf{B}_{z, anti}$ ,然后在整个导体板截面积上积分得到 $N$ 点处的总反抗磁场,可以简化写为以下的形式

$$\begin{aligned} B_{r, anti} &= B_{rm, anti1} \sin(4\pi ft + \varphi_3) + \\ &\quad B_{rm, anti2} \sin(2\pi ft + \varphi_4) \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{z, anti} &= B_{zm, anti1} \sin(4\pi ft + \varphi_5) + \\ &\quad B_{zm, anti2} \sin(2\pi ft + \varphi_6) \quad (58) \end{aligned}$$

同样与式(39)、(40)联立代入式(36),并忽略其中的极小项 $\sin(4\pi ft)$ 项和 $\cos(4\pi ft)$ 项,得到如式(47)、(48)所示的磁场,验证了动态磁场假设的正确性。除此之外,式(57)、(58)中各三角函数项的系数均与频率的平方成正比,那么反抗磁场与静磁场叠加后得到的动磁场的幅值 $B_{rm}$ 、 $B_{zm}$ 以及初相位 $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 也自然成为频率的函数。

## 2.4 电涡流阻尼力的简化计算方法

如图6所示,由2.3.3节中的动态磁场假设,即式(47)、(48),与式(38)代入式(11)得到在导体板中任意一点 $(r_0, z_0)$ 处所取微体积元 $dV$ 的单点洛伦兹

力贡献为

$$\begin{aligned} dF_z &= \sigma \left( -\nu B_r - \frac{\int_s \frac{\partial B_z}{\partial t} dS}{2\pi r_0} \right) B_r dV \\ &= \sigma \left( -\pi f A B_{rm} (\sin(4\pi f t + \varphi_1) + \sin \varphi_1) - \right. \\ &\quad \left. 2\pi f A B_{r0} \cos(2\pi f t) - \right. \\ &\quad \left. \frac{2\pi f}{r_0} (r_0 B_{zm, pri}(r_0) \cos(2\pi f t + \varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. \Phi_{z1} \cdot \cos(2\pi f t) + \Phi_{z2} \cdot \sin(2\pi f t)) \right) \cdot \\ &\quad (B_{rm} \sin(2\pi f t + \varphi_1) + B_{r0}) dV \end{aligned} \quad (59)$$

式中

$$\Phi_{z1} = -\int_0^{r_0} B_{zm, pri}(r) \cdot \left( \cos \varphi_2 - r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \sin \varphi_2 \right) dr \quad (60)$$

$$\Phi_{z2} = \int_0^{r_0} B_{zm, pri}(r) \cdot \left( \sin \varphi_2 + r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \cos \varphi_2 \right) dr \quad (61)$$

化简后可以将式(59)写为

$$\begin{aligned} dF_z &= -2\pi f \sigma (F_1 \sin(2\pi f t + \theta_1) + \\ &\quad F_2 \sin(4\pi f t + \theta_2) + \\ &\quad F_3 \cos(6\pi f t + \theta_3) + F_4) dV \end{aligned} \quad (62)$$

$$F_1 = \sqrt{M_1^2 + N_1^2} \quad \tan \theta_1 = \frac{N_1}{M_1}$$

$$M_1 = -B_{zm, pri}(r_0) B_{r0} \sin \varphi_2 + \frac{\Phi_{z2}}{r_0} B_{r0} +$$

$$\frac{1}{2} A B_{rm}^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1$$

$$N_1 = A B_{r0}^2 + B_{zm, pri}(r_0) B_{r0} \cos \varphi_2 +$$

$$\frac{\Phi_{z1}}{r_0} B_{r0} + \left( \frac{1}{2} \sin^2 \varphi_1 + \frac{1}{4} \right) A B_{rm}^2$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \sqrt{M_2^2 + N_2^2}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{-M_2 \cos \varphi_1 + N_2 \sin \varphi_1}{M_2 \sin \varphi_1 + N_2 \cos \varphi_1}$$

$$M_2 = -B_{zm, pri}(r_0) B_{rm} \sin \varphi_2 + \frac{\Phi_{z2}}{r_0} B_{rm}$$

$$N_2 = 2A B_{r0} B_{rm} + B_{zm, pri}(r_0) B_{rm} \cos \varphi_2 + \frac{\Phi_{z1}}{r_0} B_{rm}$$

$$F_3 = -\frac{1}{4} A B_{rm}^2 \quad \theta_3 = 2\varphi_1$$

$$F_4 = \frac{1}{2} A B_{rm} B_{r0} \sin \varphi_1 + \frac{1}{2} (M_2 \cos \varphi_1 + N_2 \sin \varphi_1)$$

由式(62)可以看出，电涡流阻尼力非线性的来源有两部分：一是导体板内各点处动磁场的相位延迟，即  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ ，其与振动频率密切相关；二是由电

