

DOI: 10.3901/JME.2022.19.206

# 不同重合度非圆齿轮设计及弯曲应力分析<sup>\*</sup>

喻永权 林超 胡亚楠

(重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆 400044)

**摘要:** 非圆齿轮传动具有广泛的应用场景。针对非圆齿轮传动,采用齿轮啮合原理和材料力学等原理及方法,提出了大重合度非圆齿轮设计方法。探讨了非圆齿轮传动原理和节曲线构建方法,计算了其节曲线曲率半径和重合度方程。建立了不同重合度非圆齿轮轮齿时变啮合刚度与载荷分配率计算模型,推导了不同重合度非圆齿轮齿根弯曲应力方程。探讨了不同结构参数下非圆齿轮副重合度、时变啮合刚度、时变载荷分配率及齿根弯曲应力变化规律,确定了轮齿所受最大载荷位置。开展了不同重合度非圆齿轮齿根弯曲应力仿真分析和实验测量,与理论计算结果进行了对比分析,最大误差分别约为4.8%和5.9%,验证了理论方法的合理性与正确性,为大重合度非圆齿轮传动的工程应用奠定了基础。

**关键词:** 设计; 非圆齿轮; 重合度; 时变啮合刚度; 载荷分配率; 弯曲应力

**中图分类号:** TH114

## Design and Bending Stress Analysis of Non-circular Gears with Different Contact Ratio

YU Yongquan LIN Chao HU Yanan

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract:** Non-circular gear transmission has a wide range of application scenarios. For the non-circular gear transmission, based on the principle and method of gear engagement and material mechanics, the design method of non-circular gear with high contact ratio is proposed. The principle of non-circular gear transmission and the construction method of pitch curve are discussed. The curvature radius of pitch curve and contact ratio of non-circular gear pair are calculated. The calculation models of time-varying meshing stiffness and load sharing ratio of non-circular gears with different contact ratio are established, and the bending stress equation of tooth root of non-circular gears with different contact ratio is derived. The variation rules of contact ratio, time-varying meshing stiffness, time-varying load sharing ratio and tooth root bending stress of non-circular gear pair under different structural parameters are discussed, and the maximum load position of the gear tooth is determined. The simulation analysis and experimental measurement of tooth root bending stress of non-circular gear with different contact ratio are carried out, and the results are compared with the theoretical calculation results. The maximum errors are about 4.8% and 5.9% respectively, which verified the rationality and correctness of the theoretical method and laid a foundation for the engineering application of non-circular gear transmission with high contact ratio.

**Key words:** design; non-circular gear; contact ratio; time-varying meshing stiffness; load sharing ratio; bending stress

## 0 前言

非圆齿轮是一种能实现主动轮与从动齿轮间非

匀速比传动的机构,因具有经济成本低、结构紧凑、传动比精确、效率高、承载能力强、精度高等优点,广泛应用于农业、纺织和仪器仪表等领域<sup>[1]</sup>。14世纪时高精度非圆齿轮机构就开始应用于天文钟上<sup>[2]</sup>。20世纪后,众多学者相继开展了非圆齿轮研究,在相关设计理论与工程应用方面都取得了较大

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51675060)。20211107收到初稿,20220509收到修改稿

的进展。

国外, LITVIN 等<sup>[3]</sup>针对非圆齿轮的设计及制造进行了研究。MODLER 等<sup>[4]</sup>对非圆齿轮连杆机构进行了机构综合分析, 分析了非圆齿轮连杆机构的类型和机构学特性, 为其应用奠定了理论基础。LIU 等<sup>[5]</sup>研究了非圆齿轮轮系在特定轨迹曲线生成中的应用。MUNDO 等<sup>[6-7]</sup>研究了非圆齿轮行星传动的齿面设计方法、运动特性以及应用场合, 还研究了非圆齿轮 5 连杆机构, 以非圆齿轮为基础对传统 5 连杆机构的连杆曲线进行了优化设计。OTTAVIANO 等<sup>[8]</sup>通过数值计算和实验分析相结合研究了非圆齿轮—凸轮函数发生装置的运动学特性。PETRE 等<sup>[9]</sup>深入研究了变传动比转向器的特性和几何学设计方法。

国内, 吴序堂等对早期的非圆齿轮及非匀速比传动的设计制造与应用进行了详细的研究与介绍<sup>[10]</sup>。刘大伟等<sup>[11]</sup>基于补偿法的思想构建封闭非圆齿轮节曲线, 解决了传动比范围过大引起的根切和压力角过大的缺点。黄忠超等<sup>[12]</sup>应用傅里叶级数和多项式函数法对非圆齿轮的节曲线进行了封闭设计。林超等<sup>[13-14]</sup>研究了根据非圆齿轮衍生出的高阶变椭圆锥齿轮实现变速比传动的数学模型、齿面几何设计和齿面的加工制造方法。郑方焱等<sup>[15-16]</sup>结合非圆齿轮差动轮系的原理和分度装置的运动要求, 提出一种新型非圆齿轮的分度装置, 该装置兼具行星分度凸轮机构大分度的特点, 同时更加紧凑, 零部件更少。林超等<sup>[17]</sup>针对现有的间歇转动机构传动性能的缺陷, 提出一种新型非圆齿轮型间歇转动机构, 并从运动学角度对机构的传动性能进行了分析。李渤涛等<sup>[18]</sup>对近年来结合计算机辅助设计制造技术的非圆齿轮设计、制造、检测及应用等研究领域的常用理论与方法进行了总结, 并一定程度上预测了非圆齿轮领域未来发展方向。

针对齿轮应力计算方法, 也有众多学者进行了相关研究。较早的 LEWIS 悬臂梁法可用于计算齿轮弯曲强度<sup>[19]</sup>。普通圆柱齿轮及其他种类齿轮的弯曲应力计算方法也已写进相应的设计手册<sup>[20]</sup>。LI<sup>[21]</sup>采用有限元法就齿顶高对直齿轮副接触强度、弯曲强度进行了相应的分析, 得到了不同重合度下直齿轮齿根弯曲应力和接触应力的分布规律。HOTAIT 等<sup>[22]</sup>从实验和理论两方面研究了准双曲面齿轮副齿向不对中对齿根应力的影响。他们也针对直齿轮副动态传动误差和动态应力因子之间的关系进行了试验研究, 一定程度上补充了齿轮耐久性和噪声指标之间的关系<sup>[23]</sup>。李纪强等<sup>[24]</sup>对当量齿轮法计算普

通重合度(NCR, 重合度不大于 2)非圆齿轮弯曲应力的可行性进行了研究。方宗德等<sup>[25]</sup>较早地对大重合度(HCR, 重合度大于 2)齿轮的性能进行了计算及试验研究, 分析了其动静特性。李发家等<sup>[26]</sup>针对 HCR 外啮合直齿圆柱齿轮副的齿根弯曲应力进行了研究。CHEN 等<sup>[27]</sup>针对纯滚动齿轮齿条机构的几何设计、啮合仿真及应力分析进行了研究。陈龙等<sup>[28]</sup>采用等几何分析方法实现了一对单齿接触的完整齿轮接触分析, 在分析接触问题时具有计算效率高、速度快、应力场更加光滑等优势。

综上, 非圆齿轮传动有着广阔的应用前景, 而非圆齿轮的失效主要包括轮齿折断、齿面疲劳点蚀、齿面胶合及齿面塑性变形等, 对于载荷较大且易造成轮齿折断的非圆齿轮传动, 需对其齿根弯曲应力进行研究。同时, 针对直齿圆柱等齿轮和 NCR 非圆齿轮弯曲应力也已经有了相应研究, 但针对 HCR 非圆齿轮的设计方法及其齿根弯曲应力探讨较少。HCR 非圆齿轮的齿高一般相对于 NCR 非圆齿轮较大, 易对齿根弯曲应力产生较大影响。因此, 对不同重合度非圆齿轮进行设计及弯曲应力分析, 提高非圆齿轮承载能力, 扩大其应用场合, 具有重要的理论意义及工程实用价值。

## 1 不同重合度非圆齿轮设计

非圆齿轮的弯曲承载能力对非圆齿轮的应用起着重要的作用, 而其弯曲承载能力又与重合度紧密相关。当非圆齿轮副重合度改变, 其轮齿齿高及受载情况也随之产生变化, 从而对其齿根弯曲承载能力产生影响, 故需对不同重合度的非圆齿轮副进行设计并计算分析其齿根弯曲应力变化规律。

### 1.1 非圆齿轮传动原理和节曲线

非圆齿轮副传动如图 1 所示,  $O_1-X_1Y_1$  和  $O_2-X_2Y_2$  分别为主从动非圆齿轮坐标系,  $O_1$  和  $O_2$  为回转中心,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别为主从动轮回转角度,  $r_1(\theta_1)$  和  $r_2(\theta_2)$  分别为主从动轮节曲线,  $E$  为中心距,  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别为主从动轮的角速度。

设任意非圆齿轮传动比函数为

$$i_{12}(\theta_1) = \begin{cases} i_1(\theta_1), [0, \theta_x] \\ i_2(\theta_1), [\theta_x, \theta_T] \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $i_1(\theta_1)$  为非圆齿轮副工作(传递运动和动力)区间  $[0, \theta_x]$  上所给定的传动比函数,  $\theta_T$  为传动比周期,

$i_2(\theta_1)$ 是为保证节曲线的完整性,结合文献[12]构造过渡(只传递运动不传递动力)区间 $[\theta_x, \theta_T]$ 上的传动比函数。