涡流产生的反抗磁场与静磁场叠加后的动磁场幅值，即  $B_{rm}$ 、 $B_{zm}$ ，结合式(39)、(40)、(57)、(58)，静磁场的幅值不随频率变化，为一定值，由式(56)可知，反抗磁场的幅值与频率的平方成正比，随着频率的增加，反抗磁场对静磁场的影响急剧增大。因此，在低频振动工况下，反抗磁场对静磁场的影响很小，可以近似认为  $B_{rm}$ 、 $B_{zm}$  不随频率变化，所以此时电涡流阻尼非线性完全来源于动磁场的相位延迟；当  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  均为 0 时，阻尼器即为线性黏滞阻尼器。在高频振动工况下，反抗磁场急剧增大，对静磁场的影响不可忽略，此时的电涡流阻尼非线性来源于动磁场相位延迟与反抗磁场对静磁场影响的共同作用。

### 3 简化计算方法的验证与结果分析

有限元法具有计算场域边界适应能力强、网格剖分灵活、易于满足不同媒介分界面的边界条件等优点，已成为解决实际电磁场问题最为常用的数值计算方法。本节采用 COMSOL Multiphysics 软件建立电涡流阻尼器的力-电-磁-固耦合分析模型，对上一节的简化计算方法进行验证，并对有限元仿真计算结果进行进一步的分析。

#### 3.1 有限元模型的建立

基于 COMSOL 软件，建立板式电涡流阻尼器的二维轴对称几何模型如图 10 所示，其中  $r=0$  为对称轴，灰色区域为空气域，蓝色区域为永磁体和铜板，铜板半径为 10 cm，厚度为 2 cm，永磁体半径为 3 cm，厚度为 1 cm，铜磁间距为 2 mm；永磁体沿  $z$  方向磁化的剩余磁通密度为 1.35 T；设定永磁体做  $z$  方向的简谐运动，振幅为 1 mm，运动频率为 1~100 Hz。应用 2.3.2 节中的时变电磁场理论并结合动网格分析方法对该几何模型进行有限元仿真计算，得到铜板内部的动态磁场分布以及该板式电涡流阻尼器的阻尼力。

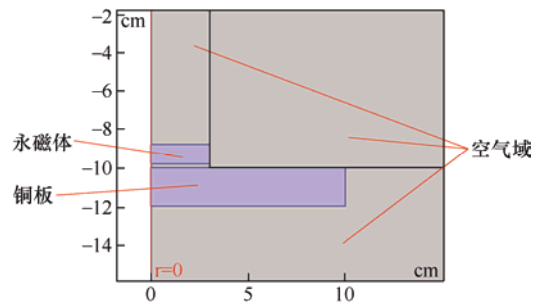


图 10 板式电涡流阻尼器的几何模型图



### 3.2 有限元建模及仿真方法的实验验证

#### 3.2.1 实验系统

限于设备条件无法实现较高频工况下的实验验证, 为了确保有限元模型及仿真方法在磁感线畸变导致的电涡流阻尼高度非线性工况下的计算准确度与有效性, 实验中采用大振幅低频工况来近似替代小振幅高频工况。

以曲柄连杆机构为驱动装置, 用铝合金型材搭建实验系统如图 11 所示。驱动机构的往复运动连杆通过力传感器与永磁体刚性连接, 带动永磁体做竖直方向的周期运动, 其运动位移函数为

$$x = \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2(2\pi ft)} + a \cdot \cos(2\pi ft) - l \quad (63)$$

式中,  $l$  为机构的连杆长度,  $a$  为机构的曲柄半径, 当  $t=0$  时,  $x=a$ , 即永磁体初始位置位于最低点处; 永磁体半径为 3 cm, 厚度为 3 cm, 运动振幅为 10 mm, 运动频率为 2 Hz, 永磁体沿与圆形截面垂直方向磁化的剩余磁通密度为 1.35 T。出于加工方便的考虑, 采用立方体铜板, 正方形截面边长为 20 cm, 厚度为 15 mm; 将铜板放置在高度可调的塑料底座上, 根据不同的实验工况调整铜磁间隙的大小; 保持铜板的重心与永磁体中心在同一条地垂线上, 铜板表面与永磁体表面平行。在永磁体表面适当位置处粘帖单向加速度计。整套实验系统的材质均为非铁磁性材料以减少与实验无关的电磁相互作用对实验结果的影响。实验中采用 M+P 数据采集系统记录实验过程中的电涡流阻尼力以及永磁体运动的加速度。