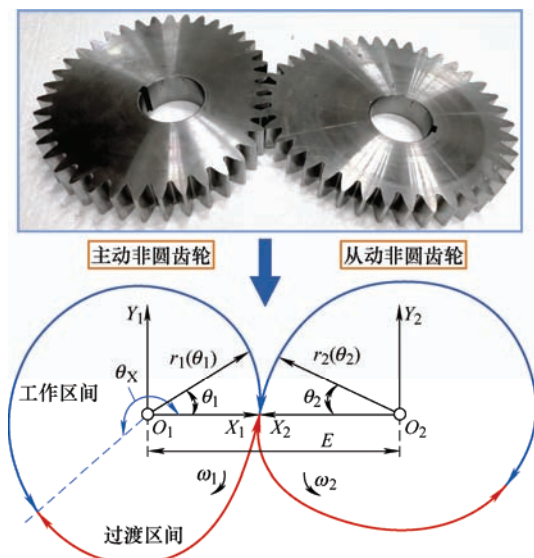


图 1 非圆齿轮传动坐标系

非圆齿轮节曲线封闭条件为

$$\begin{cases} \int_{\theta_x}^{\theta_T} 1/i_2(\theta_1) d\theta_1 = \frac{2\pi}{n_2} - \int_0^{\theta_x} 1/i_1(\theta_1) d\theta_1 \\ i_1(\theta_x) = i_2(\theta_x), i_1(0) = i_2(\theta_T) \\ i_1'(\theta_x) = i_2'(\theta_x), i_1'(0) = i_2'(\theta_T) \\ i_1''(\theta_x) = i_2''(\theta_x), i_1''(0) = i_2''(\theta_T) \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $\theta_T=2\pi/n_1$ , 正整数  $n_1$  为传动比周期数,  $n_2$  为正整数。 $i_1'(\theta_1)$ 、 $i_1''(\theta_1)$ 和  $i_2'(\theta_1)$ 、 $i_2''(\theta_1)$ 分别为  $i_1(\theta_1)$  和  $i_2(\theta_1)$ 关于  $\theta_1$ 的一阶导数和二阶导数。

$i_1(\theta_1)$ 和  $i_2(\theta_1)$ 均为周期为  $\theta_T$ 的周期函数,  $i_2(\theta_1)$ 可表示为

$$i_2(\theta_1) = 1 / \sum_{k=0}^{m_k} \left\{ c_k [\theta_1 - (j-1)\theta_T]^k \right\} \quad (3)$$

式中,  $m_k$ 为多项式函数指数,  $c_k$ 为多项式函数系数,  $j=1,2,\dots$ 。结合文献[12],取  $m_k=6$ ,可求解出  $c_k$ ,从而求得传动比函数  $i_{12}(\theta_1)$ 。非圆齿轮节曲线以极坐标形式表示为

$$\begin{cases} r_1(\theta_1) = \frac{E}{1+i_{12}(\theta_1)} \\ r_2(\theta_1) = \frac{E i_{12}(\theta_1)}{1+i_{12}(\theta_1)} \end{cases} \quad \theta_2 = \int_0^{\theta_1} 1/i_{12}(\theta) d\theta \quad (4)$$

取  $i_1(\theta_1)=1/(a\theta_1+b)$ , 中心距为 156.4 mm, 采用表 1 中的不同结构参数绘制传动比及主从动轮节曲

线如图 2 所示。

表 1 非圆齿轮副节曲线结构参数

非圆齿轮副	系数 $a$	系数 $b$	齿轮 1 阶数 $n_1$	齿轮 2 阶数 $n_2$
1	$6/11\pi$	$2/3$	1	1
2	$3/8\pi$	$3/11$	1	2
3	$3/5\pi$	$3/4$	2	2
4	$5/6\pi$	$2/5$	2	3

由图 2 可知,随着非圆齿轮副节曲线结构参数的变化,其节曲线均封闭,且与传动比函数均呈现出周期性变化规律。每当传动比周期性变化  $n_1$  次时,主动非圆齿轮节曲线周期性变化  $n_1$  次,从动非圆齿轮节曲线周期性变化  $n_2$  次。

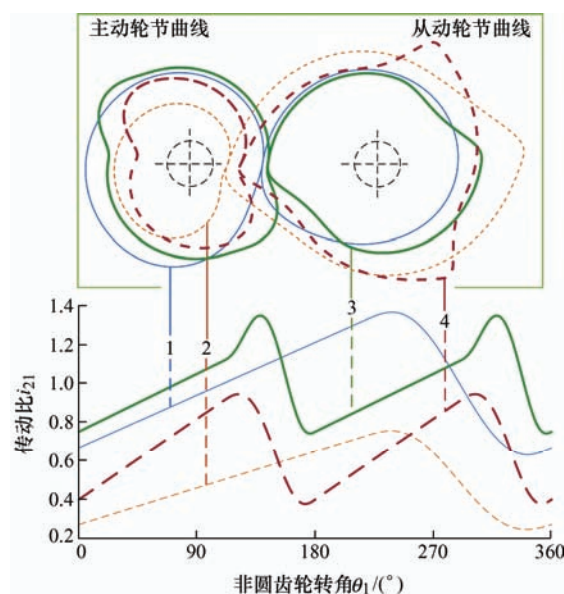


图 2 不同节曲线结构参数下非圆齿轮副节曲线

## 1.2 节曲线曲率半径

非圆齿轮节曲线曲率半径对非圆齿轮齿形加工、轮齿时变啮合刚度及齿根弯曲应力等有着重要影响,故需要对其进行计算分析。若节曲线上任意一点曲率半径  $\rho>0$ ,则节曲线为凸形,可用滚刀、齿条刀或插齿刀加工。若  $\rho<0$ 则节曲线为凹形,则不能用滚刀和齿条刀加工。以极坐标  $r=r(\theta)$ 表示节曲线时,曲率半径可表示如下

$$\rho(\theta) = \frac{[r^2(\theta) + (r'(\theta))^2]^{3/2}}{r^2(\theta) + 2(r'(\theta))^2 - r(\theta)r''(\theta)} \quad (5)$$

式中,  $r'(\theta)=dr(\theta)/d\theta$ ,  $r''(\theta)=d^2r(\theta)/d\theta^2$ 。

代入参数可计算得非圆齿轮节曲线曲率半径为

$$\begin{cases} \rho_1(\theta_1) = \frac{E \left[ 1 + \left( \frac{i'_{12}(\theta_1)}{1 + i_{12}(\theta_1)} \right)^2 \right]^{3/2}}{1 + i_{12}(\theta_1) + i''_{12}(\theta_1)} \\ \rho_2(\theta_1) = \frac{E i_{12} \left[ 1 + \left( \frac{i'_{12}(\theta_1)}{1 + i_{12}(\theta_1)} \right)^2 \right]^{3/2}}{1 + i_{12}(\theta_1) + (i'_{12}(\theta_1))^2 - i_{12}(\theta_1) i''_{12}(\theta_1)} \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $\rho_1(\theta_1)$  为主动轮节曲线曲率半径,  $\rho_2(\theta_1)$  为从动轮节曲线曲率半径,  $i'_{12}(\theta_1) = di_{12}(\theta_1)/d\theta_1$ ,  $i''_{12}(\theta_1) = di'_{12}(\theta_1)/d\theta_1$ 。

由式(6)可绘制出表 1 中各非圆齿轮曲率半径如图 3 所示。 $\rho_{1-1}$ 、 $\rho_{2-1}$ 、 $\rho_{1-2}$ 、 $\rho_{2-2}$ 、 $\rho_{1-3}$ 、 $\rho_{2-3}$ 、 $\rho_{1-4}$  和  $\rho_{2-4}$  分别表示类型 1、2、3 和 4 的主、从动轮节曲线曲率半径。可以看出, 除  $\rho_{1-1}$  和  $\rho_{2-1}$  外, 其余曲线均出现了负值, 表明其节曲线出现了凹形。

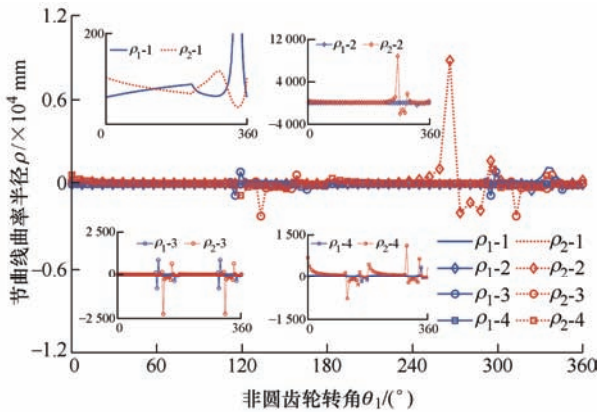


图 3 非圆齿轮节曲线曲率半径

在采用滚刀和齿条刀加工非圆齿轮时, 需要对其节曲线的凹凸性进行判断, 同时结合非圆齿轮齿廓生成方法, 选取合适的参数对其齿廓进行设计及仿真, 以保证非圆齿轮设计的正确性。

### 1.3 非圆齿轮副重合度

非圆齿轮啮合时的重合度为有效啮合长度与齿轮基圆齿距之比。如图 4 所示, 两齿轮节曲线在  $P$  点相切,  $\rho_1(\theta_1)$  和  $\rho_2(\theta_1)$  分别为主、从动非圆齿轮的节曲线曲率半径, 用以  $\rho_1(\theta_1)$  和  $\rho_2(\theta_1)$  为节圆半径的当量圆柱齿轮来计算非圆齿轮重合度,  $\alpha_0$  为啮合线与节曲线在  $P$  点切线的夹角(即刀具齿形角)。

令  $\overline{PB_1} = u_1(\theta_1)$ ,  $\overline{PB_2} = u_2(\theta_1)$ , 则有<sup>[10]</sup>

$$\varepsilon(\theta_1) = \frac{u_1(\theta_1) + u_2(\theta_1)}{p_b} \quad (7)$$

式中,  $p_b = \pi m \cos \alpha_0$  为当量齿轮基圆齿距;

$u_1(\theta_1) = [(\rho_1(\theta_1) + h_{a1})^2 - (\rho_1(\theta_1) \cos \alpha_0)^2]^{1/2} - \rho_1(\theta_1) \sin \alpha_0$ ,  $u_2(\theta_1) = [(\rho_2(\theta_1) + h_{a2})^2 - (\rho_2(\theta_1) \cos \alpha_0)^2]^{1/2} - \rho_2(\theta_1) \sin \alpha_0$ ,  $m$  为主、从动非圆齿轮模数。

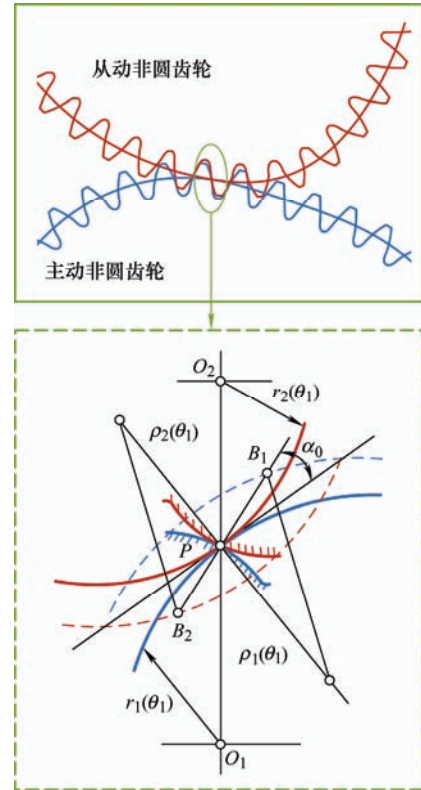


图 4 非圆齿轮副重合度计算

以表 1 中非圆齿轮副 1 为例, 当  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,  $h_a^*$  分别为 1 和 1.25 时, 对应的 NCR 和 HCR 非圆齿轮副在工作区间内的重合度随转角变化如图 5 所示。从整体来看, HCR 非圆齿轮重合度约为 2.1, NCR 非圆齿轮重合度约为 1.7, 两者均无明显波动。从局部放大可知, 随着转角  $\theta_1$  的变化, HCR 和 NCR 非圆齿轮的重合度均先增大后减小, 这是受节曲线上各点曲率半径影响所致。

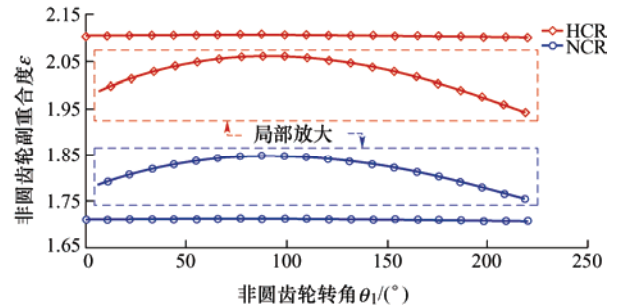


图 5 NCR 和 HCR 非圆齿轮副重合度随转角变化规律

将计算所得非圆齿轮副重合度最小值提取出来, 讨论模数、齿顶高系数和刀具齿形角对其影响, 如图 6 所示。



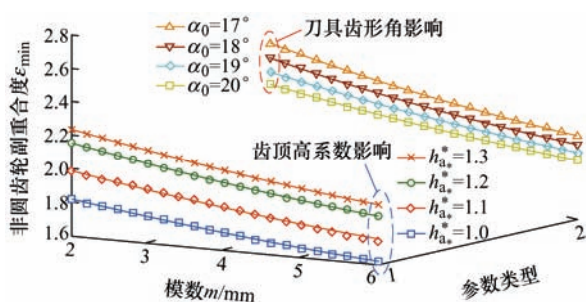
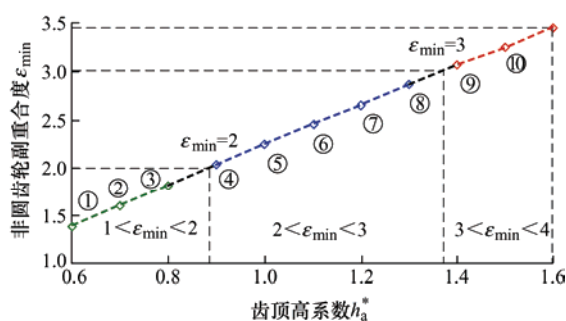


图 6 模数、齿顶高系数和刀具齿形角对重合度影响

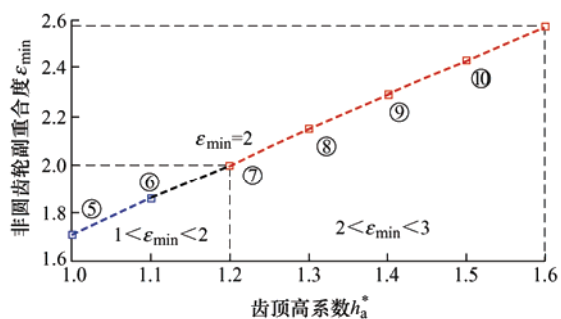
由图 6 可知, 非圆齿轮重合度随模数的增大而减小, 随刀具齿形角的增大而减小, 随齿顶高系数的增大而增大。通过选取合适的模数、刀具齿形角与齿顶高系数, 可使非圆齿轮副重合度大于 2, 同

表 3 齿顶高系数与重合度

举例		非圆齿轮副									
		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
I 型	齿顶高系数 $h_a^*$	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
	全齿高/mm	1.45	1.65	1.85	2.05	2.25	2.45	2.64	2.85	3.05	3.25
	最小重合度 $\varepsilon_{\min}$	1.38	1.60	1.81	2.03	2.24	2.45	2.65	2.86	3.07	3.25
II 型	齿顶高系数 $h_a^*$					1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
	全齿高/mm		—			9	9.8	10.6	11.4	12.2	13.0
	最小重合度 $\varepsilon_{\min}$					1.71	1.86	2.00	2.15	2.29	2.43



(a) I 型非圆齿轮副



(b) II 型非圆齿轮副

图 7 非圆齿轮副齿顶高系数与重合度

由表 3 和图 7 可知, 对于 I 型非圆齿轮副, 由于模数和刀具齿形角均较小, 非圆齿轮副重合度变

时结合非圆齿轮齿廓设计方法, 实现 HCR 非圆齿轮的设计。

为具体分析齿顶高系数对非圆齿轮副重合度的影响, 以具有非圆齿轮副 1 的节曲线结构参数但模数和刀具齿形角不同的两对齿轮副为例, 对其最小重合度进行分析, 所选具体参数见表 2, 非圆齿轮副重合度计算结果见表 3 和图 7。

表 2 两例非圆齿轮副参数

举例	模数 $m/\text{mm}$	齿数	刀具齿形角 $\alpha_0/^\circ$	顶隙系数	弹性模量/GPa	泊松比	负载 $T_2/\text{N}\cdot\text{m}$
I 型	1	39/39	16	0.25	210	0.3	50
II 型	4		20				200

化较大。当  $h_a^*$  为 0.6~0.8 时, 其重合度变化范围为  $1 < \varepsilon_{\min} < 2$ , 非圆齿轮啮合状态为双对齿和单对齿交替啮合; 当  $h_a^*$  为 0.9~1.3 时, 其重合度变化范围为  $2 < \varepsilon_{\min} < 3$ , 非圆齿轮啮合状态为三对齿和双对齿交替啮合; 当  $h_a^*$  为 1.4~1.5 时, 其重合度变化范围为  $3 < \varepsilon_{\min} < 4$ , 非圆齿轮啮合状态为四对齿和三对齿交替啮合。

对于 II 型非圆齿轮副, 模数和刀具齿形角均取常规值。当  $h_a^*$  为 1~1.1 时, 其重合度变化范围为  $1 < \varepsilon_{\min} < 2$ , 非圆齿轮啮合状态为双对齿和单对齿交替啮合; 当  $h_a^*$  为 1.2~1.5 时, 其重合度变化范围为  $2 \leq \varepsilon_{\min} < 3$ , 非圆齿轮啮合状态为三对齿和双对齿交替啮合。

当重合度取  $\varepsilon_{\min}$  大于 3 时, 非圆齿轮易产生齿顶变尖及根切现象, 一般情况下不宜采用, 故选取重合度在 1~3 之间的非圆齿轮副, 即 NCR 和 HCR 非圆齿轮副的啮合进行后续分析。

NCR 与 HCR 非圆齿轮副啮合状态如图 8 所示。对于 NCR 非圆齿轮, 轮齿啮合接触状态先后为双齿啮合、单齿啮合和双齿啮合, 对应的重合度区域分别为  $(\varepsilon-1)p_b$  和  $(2-\varepsilon)p_b$ ; 对于 HCR 非圆齿轮, 轮齿啮

合接触状态先后为三齿啮合、双齿啮合、三齿啮合、双齿啮合和三齿啮合, 其中三齿啮合区和双齿啮合区对应的重合度区域分别为 $(\varepsilon-2)p_b$ 和 $(3-\varepsilon)p_b$ 。