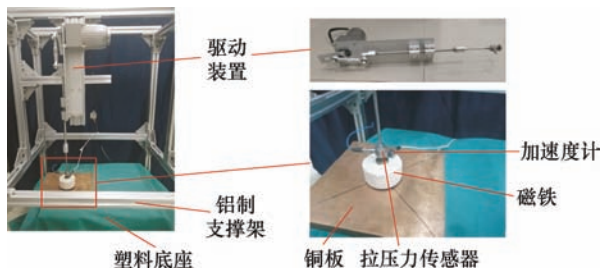


图 11 实验系统

#### 3.2.2 实验结果

对实验记录的结果数据进行处理后, 取铜磁间隙为 2 mm 的工况绘制一个周期内电涡流阻尼力随时间的变化曲线如图 12 中红色虚线所示。同时采用 3.1 节中的有限元建模方法对实验系统进行仿真分析, 仿真模型各参数设置与实验完全相同, 得到一个周期内电涡流阻尼力随时间的变化曲线如图 12 中蓝色实线所示。从实验结果与有限元仿真结果的对比可以发现, 两条曲线中电涡流阻尼力的最大值

和最小值基本相等, 取得最值的时间也基本相同, 验证了有限元建模方法的正确有效。两条曲线的形状在局部有差异的原因在于, 实验中曲柄的转动会受到阻尼力的干扰从而无法严格保持匀速, 导致永磁体的位移-时间函数相比式(63)会出现一定的偏差, 从而影响到最终的实验结果。

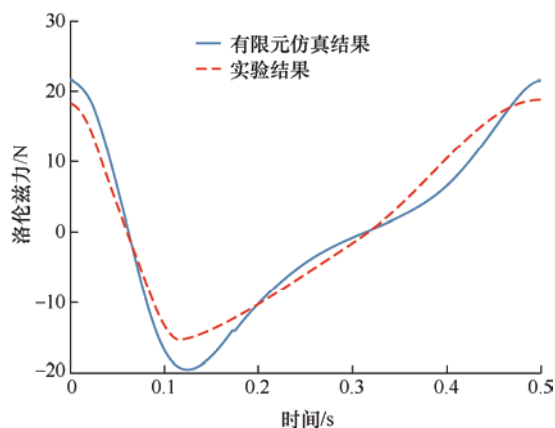


图 12 实验结果与有限元仿真结果的对比图

### 3.3 板式电涡流阻尼器的磁场计算方法验证

#### 3.3.1 静磁场计算方法验证

以图 10 中所示的永磁体模型为研究对象, 由 2.3.1 节中式(22)、(23), 通过数值积分方法计算其中的各个积分项, 得到永磁体周围静磁场的数值解。仅以永磁体位于简谐运动的平衡位置处、最高点处以及最低点处三种工况为例, 取铜板内  $r=3$  cm 处各点, 分别绘制其静磁场的数值计算结果以及有限元仿真结果随该点距铜板上表面的距离的变化曲线, 如图 13、图 15 所示。各工况下永磁体和铜板的几何位置简图如图 14 所示, 其中上部的黑色实线表示平衡位置工况, 上部虚线表示最高点工况, 下部虚线表示最低点工况, 下部的实线表示铜板内  $r=3$  cm 处各点。各工况下数值计算和有限元计算的

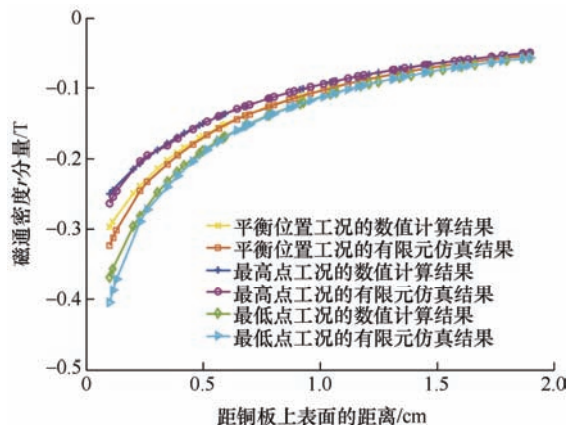


图 13 磁通密度  $r$  分量的数值计算结果与有限元计算结果对比图

磁通密度  $r$  分量和  $z$  分量曲线均基本重合, 在铜板上表面附近两者相差较大的原因在于仿真建模时的零标量磁势面选取为空气域的边界面而不是无穷远处, 使得有限元计算结果偏大。