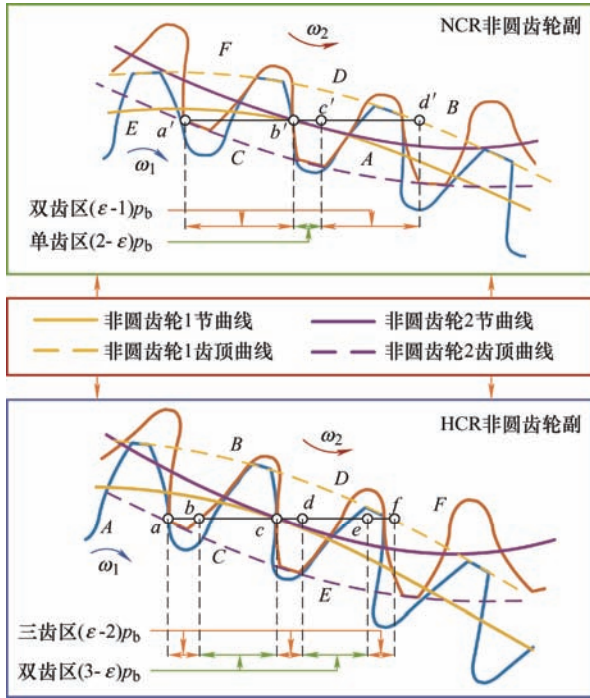


图 8 NCR 与 HCR 非圆齿轮副啮合状态

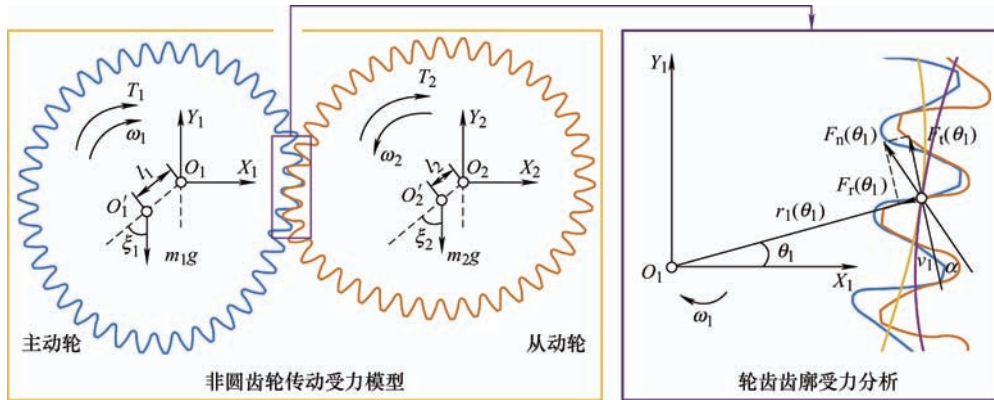


图 9 非圆齿轮传动受力分析

不考虑主从动轮间的摩擦力, 由能量守恒定理有  $P_1=P_2$ 。且主动轮转速恒定, 角加速度  $\beta_1=0$ , 故主动轮转矩为

$$T_1(\theta_1) = \frac{J_2\beta_2 + T_2 - m_2gl_2 \sin \xi_2}{i_{12}(\theta_1)} + m_1gl_1 \sin \xi_1 \quad (9)$$

则非圆齿轮轮齿齿廓所受力如下

$$\begin{cases} F_t(\theta_1) = \frac{T_1(\theta_1)}{r_1(\theta_1)} \\ F_r(\theta_1) = F_t(\theta_1) \tan \alpha \\ F_n(\theta_1) = \frac{F_t(\theta_1)}{r_1(\theta_1) \cos \alpha} \end{cases} \quad (10)$$

## 2 非圆齿轮传动受力分析

齿轮传动在润滑条件较好时, 可适当忽略啮合轮齿间的摩擦力。在暂不考虑摩擦力的影响下, 以非圆齿轮副 1 为例进行传动受力分析, 如图 9 所示。 $O_1-X_1Y_1$  和  $O_2-X_2Y_2$  分别为主从动轮坐标系,  $O_1$  和  $O_2$  为回转中心,  $O'_1$  和  $O'_2$  为质心,  $l_1$  和  $l_2$  为回转中心与质心距离,  $m_1$  和  $m_2$  为质量。 $T_1$  和  $T_2$  分别主从动轮所受转矩,  $\omega_1$  和  $\omega_2$  为角速度。 $r_1(\theta_1)$  为主动轮节曲线半径,  $\theta_1$  为主动轮转角,  $F_t(\theta_1)$ ,  $F_r(\theta_1)$  和  $F_n(\theta_1)$  分别为主动轮齿廓所受切向力, 径向力和法向力。 $v_1$  为主动轮啮合点速度,  $\alpha$  为非圆齿轮副压力角。

由机械系统动力学可知, 主、从动非圆齿轮所具有功率满足条件如下

$$\begin{cases} P_1 = J_1\beta_1\omega_1 + T_1\omega_1 - m_1gl_1 \sin \xi_1\omega_1 \\ P_2 = J_2\beta_2\omega_2 + T_2\omega_2 - m_2gl_2 \sin \xi_2\omega_2 \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $P_1$  和  $P_2$  分别为主从动轮所具有的功率,  $J_1$  和  $J_2$  分别为主、从动轮转动惯量。

式中,  $J_2 = \iiint_V r_2^2(\theta_1) dm_2$  为从动轮转动惯量。当轮齿右齿廓工作时,  $\alpha = \mu + \alpha_0 - \pi/2$ ; 当轮齿左齿廓工作时,  $\alpha = -\mu + \alpha_0 - \pi/2$ 。 $\mu = \arctan[r_1(\theta_1)/r'_1(\theta_1)] (0 \leq \mu \leq \pi)$  表示节曲线  $r_1(\theta_1)$  在纯滚动点  $P$  处的切线与径矢  $O_1P$  之间的夹角。 $\beta_2 = -\omega_1^2 i'_{12}(\theta_1)/i_{12}^2(\theta_1)$  为从动轮角加速度。

## 3 HCR 非圆齿轮齿根弯曲应力

关于 NCR 非圆齿轮齿根弯曲应力已经有了相关研究<sup>[24]</sup>。对于 HCR 非圆齿轮齿根弯曲应力, 采

用当量齿轮法进行计算。在 HCR 非圆齿轮进行弯曲应力分析的位置, 计算出主、从动非圆齿轮节曲线曲率半径, 并依此曲率半径为节圆半径, 求出与非圆齿轮模数相同的当量圆柱齿轮, 其齿形与非圆齿轮极为接近, 可代替非圆齿轮计算轮齿时变啮合刚度及载荷分配。结合非圆齿轮轮齿受力分析, 计算当量齿轮齿根弯曲应力, 并将其作为非圆齿轮的齿根弯曲应力。

### 3.1 HCR 齿轮时变啮合刚度

齿轮啮合刚度是齿轮强度和动力学研究的重要组成部分, 直接影响齿轮载荷分配和承载能力的计算准确性。结合文献[25]关于 HCR 圆柱齿轮的刚度计算, 采取当量齿轮法对 HCR 非圆齿轮轮齿的变形和时变啮合刚度进行计算。将单个轮齿简化为非均匀悬臂梁模型, 计算其变形, 如图 10 所示。

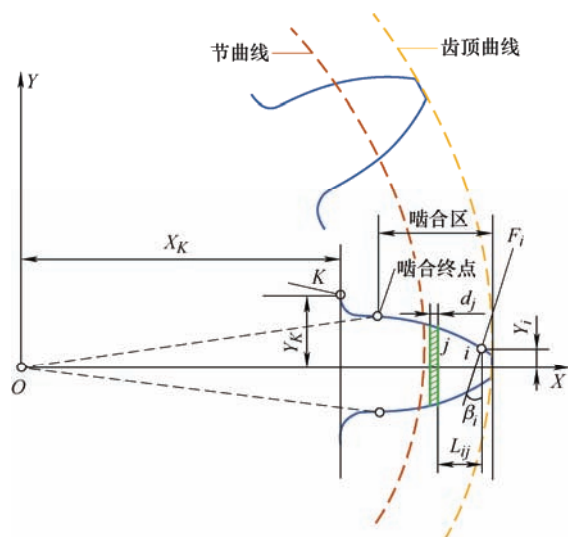


图 10 HCR 非圆齿轮轮齿变形计算

轮齿关于通过齿顶中心和圆心的直线对称,  $F_i$  为载荷作用点  $i$  传递的载荷。轮齿的有效接触区域沿对称轴线被分为一系列长方形微单元, 用  $j$  表示, 计算微单元  $j$  在法向载荷作用下轮齿变形、基体变形和齿面接触变形<sup>[26]</sup>。则载荷作用于  $i$  点时轮齿的总变形量为

$$\delta_i = \delta_{bi} + \delta_{si} + \delta_{pi} + \delta_{gi} + \delta_{hi} \quad (11)$$

式中,  $\delta_{bi}$  为轮齿的弯曲变形;  $\delta_{si}$  为轮齿的剪切变形;  $\delta_{pi}$  为轮齿的压缩变形;  $\delta_{gi}$  为基体变形;  $\delta_{hi}$  为轮齿的齿面接触变形。

#### ① 弯曲变形 $\delta_{bi}$

$\delta_{bi}$  为齿轮在法向载荷平行于  $Y$  轴的分量和附加

弯矩的作用下的弯曲变形, 轮齿的载荷作用点  $i$  的弯曲变形量为

$$\delta_{bi} = \sum_{j=1}^k \frac{F_i}{E_e I_j} \left\{ \cos^2 \beta_i \left( \frac{d_j^3}{3} + d_j^2 L_{ij} + \frac{d_j L_{ij}^2}{2} \right) - \cos \beta_i \sin \beta_i \left( \frac{d_j^2 Y_i}{2} + d_j Y_i L_{ij} \right) \right\} \quad (12)$$

式中,  $Y_i$  为  $i$  点处的轮齿半齿厚;  $d_j$  为微单元  $j$  的厚度;  $k$  为微单元的总数;  $I_j$  为惯性矩;  $L_{ij}$  为载荷作用点  $i$  点与微单元  $j$  点沿  $X$  轴距离;  $\beta_i$  为载荷  $F_i$  与  $Y$  轴的夹角;  $E_e$  为有效弹性模量。

#### ② 剪切变形 $\delta_{si}$

$\delta_{si}$  为轮齿在法向载荷切向分量作用下的变形,  $i$  点剪切变形量为

$$\delta_{si} = \sum_{j=1}^k \frac{12 F_i d_j (\cos \beta_i)^2 (1 + \nu)}{5 E_e A_j} \quad (13)$$

式中,  $A_j$  为横截面积;  $\nu$  为泊松比。

#### ③ 压缩变形 $\delta_{pi}$

$$\delta_{pi} = \sum_{j=1}^k \frac{F_i d_j}{E_e A_j} (\sin \beta_i)^2 \quad (14)$$

#### ④ 基体变形 $\delta_{gi}$

$$\delta_{gi} = \frac{F_i (\cos \beta_i)^2}{b_e E_e} \left[ 5.306 \left( \frac{L_f}{2 Y_K} \right)^2 + 2 \gamma_V \left( \frac{L_f}{2 Y_K} \right) + 1.534 \left( 1 + \frac{0.4167 \tan \beta_i}{1 + \nu} \right) \right] \quad (15)$$

式中,  $L_f$  为载荷作用点  $i$  到过过渡曲线和齿根圆交点与渐开线延长线和齿根圆交点之间的中点  $K$  点的  $X$  轴距离;  $b_e$  为有效齿宽,  $L_f = X_i - X_K - Y_i \tan \beta_i$ ,  $X_K$  为  $K$  点与  $X$  轴的距离,  $Y_K$  为  $K$  点与  $Y$  轴的距离,  $\gamma_V$  为齿宽影响系数。

#### ⑤ 齿面接触变形 $\delta_{hi}$

设  $\kappa_1(\theta_1)$  和  $\kappa_2(\theta_1)$  为主动轮与从动轮接触点的曲率半径, 由 Hertz 理论<sup>[29]</sup>知, 轮齿接触区域的变形为

$$\delta_{hi}(\theta_1) = \frac{2 \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) F_i \kappa_{2i}(\theta_1)}{\pi b_e (\kappa_{1i}(\theta_1) + \kappa_{2i}(\theta_1))} \quad (16)$$

根据上述啮合过程中的变形, 可求得轮齿时变

啮合刚度和齿轮副时变啮合综合刚度为

$$\begin{cases} K_{AB} = \frac{K_A K_B}{K_A + K_B} \\ K_{CD} = \frac{K_C K_D}{K_C + K_D} \\ K_{EF} = \frac{K_E K_F}{K_E + K_F} \\ K_{\Sigma} = K_{AB} + K_{CD} + K_{EF} \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $K_I = q_I / \delta_I$  为啮合过程中单个轮齿的时变啮合刚度,  $I$  表示单个轮齿 A、B、C、D、E 和 F,  $K_{AB}$ 、 $K_{CD}$  和  $K_{EF}$  为齿对的时变啮合刚度,  $K_{\Sigma}$  为齿轮副的

时变啮合综合刚度,  $\delta_I$  为单个轮齿总变形,  $q_I$  为单个轮齿单位齿宽载荷。

啮合过程中轮齿的时变啮合刚度和齿轮副综合刚度的变化规律如图 11 所示。

横坐标表示啮合线上啮合点的位置变化, 从进入啮合到退出啮合。纵坐标表示单对齿啮合刚度和齿轮副综合啮合刚度。 $K_{EF}$ 、 $K_{CD}$ 、 $K_{AB}$ 、 $K_{AB-1}$  和  $K_{AB-2}$  分别代表轮齿 EF、CD、AB、AB 后第一对轮齿和 AB 后第二对轮齿的啮合刚度, 齿轮副时变啮合综合刚度为  $K_{\Sigma}$ 。从啮合起点 a 到啮合终点 f, 处于啮合状态的每对齿的啮合刚度呈现出图 11 所示变化规律。

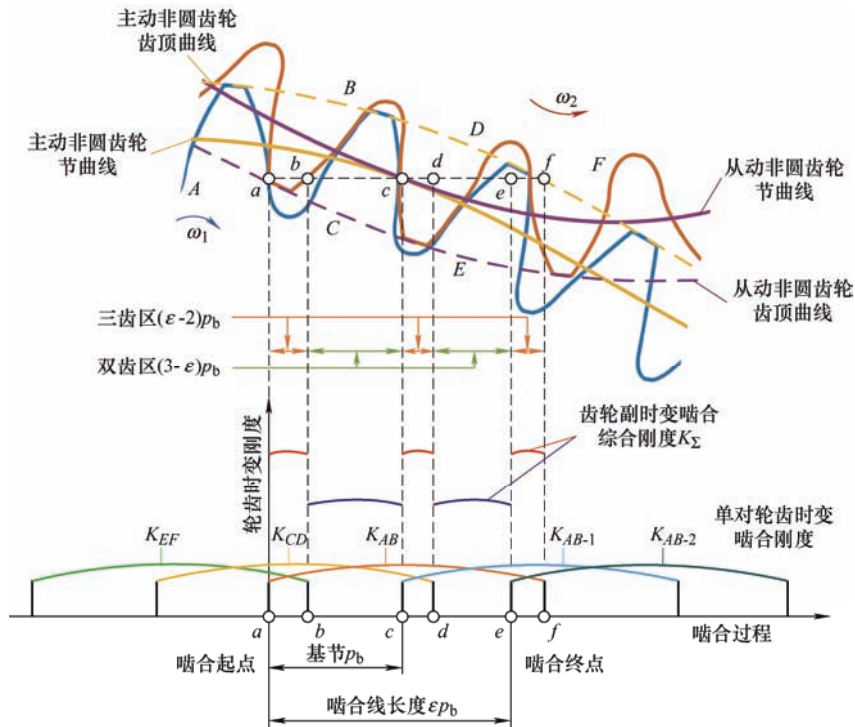


图 11 HCR 非圆齿轮时变啮合刚度

当处于第一个三齿啮合区  $ab$  段时, 轮齿 EF、CD 和 AB 参与啮合,  $K_{\Sigma}$  为  $K_{EF}$ 、 $K_{CD}$  和  $K_{AB}$  三者之和; 当处于第一个双齿啮合区  $bc$  段时, 轮齿 EF 退出啮合,  $K_{\Sigma}$  为  $K_{CD}$  和  $K_{AB}$  两者之和; 当处于第二个三齿啮合区  $cd$  段时, AB 后第一对轮齿参与啮合,  $K_{\Sigma}$  为  $K_{CD}$ 、 $K_{AB}$  和  $K_{AB-1}$  三者之和; 当处于第二个双齿啮合区  $de$  段时, 轮齿 CD 退出啮合,  $K_{\Sigma}$  为  $K_{AB}$  和  $K_{AB-1}$  两者之和; 当处于第三个三齿啮合区  $ef$  段时, AB 后第二对轮齿参与啮合,  $K_{\Sigma}$  为  $K_{AB}$ 、 $K_{AB-1}$  和  $K_{AB-2}$  三者之和。

### 3.2 载荷分配

当 HCR 非圆齿轮多对齿参与啮合时, 每对齿承担的载荷并不等于总载荷, 其与齿轮副刚度及轮齿的误差相关<sup>[25]</sup>。

当三对齿参与啮合时, 每对轮齿承担载荷分别为

$$\begin{cases} F_{AB} = F_{\Sigma} \frac{K_{AB}}{K_{\Sigma 3}} - \frac{K_{AB} K_{CD}}{K_{\Sigma 3}} (e_{AB} - e_{CD}) - \frac{K_{AB} K_{EF}}{K_{\Sigma 3}} (e_{AB} - e_{EF}) \\ F_{CD} = F_{\Sigma} \frac{K_{CD}}{K_{\Sigma 3}} - \frac{K_{CD} K_{AB}}{K_{\Sigma 3}} (e_{CD} - e_{AB}) - \frac{K_{CD} K_{EF}}{K_{\Sigma 3}} (e_{CD} - e_{EF}) \\ F_{EF} = F_{\Sigma} \frac{K_{EF}}{K_{\Sigma 3}} - \frac{K_{EF} K_{AB}}{K_{\Sigma 3}} (e_{EF} - e_{AB}) - \frac{K_{EF} K_{CD}}{K_{\Sigma 3}} (e_{EF} - e_{CD}) \end{cases} \quad (18)$$



当两对齿参与啮合时, 每对轮齿承担载荷分别为

$$\begin{cases} F_{AB} = F_{\Sigma} \frac{K_{AB}}{K_{\Sigma 2}} - \frac{K_{AB}K_{CD}}{K_{\Sigma 2}}(e_{AB} - e_{CD}) \\ F_{CD} = F_{\Sigma} \frac{K_{CD}}{K_{\Sigma 2}} - \frac{K_{CD}K_{AB}}{K_{\Sigma 2}}(e_{CD} - e_{AB}) \end{cases} \quad (19)$$