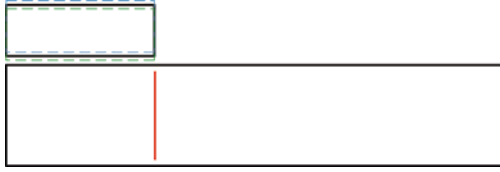


图 14 三种工况下永磁体和铜板的几何位置简图

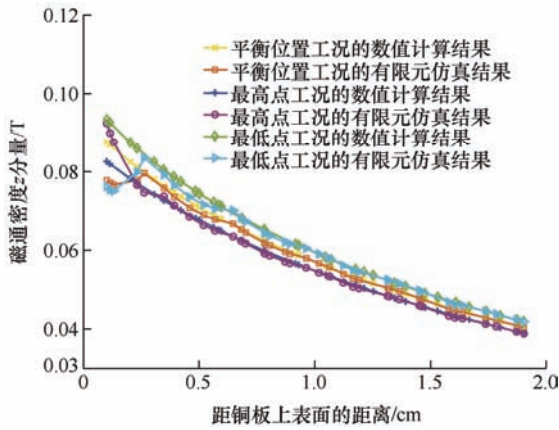


图 15 磁通密度  $z$  分量的数值计算结果与有限元计算结果对比图

### 3.3.2 动磁场简化计算方法验证

以图 10 中所示的阻尼器模型为研究对象, 取铜板内部  $r=3$  cm 铜板上表面处、铜板厚度中心线处、铜板下表面处三点为例, 如图 16 中三个圆点所示。

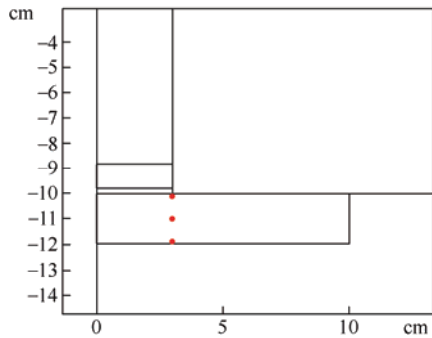


图 16 所取铜板内三点的位置示意图

对于永磁体不同运动频率的工况, 采用有限元仿真方法分别计算出在一个周期内三点处的静磁场、反抗磁场以及动磁场随时间的变化曲线, 并用 2.3.2 节中假设的三角函数对其进行拟合, 部分结果如图 17~19 所示（此处仅以 100 Hz 时铜板厚度中心线处磁通密度  $r$  分量随时间的变化曲线为例），并分别给出其对应的拟合公式及相关系数如下

$$B_{r,sta} = 0.0083\sin(2\pi ft) - 0.1002, R^2 = 0.999 \quad (64)$$

$$B_{r,anti} = 0.01448\sin(2\pi ft - 2.365) + 0.0008559\sin(4\pi ft - 1.308) - 0.001035, R^2 = 1 \quad (65)$$

$$B_r = 0.01036\sin(2\pi ft - 1.768) - 0.1013, R^2 = 0.9965 \quad (66)$$

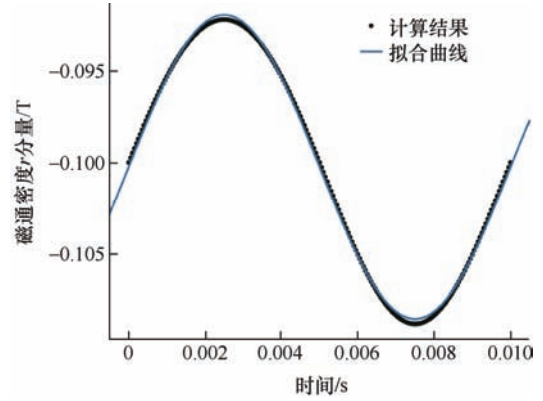


图 17 100 Hz 时铜板厚度中心线处的静磁场随时间的变化曲线

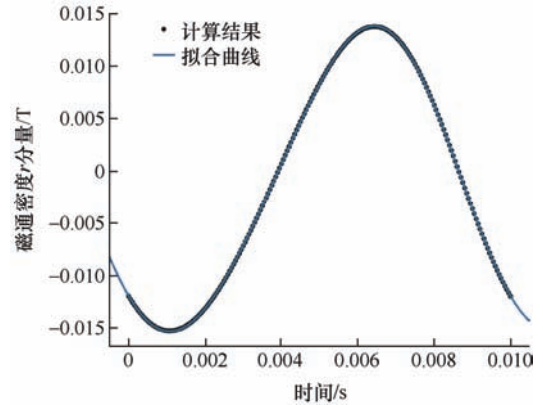


图 18 100 Hz 时铜板厚度中心线处的反抗磁场随时间的变化曲线

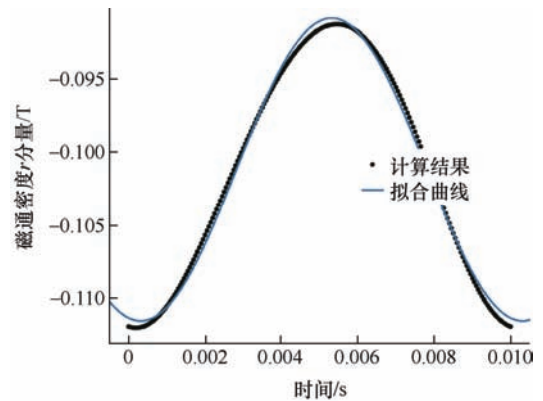


图 19 100 Hz 时铜板厚度中心线处的动磁场随时间的变化曲线

各拟合公式的相关系数均在 0.99 以上, 验证了用相应的三角函数对铜板内各点的磁场时域响应进行近似描述假设的正确有效。同时分别绘制出三个点处动磁场的初相随频率的变化曲线如图 20 所示, 并分别给出其对应的拟合公式及相关系数如下