式(18)和(19)中,  $F_{\Sigma}$  为非圆齿轮副啮合过程中的总载荷, 由前述非圆齿轮传动受力计算可得。

$K_{\Sigma 3}=K_{AB}+K_{CD}+K_{EF}$  为三对齿同时啮合时齿轮副的时变啮合综合刚度,  $K_{\Sigma 2}=K_{AB}+K_{CD}$  为两对齿同时啮合时的总啮合刚度;  $e_{AB}$ 、 $e_{CD}$  和  $e_{EF}$  分别为三对齿的误差, 沿啮合线方向, 与轮齿变形同向取正, 反之取负。

每对齿的刚度和误差都是关于啮合位置的函数, 故每对齿上分担的载荷也是关于啮合位置的函数, 其与总载荷之比即为载荷分配率。当取误差  $e=0$  时, 以 II 型非圆齿轮副⑤和⑧为例(其余齿轮副变化规律类似), 其最小重合度为 1.71 和 2.15, 可计算得 NCR 和 HCR 非圆齿轮静载荷分配率  $q$  的变化如图 12 所示。横坐标  $\tau$  表示啮合线上的啮合位置, 1TC、2TC 和 3TC 分别表示单对齿, 双对齿和三对齿接触。

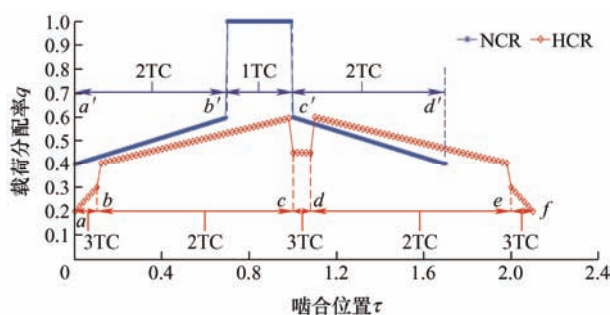


图 12 NCR 和 HCR 非圆齿轮载荷分配率

对于 NCR 非圆齿轮, 轮齿啮合接触状态分别为 2TC、1TC 和 2TC, 载荷分配系数在双齿啮合区变化范围约为 0.4~0.6, 在单齿啮合区则为 1。对于 HCR 非圆齿轮, 轮齿啮合接触状态分别为 3TC、2TC、3TC、2TC 和 3TC, 载荷分配系数在第一个和第三个三齿啮合区变化范围约为 0.2~0.3, 在第二个三齿啮合区约为 0.45, 在双齿啮合区变化范围则约为 0.4~0.6。

### 3.3 HCR 非圆齿轮齿根弯曲应力

根据 HCR 非圆轮齿受力, 载荷分配率及轮齿形状可知, 其齿根弯曲应力在双啮合区某个界点取得最大值。计算载荷作用于各个双齿啮合区界点位置即 b、c、d 和 e 四点处时对应的齿根弯曲应力值, 从而得出最大齿根弯曲应力值及对应的加载位置。轮齿在某界点  $i$  位置的法向载荷为

$$F_{ni}(\theta_1) = q_i F_{\Sigma} \quad (20)$$

式中,  $q_i$  为对应点的载荷分配率,  $F_{\Sigma}$  为啮合时总载荷。

设轮齿的法向载荷沿着齿宽的方向均匀分布, 结合 30°切线法<sup>[20]</sup>确定齿轮弯曲危险截面的位置, 计算单个轮齿齿根弯曲应力, 如图 13 所示。 $\alpha_{Fi}(\theta_1)$  为双齿啮合界点载荷作用角,  $h_i(\theta_1)$  为双齿啮合界点弯曲力臂,  $s(\theta_1)$  为齿根危险截面齿厚。

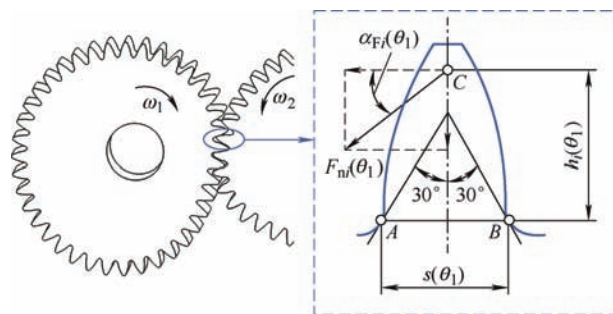


图 13 HCR 非圆齿轮齿根弯曲应力计算

引入 HCR 齿轮啮合界点齿形系数  $Y_{Fi}(\theta_1)$ (即载荷作用于啮合界点处时, 齿形对名义弯曲应力的影响系数)和应力修正系数  $Y_{Si}(\theta_1)$ , 则齿根危险截面的弯曲应力为

$$\sigma_{Fi}(\theta_1) = \frac{F_{ni}(\theta_1) \cos \alpha_0}{b_0 m} Y_{Fi}(\theta_1) Y_{Si}(\theta_1) \quad (21)$$

式中,  $\alpha_0$  为刀具齿形角,  $b_0$  为齿宽,  $m$  为非圆齿轮模数。

#### (1) 齿形系数 $Y_{Fi}(\theta_1)$ 的计算

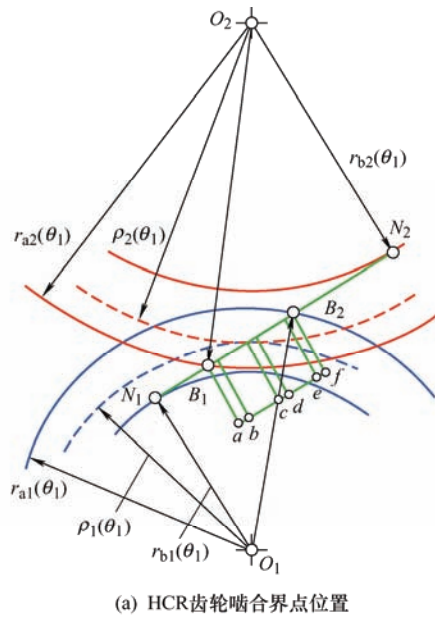
$$Y_{Fi}(\theta_1) = \frac{6h_i(\theta_1)m \cos \alpha_{Fi}(\theta_1)}{s^2(\theta_1) \cos \alpha_0} \quad (22)$$

各个啮合界点的位置关系及载荷角如图 14 所示。图 14a 中,  $\rho_1(\theta_1)$ 、 $r_{a1}(\theta_1)$  和  $r_{b1}(\theta_1)$  分别为非圆齿轮 1 节曲线半径、齿顶曲线半径和基线半径,  $\rho_2(\theta_1)$ 、 $r_{a2}(\theta_1)$  和  $r_{b2}(\theta_1)$  分别为非圆齿轮 2 节曲线半径、齿顶曲线半径和基线半径,  $N_1N_2$  为啮合线。图 14b 中,  $\alpha_i$  为双齿啮合区各个界点对应的压力角,  $\gamma_i$  为双齿啮合区各个界点对应的齿厚半角,  $r_i$  为各个啮合界点的半径,  $\text{inv} \alpha_i$  和  $\text{inv} \alpha_0$  为辅助角,  $\text{inv} \alpha_i = \tan \alpha_i - \alpha_i$ ,  $\text{inv} \alpha_0 = \tan \alpha_0 - \alpha_0$ 。

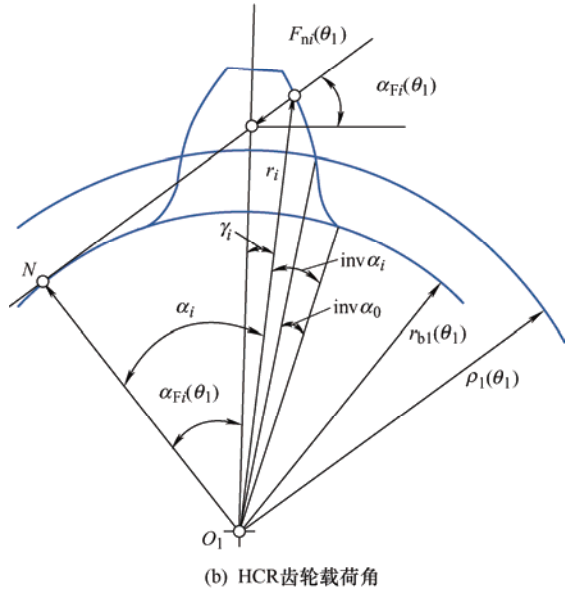
如图 14a 所示, 可得各个啮合界点位置啮合线的长度为

$$\begin{cases} \overline{ef} = (\varepsilon(\theta_1) - 2) p_b \\ \overline{df} = p_b \\ \overline{cf} = (\varepsilon(\theta_1) - 1) p_b \\ \overline{bf} = 2 p_b \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $\varepsilon(\theta_1)$  为非圆齿轮副重合度。



(a) HCR 齿轮啮合界点位置



(b) HCR 齿轮载荷角

图 14 HCR 齿轮啮合界点位置及载荷角

计算得相应计算参数为

$$\begin{cases} \alpha_{Fi}(\theta_1) = \alpha_i - \gamma_i \\ \gamma_i = \frac{1}{Z_1} \left( \frac{\pi}{2} + 2x \tan \alpha_0 \right) + \text{inv} \alpha_0 - \text{inv} \alpha_i \\ \alpha_i = \arccos(r_{bi}(\theta_1) / r_i) \\ r_i = \sqrt{(fN_1 - if)^2 + r_{bi}^2(\theta_1)} \\ fN_1 = \sqrt{r_{a1}^2(\theta_1) - r_{bi}^2(\theta_1)} \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $Z_1$  为主动非圆齿轮齿数,  $x$  为变位系数,  $r_{a1}(\theta_1) = \rho_1(\theta_1) + mh_a^*$ ,  $r_{b1}(\theta_1) = \rho_1(\theta_1) \cos \alpha_0$ 。