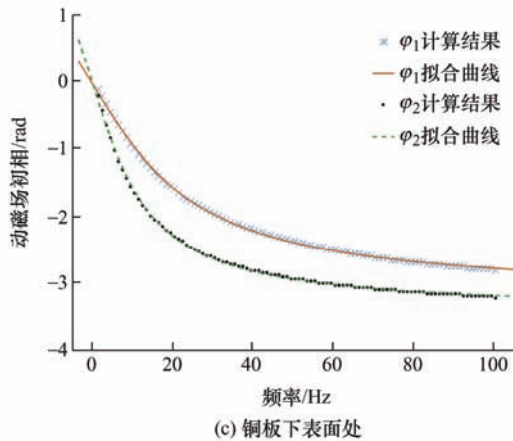
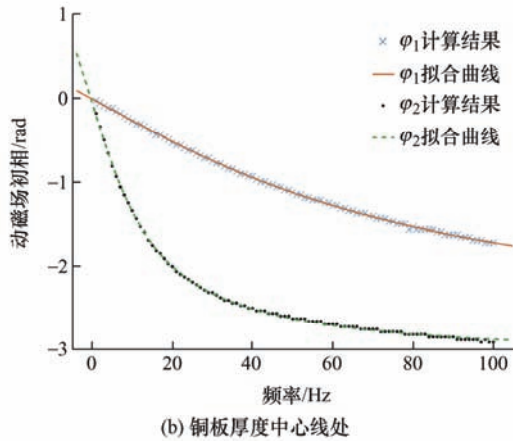
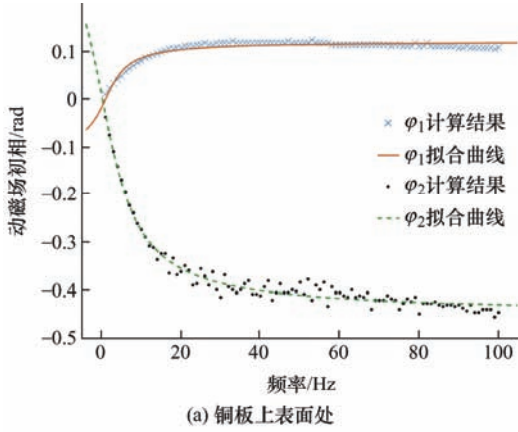


图 20 三点处的动磁场的初相随频率的变化曲线

铜板上表面处

$$\varphi_1 = 0.07607 \tan^{-1}(0.2271f - 0.2342), R^2 = 0.9226 \quad (67)$$

$$\varphi_2 = -0.2862 \tan^{-1}(0.1465f - 0.03051), R^2 = 0.9733 \quad (68)$$

铜板厚度中心线处

$$\varphi_1 = -1.76 \tan^{-1}(0.01485f + 0.008632), R^2 = 0.9995 \quad (69)$$

$$\varphi_2 = -2.0 \tan^{-1}(0.07751f + 0.03141), R^2 = 0.9994 \quad (70)$$

铜板下表面处

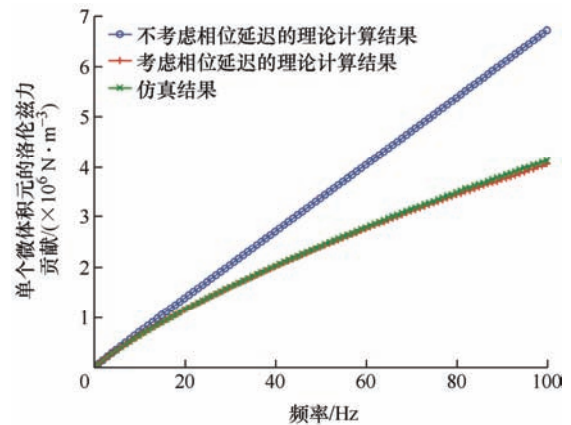
$$\varphi_1 = -2.044 \tan^{-1}(0.04789f + 0.04395), R^2 = 0.9992 \quad (71)$$

$$\varphi_2 = -2.195 \tan^{-1}(0.0871f + 0.05315), R^2 = 0.9991 \quad (72)$$

由于铜板上表面处距离永磁体很近, 动磁场的初相相对很小, 其随频率的变化量也非常微小, 必须对一个周期内的时间步长进行细化处理(这里仅细化为原来的十分之一), 使得最终的拟合效果相对较差, 但相关系数也均在 0.92 以上, 验证了动磁场的初相是频率的函数, 且近似吻合反正切函数关系: 随着频率的增大, 动磁场的初相(取绝对值)逐渐增大, 即发生了磁场的相位延迟; 实际上铜板上表面处的动磁场初相可以近似认为等于零。

### 3.4 电涡流阻尼力简化计算方法验证

同样以距离铜板中心 3 cm 处铜板上表面、铜板中线处、铜板下表面三点为研究对象, 分别绘制出 1~100 Hz 范围内单点洛伦兹力贡献随频率的变化曲线如图 21 所示。可以发现单点洛伦兹力贡献与频率成线性关系, 单点洛伦兹力贡献随频率变化的非线性现象非常明显。相比于不考虑动磁场相位延迟的单点洛伦兹力贡献理论计算结果, 考虑动磁场相位延迟的单点洛伦兹力贡献理论计算结果与仿真计算结果更为接近, 误差均在 10% 以下; 且两者关于频率的非线性非常相似, 验证了单点洛伦兹力贡献简化计算方法的正确有效。





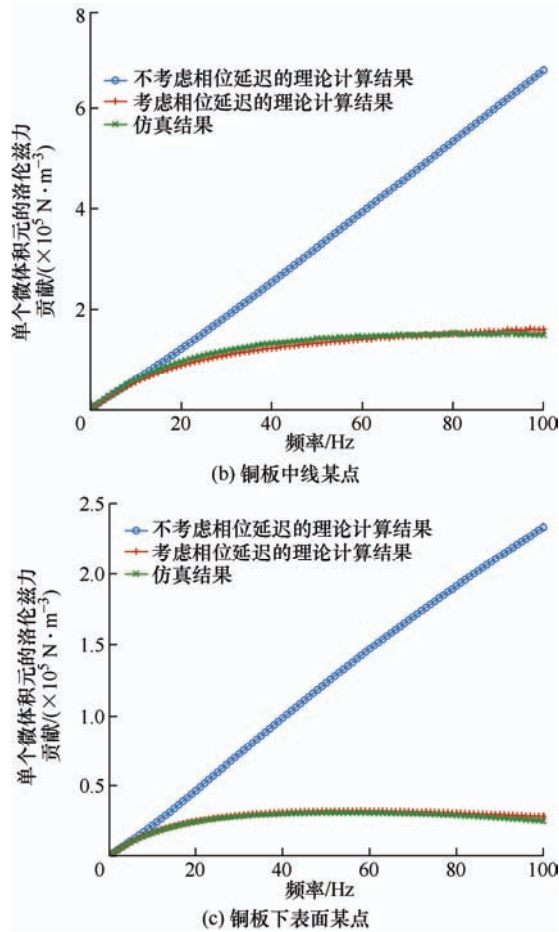


图 21 单点洛伦兹力随频率的变化曲线

### 3.5 结果分析与讨论

由图 20 可知,在低频工况下,导体板内各点的动磁场初相随频率而急剧变化;而当频率增大到一定程度时,导体板内各点的动磁场初相随频率的变化很小,可以近似看作不变。

将有限元仿真分析结果与 2.4 节中由式(62)对电涡流阻尼力来源的理论分析结果相结合,可以进行以下讨论。在低频振动工况下,动磁场的相位延迟随频率增大而迅速增大,而反抗磁场对于静磁场的影响可以忽略,因此动磁场的相位延迟是导致电涡流阻尼力关于频率的非线性的主要原因。在高频振动工况下,动磁场的相位延迟在一较大值附近基本保持不变,其主要作用是使阻尼力大幅衰减,而这种衰减是与频率无关的,对阻尼力的非线性贡献很小,与其变化相反,反抗磁场对于静磁场的影响大大增加,成为电涡流阻尼力非线性现象的主导因素。综上所述,在低频振动范围内,电涡流阻尼的非线性主要受控于频率增大引发的动磁场相位延迟;随着振动频率的持续增大,电涡流阻尼的非线性主要受控于反抗磁场对静磁场的影响。

## 4 结论

本文基于板式构型的电涡流阻尼器,通过采用三角函数对阻尼器内部的时变动态磁场进行定量描述,提出了经有限元仿真及实验验证的电涡流阻尼力简化计算方法;相较于传统的将电涡流阻尼等效为线性黏滞阻尼的简化方法,该方法能够更为有效地表征全频率范围内电涡流阻尼的非线性现象。根据阻尼力简化方法中各组成部分的物理意义,本文进一步阐释了电涡流阻尼关于振动频率的非线性效应机理。在永磁体的简谐运动过程中,由于与永磁体距离的不同,导体板内各微体积元处的动磁场会产生相位延迟。当永磁体在低频范围运动时,动磁场相位延迟随着频率的增大而急剧增大,这种变化使得此时的电涡流阻尼成为非线性阻尼。当永磁体运动频率继续增大时,动磁场相位延迟随频率的增大而基本保持不变,而反抗磁场对于静磁场的影响急剧增加,成为此时阻尼非线性的主要原因,同时动磁场相位延迟的存在仍然使阻尼力大幅衰减。