则加载界点处的弯曲力臂为

$$h_i(\theta_1) = \frac{m}{2} \left\{ \left( \cos \gamma_i - \sin \gamma_i \tan \alpha_{Fi} \right) \frac{2r_i}{m} - Z_1 \cos \left( \frac{\pi}{3} - \theta_G \right) - \frac{G}{\cos \theta_G} + \frac{\rho_{ap}}{m} \right\} \quad (25)$$

式中,  $\theta_G = \frac{2G}{Z_1} \tan \theta_G - \left[ \frac{2}{Z_1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{L_E}{m} \right) - \frac{\pi}{3} \right]$  为辅助角,

$G = \rho_{ap}/m - h_{ap}/m + x$ ,  $\rho_{ap}$  为刀具齿顶圆角半径,  $L_E = \pi m/4 - h_{ap} \tan \alpha_0 - \rho_{ap}/\cos \alpha_0 + \rho_{ap} \tan \alpha_0$ ,  $h_{ap}$  为刀具基本齿廓齿顶高。

采用 30°切线法计算齿根危险截面齿厚  $s(\theta_1)$  为

$$s(\theta_1) = Z_1 m \sin \left( \frac{\pi}{3} - \theta_G \right) + \sqrt{3} m \left( \frac{G}{\cos \theta_G} - \frac{\rho_{ap}}{m} \right) \quad (26)$$

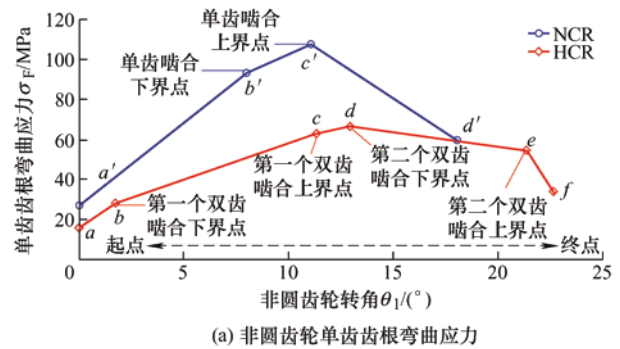
代入双齿啮合区各界点参数, 即可求得对应的齿形系数  $Y_{Fi}(\theta_1)$ 。

(2) 应力修正系数  $Y_{Si}(\theta_1)$

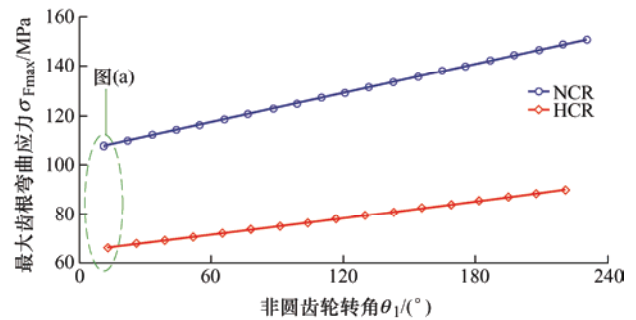
$$Y_{Si}(\theta_1) = (1.2 + 0.13 L_i(\theta_1)) [q_s(\theta_1)]^{\frac{1}{1.21 + 2.3/L_i(\theta_1)}} \quad (27)$$

式中,  $L_i(\theta_1) = s(\theta_1)/h_i(\theta_1)$  为齿根危险截面处齿厚与弯曲力臂的比值,  $q_s(\theta_1) = s(\theta_1)/2\rho_F(\theta_1)$ ,  $\rho_F(\theta_1) = \rho_{ap} + 2G^2/[\cos \theta_G(Z_1 \cos^2 \theta_G - 2G)]$  为 30°切线切点处曲率半径。

取负载  $T_2 = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$  和输入转速  $N_1 = 200 \text{ r/min}$ , 同样以 II 型非圆齿轮副⑤和⑧为例, 对 NCR 和 HCR 主动非圆齿轮啮合过程中的齿根弯曲应力进行计算分析, 如图 15 所示。表 3 中的其它非圆齿轮副的齿根弯曲应力规律与之类似。



(a) 非圆齿轮单齿齿根弯曲应力



(b) 非圆齿轮最大齿根弯曲应力

图 15 NCR 和 HCR 主动非圆齿轮齿根弯曲应力

图 15a 表示从进入啮合到退出啮合单齿的齿根弯曲应力变化规律。对于 NCR 非圆齿轮, 其齿根弯曲应力逐渐增大然后减小, 在  $a'$ 、 $b'$ 、 $c'$  和  $d'$  点的应力值分别为 27.0 MPa、93.4 MPa、107.7 MPa 和 59.7 MPa, 在单齿啮合上界点  $c'$  处取得最大值 107.7 MPa。对于 HCR 非圆主动齿轮, 其齿根弯曲应力亦先增大后减小, 在  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  和  $e$  点的应力值分别为 15.5 MPa、27.8 MPa、62.8 MPa、66.5 MPa、54.6 MPa 和 33.1 MPa, 在第二个双齿啮合下界点  $d$  处取得最大值 66.5 MPa。对于 NCR 和 HCR 非圆齿轮, 啮合终点的弯曲应力值均大于起点, 是因为两点的载荷分配率大致相等, 但啮合终点所对应的轮齿弯曲力臂较起点长, 从而导致弯曲应力值较大。

将工作区间内啮合过程中单个轮齿的最大齿根弯曲应力值提取出来, 如图 15b 所示。对于 NCR 和 HCR 非圆齿轮, 其最大齿根弯曲应力均随着转角的增大而增大, 这是由非圆齿轮的节曲线及齿形共同影响导致。综上, 同工况条件下, HCR 非圆齿轮齿根最大弯曲应力比 NCR 非圆齿轮齿根最大弯曲应力小得多, 能够有效提高轮齿弯曲强度。

同理, 对于从动非圆齿轮齿根弯曲应力, 可采取同样的方法进行计算分析, 结果为: 对于 NCR 从动非圆齿轮, 齿根弯曲应力在单齿啮合下界点  $b'$  处取得最大值; 对于 HCR 从动非圆齿轮, 齿根弯曲应力在第一个双齿啮合上界点  $c$  处取得最大值。之所以与主动非圆齿轮最大齿根弯曲应力对应的界点不同, 是由于啮合点对应的轮齿高度会对齿根弯曲应力产生影响。

## 4 仿真分析及实验测量

### (1) 仿真分析。

为了减少运算量, 将表 3 中不同重合度下非圆齿轮副的五齿模型导入 ANSYS, 进行主动非圆齿轮根弯曲应力仿真。取表 2 中的工况与参数, 给定主动轮转速为 200 r/min, 依次进行材料属性设置、网格划分、载荷及约束设置和应力求解。以 HCR 非圆齿轮(II 型非圆齿轮副⑧)作为详细分析对象, 其在三齿啮合和双齿啮合状态的仿真结果如图 16 所示。

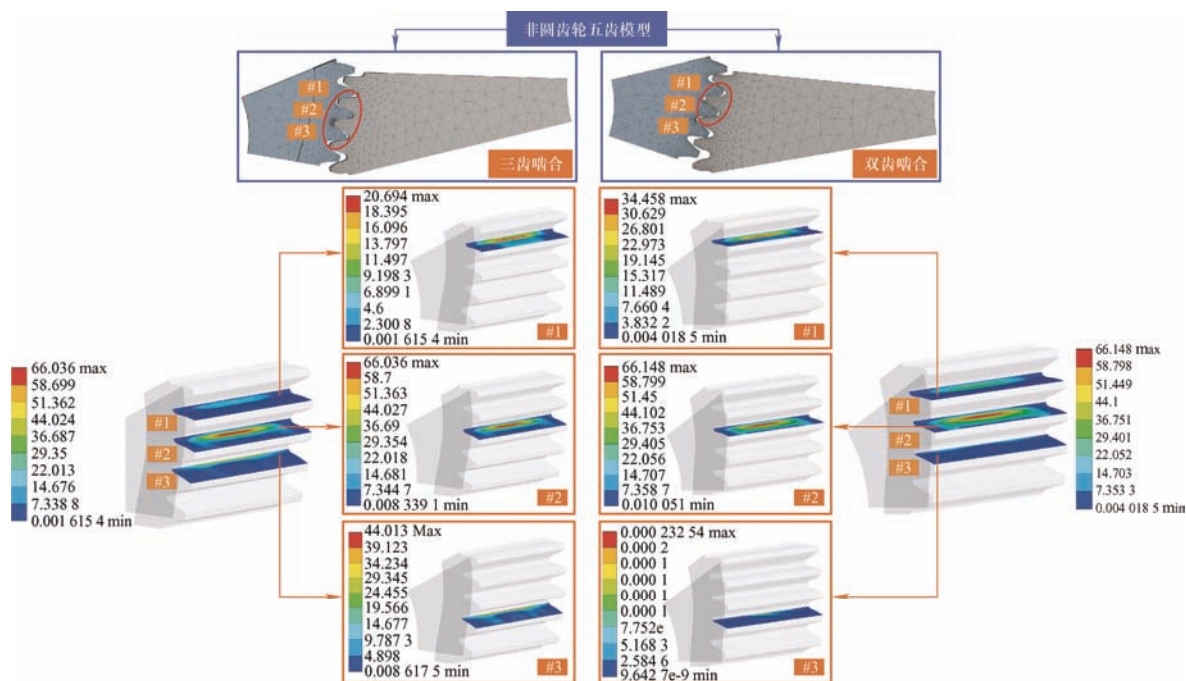


图 16 HCR 非圆齿轮齿根弯曲应力仿真

当三对齿啮合时, #1、#2 和 #3 齿的齿根弯曲应力分别约为 20.7 MPa、66.0 MPa 和 44.0 MPa, 在 #2 齿最大, 在 #1 最小。这是因为此时 #1、#2 和 #3 齿的啮合状态分别与图 15a 中  $ab$ 、 $cd$  和  $ef$  段类似。#2 齿承受载荷最大, #1 和 #3 齿承受载荷相当, 但 #3 齿载荷点所对应轮齿较高, 弯曲力臂较长, 故 #3 齿弯曲应力值较 #1 齿大。当两对齿啮合时, #1、#2