本文基于时变电磁场理论建立的有限元模型可以为后续更加深入的研究奠定基础,所提出的电涡流阻尼力简化计算方法以及对于电涡流阻尼非线性机理的解释丰富了电涡流阻尼器的设计理论,为进一步优化电涡流阻尼器的性能、更好地利用电涡流阻尼的非线性以及拓宽阻尼器的工作频带以应用于航空航天领域提供了一定的参考。但是,该电涡流阻尼力简化计算方法仅针对导体板内任一微体积元的单点洛伦兹力贡献,对于阻尼器总洛伦兹力的推导以及实验验证工作还需要后续的进一步研究。此外,当电涡流阻尼器的振幅较大时,本文的三角函数假设可能不再适用,对于这一方面的研究有待进行更为深入的探讨。

## 参 考 文 献

- [1] KADER M M A, RAZALI Z B, YASIN N S M, et al. Formation of maximum eddy current force by non ferrous materials[C]//Institute of Physics. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Malaysian Technical Universities Conference on Engineering and Technology, December 6-7, 2017, Penang, Malaysia. London: IOP Publishing Ltd, 2018: 1-9.
- [2] BOURQUIN F, CARUSO G, PEIGNEY M, et al. Magnetically tuned mass dampers for optimal vibration damping of large structures[J]. Smart Materials and



- Structures, 2014, 23(8): 085009.
- [3] 姜寿东. 电涡流调谐质量阻尼器的研究与应用[D]. 大连: 大连理工大学, 2019.
- JIANG Shoudong. Research and application of eddy current tuned mass damper[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2019.
- [4] 王东升. 电涡流阻尼效应的力磁耦合分析研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2019.
- WANG Dongsheng. Force-magnetic coupling analysis of eddy current damping effects[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2019.
- [5] 杨毅青, 徐东东. 基于电涡流阻尼器的数控加工振动抑制[J]. 振动与冲击, 2016, 35(4): 177-187.
- YANG Yiqing, XU Dongdong. Vibration suppression of NC machining based on eddy current dampers[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(4): 177-187.
- [6] 胡颖智. 基于涡流阻尼的高速直驱进给系统振动主动抑制方法研究[D]. 宁波: 中国科学院大学(中国科学院宁波材料技术与工程研究所), 2017.
- HU Yingzhi. Vibration suppression method for high speed direct drive feeding system based on active eddy current damping control[D]. Ningbo: University of Chinese Academy of Sciences (Ningbo Institute of Materials Technology and Engineering), 2017.
- [7] 程明迪, 郭家杰, 李卓, 等. 基于电涡流阻尼的薄壁盘加工振动抑制[J]. 机械工程学报, 2018, 54(17): 76-84.
- CHENG Mingdi, GUO Jiajie, LI Zhuo, et al. Vibration suppression for thin-wall plate machining using eddy current damping[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(17): 76-84.
- [8] 陈政清. 永磁式电涡流调谐质量阻尼器: 中国, CN101761146A[P]. 2010-06-30.
- CHEN Zhengqing. Permanent magnet eddy current tuned mass damper: China, CN101761146A[P]. 2010-06-30.
- [9] 王建辉, 陈政清. 电涡流阻尼调节的大吨位悬臂梁式水平调谐质量阻尼器: 中国, CN102031751A[P]. 2011-04-27.
- WANG Jianhui, CHEN Zhengqing. Large tonnage cantilever beam horizontally tuned mass damper with eddy current damping adjustment: China, CN102031751A[P]. 2011-04-27.
- [10] 汪志昊. 自供电电磁流变阻尼器减振系统与永磁式电涡流 TMD 的研制及应用[D]. 长沙: 湖南大学, 2011.
- WANG Zhihao. Developments and applications of the self-powered magnetorheological damper and TMDs using eddy current damping[D]. Changsha: Hunan University, 2011.
- [11] 汪志昊, 陈政清. 永磁式电涡流调谐质量阻尼器的研制与性能试验[J]. 振动工程学报, 2013, 26(3): 374-379.
- WANG Zhihao, CHEN Zhengqing. Development and performance test of permanent magnet eddy current tuned mass damper[J]. Journal of Vibration Engineering, 2013, 26(3): 374-379.
- [12] WANG Zhihao, CHEN Zhengqing, WANG Jianhui. Feasibility study of a large-scale tuned mass damper with eddy current damping mechanism[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2012, 11(3): 391-401.
- [13] 汪志昊, 华旭刚, 陈政清, 等. 基于微型永电磁式涡流阻尼 TMD 的人行桥模拟减振试验研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(20): 129-132.
- WANG Zhihao, HUA Xugang, CHEN Zhengqing, et al. Experimental study on vibration control of a model footbridge by a tiny eddy-current tuned mass damper with permanent magnets[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(20): 129-132.
- [14] 汪志昊, 陈政清, 王建辉. 钢拱桥刚性细长吊杆减振用调谐质量阻尼器的试验研究[J]. 科学技术与工程, 2013, 13(19): 131-136.
- WANG Zhihao, CHEN Zhengqing, WANG Jianhui. Experimental study on tuned mass dampers for vibration control of rigid slender suspenders in steel arch bridges[J]. Science Technology and Engineering, 2013, 13(19): 131-136.
- [15] 雷旭, 牛华伟, 陈政清, 等. 大跨度钢拱桥吊杆减振的新型电涡流 TMD 开发与应用[J]. 中国公路学报, 2015, 28(4): 60-68.
- LEI Xu, NIU Huawei, CHEN Zhengqing, et al. Development and application of a new-type eddy current TMD for vibration control of hangers of long-span steel arch bridges[J]. China Journal of Highway and Transport, 2015, 28(4): 60-68.
- [16] 陈政清, 黄智文. 一种板式电涡流阻尼器的有限元模拟及试验研究[J]. 合肥工业大学学报, 2016, 39(4): 499-502.
- CHEN Zhengqing, HUANG Zhiwen. Finite element simulation and experimental test of a plane-type eddy current damper[J]. Journal of Hefei University of Technology, 2016, 39(4): 499-502.
- [17] 陈政清, 张弘毅, 黄智文. 板式电涡流阻尼器有限元仿真与参数优化[J]. 振动与冲击, 2016, 35(18): 123-127.
- CHEN Zhengqing, ZHANG Hongyi, HUANG Zhiwen.

- FEM simulation and parameter optimization of a planar eddy current damper[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(18): 123-127.
- [18] 田静莹. 电涡流阻尼器参数分析及应用[D]. 长沙: 湖南大学, 2016.
- TIAN Jingying. Parameter analysis and application of eddy current dampers[D]. Changsha: Hunan University, 2016.
- [19] EBRAHIMI B, KHAMESEEE M B, GOLNARAGHI M F. Design and modeling of a magnetic shock absorber based on eddy current damping effect[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 315(4): 875-889.
- [20] 陈政清, 田静莹, 黄智文, 等. 板式电涡流阻尼系数的计算与试验修正方法[J]. *中国公路学报*, 2016, 29(10): 46-53.
- CHEN Zhengqing, TIAN Jingying, HUANG Zhiwen, et al. Calculation and test correction method of plane type eddy current damping coefficient[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2016, 29(10): 46-53.
- [21] BAE J S, HWANG J H, PARK J S, et al. Modeling and experiments on eddy current damping caused by a permanent magnet in a conductive tube[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2009, 23(11): 3024-3035.
- [22] ZHANG Hongyi, CHEN Zhengqing, HUA Xugang, et al. Design and dynamic characterization of a large-scale eddy current damper with enhanced performance for vibration control[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 34(145): 106879.
- [23] 陈政清, 华旭刚, 牛华伟, 等. 永磁电涡流阻尼新技术及其在土木工程中的应用[J]. *中国公路学报*, 2020, 33(11): 83-100.
- CHEN Zhengqing, HUA Xugang, NIU Huawei, et al. Technological innovations in eddy current damping and its application in civil engineering[J]. *China Journal of Highway and Transport*, 2020, 33(11): 83-100.
- [24] LOONG Chengning, SHAN Jiazeng, SHI Zhiguo, et al. Approximate analysis of eddy-current force under time-varying velocity motion for structural control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 57(475): 115295.
- [25] SHI Zhiguo, SHAN Jiazeng, LOONG Chengning, et al. Experimental and numerical study on dynamic behavior of eddy current damping with frequency dependence[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2020, 146(10): 04020116.
- [26] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- GUO Shuohong. *Electrodynamics*[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2008.
- [27] 王济民, 罗春荣, 陈长乐. 新编大学物理[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2016.
- WANG Jimin, LUO Chunrong, CHEN Changle. *College Physics*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2016.
- [28] 史波涛, 李鹏, 胡伟利. 圆柱形永磁体磁场分布的全椭圆积分形式[EB/OL]. 北京: 中国科技论文在线 [2008-09-23]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200809-643>.
- SHI Botao, LI Peng, HU Weili. Full elliptic integral form of magnetic field distribution of cylindrical permanent magnet[EB/OL]. Beijing: Chinese Scientific Papers Online [2008-09-23]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/200809-643>.
- 
- 作者简介: 李力源, 男, 1998 年出生, 博士研究生。主要研究方向为振动控制。  
E-mail: 2015300398@mail.nwpu.edu.cn
- 李斌(通信作者), 男, 1975 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为飞行器结构强度、振动噪声控制、多物理场耦合行为。  
E-mail: leebin@nwpu.edu.cn