和 #3 齿的齿根弯曲应力分别约为 34.5 MPa、66.2 MPa 和 0 MPa, #2 齿大于 #1 齿。这是因为此时 #1 和 #2 齿的啮合状态分别与图 15a 中  $bc$  和  $de$  段类似。此时两个轮齿承受载荷相当, 但 #2 齿载荷点所对应轮齿较高, 弯曲力臂较长, 故 #2 齿弯曲应力值较 #1 齿大。

按上述方法, 将各非圆齿轮副的最大齿根



弯曲应力仿真值提取出来进行后续分析, 见表 4 所示。

表 4 最大齿根弯曲应力理论、仿真及实验结果对比

举例		非圆齿轮副									
		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
I 型	齿顶高系数 $h_a^*$	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3		
	最小重合度 $\varepsilon_{\min}$	1.38	1.60	1.81	2.03	2.24	2.45	2.65	2.86		
	理论值 $\sigma_{\text{Fmax}}/\text{MPa}$	178.1	186.0	194.3	104.2	110.6	115.9	120.4	124.3		
	仿真值 $\sigma_1/\text{MPa}$	184.9	192.0	201.2	107.9	114.7	119.7	124.9	128.3		—
	仿真误差 $\delta_1$ (%)	3.8	3.2	3.5	3.5	3.7	3.3	3.7	3.2		
	实验值 $\sigma_2/\text{MPa}$	188.5	194.6	205.8	109.5	115.7	121.7	127.1	131.4		
	实验误差 $\delta_2$ (%)	5.8	4.6	5.9	5.1	4.6	5.0	5.6	5.7		
II 型	齿顶高系数 $h_a^*$					1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
	最小重合度 $\varepsilon_{\min}$					1.71	1.86	2.00	2.15	2.29	2.43
	理论值 $\sigma_{\text{Fmax}}/\text{MPa}$					148.0	150.9	86.0	90.1	93.8	97.4
	仿真值 $\sigma_1/\text{MPa}$			—		154.1	157.5	90.1	92.9	97.2	100.4
	仿真误差 $\delta_1$ (%)					4.1	4.4	4.8	3.1	3.6	3.1
	实验值 $\sigma_2/\text{MPa}$					155.1	159.3	90.8	95.3	98.8	101.9
	实验误差 $\delta_2$ (%)					4.8	5.6	5.6	5.8	5.4	4.6

## (2) 实验测量。

根据电阻应变片的工作原理, 搭建非圆齿轮齿根弯曲应力测试实验平台, 其中非圆齿轮精度等级为 8 级。按表 2 中的工况, 给定主动轮转速为 200 r/min, 分别进行 I 型和 II 型非圆齿轮副各主动轮的齿根弯曲应力测量, 如图 17 所示。通过 DRA-30 多通道动静态应变仪获取轮齿齿根部分应变值, 根据应力应变转换公式得到齿根弯曲应力。经数据分析后, 将齿根弯曲应力最大值提取出来, 与仿真及理论结果进行后续对比分析。

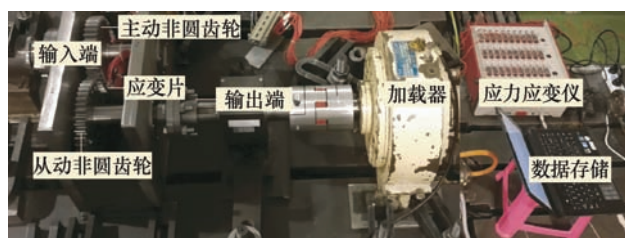


图 17 非圆齿轮齿根弯曲应力测量

## (3) 结果分析。

将各主动非圆齿轮工作区间内最大齿根弯曲应力的理论计算结果、仿真结果和实验结果三者进行对比分析, 结果如表 4 和图 18 所示。误差  $\delta$  计算公

式为

$$\begin{cases} \delta_1 = |\sigma_1 - \sigma_{F\max}| / \sigma_{F\max} \times 100\% \\ \delta_2 = |\sigma_2 - \sigma_{F\max}| / \sigma_{F\max} \times 100\% \end{cases} \quad (28)$$

式中,  $\sigma_{F\max}$ 、 $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为最大齿根弯曲应力理论值、仿真值和实验值。 $\delta_1$  和  $\delta_2$  分别为仿真和实验误差。

由表 4 和图 18 可知, 对于图 18a 中小模数和齿形角的 I 型非圆齿轮副, 在  $1 < \varepsilon_{\min} < 2$  和  $2 < \varepsilon_{\min} < 3$  区域内, 齿根弯曲应力均随着齿顶高系数的增加而增大, 这是因为当接触齿数保持不变时, 齿顶高系数增大使轮齿变长, 导致齿根弯曲应力增大。在重合度  $2 < \varepsilon_{\min} < 3$  区域内的齿根弯曲应力较  $1 < \varepsilon_{\min} < 2$  区域内小, 这是因为随着重合度的增加, 接触齿数变多, 载荷分配率降低, 从而使轮齿所受载荷减小, 齿根弯曲应力减小。仿真和实验结果变化规律与理论计算相符, 最大误差分别为 3.8% 和 5.9%。

对于图 18b 中较大模数和刀具齿形角的 II 型非圆齿轮副, 在  $1 < \varepsilon_{\min} < 2$  和  $2 < \varepsilon_{\min} < 3$  区域内, 齿根弯曲应力均随着齿顶高系数的增加而增大, 这也是因为当接触齿数保持不变时, 齿顶高系数



增大使轮齿变长,导致齿根弯曲应力增大。在重合度  $2 < \varepsilon_{\min} < 3$  区域内的齿根弯曲应力较  $1 < \varepsilon_{\min} < 2$  区域内小,这是因为随着齿顶高系数的增加,虽然轮齿齿高方向变长,但重合度增加,接触齿数变多,载荷分配率降低,轮齿所受载荷减小,且轮齿变长对齿根应力的影响程度较载荷减小程度小得多,故齿根弯曲应力减小。仿真和实验结果变化规律与理论计算相符,最大误差分别为 4.8% 和 5.8%。

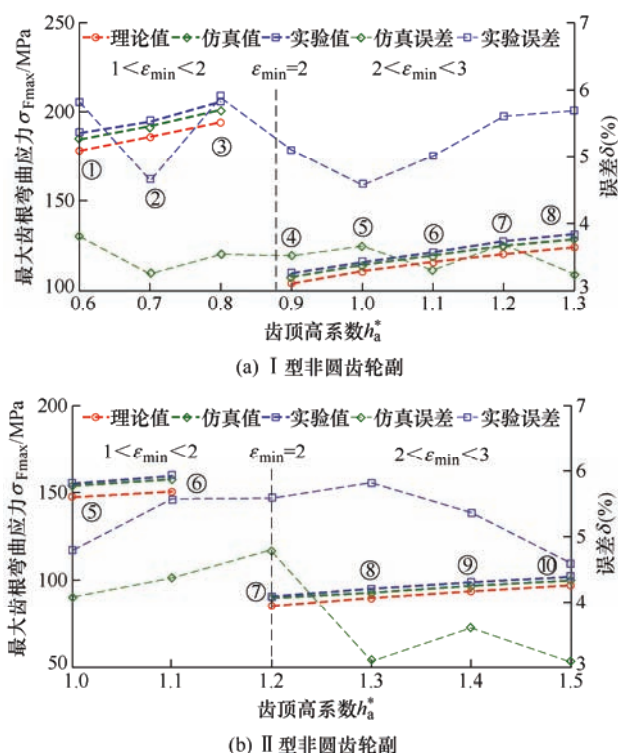


图 18 不同重合度非圆齿轮齿根弯曲应力对比与误差分析

仿真误差主要来源于网格划分精度与求解误差。实验误差主要有非圆齿轮及其他零部件加工误差、装配误差及测量误差。考虑以上因素的影响,仿真及实验误差均在合理误差范围内,表明了理论计算方法的合理性与正确性。

## 5 结论

非圆齿轮的弯曲承载能力对非圆齿轮应用起着重要的作用,通过对不同重合度非圆齿轮的设计及齿根弯曲应力分析。

(1) 非圆齿轮副重合度受节曲线曲率半径、模数、刀具齿形角与齿顶高系数等多因素共同影响,通过选取合适的参数,可实现大重合度,为不同重合度非圆齿轮的设计提供一定指导。

(2) 非圆齿轮时变啮合刚度与载荷分配率与其

重合度相关,且随非圆齿轮副啮合位置的改变而变化。HCR 非圆齿轮副的最大时变啮合综合刚度较 NCR 非圆齿轮副大,最大载荷分配率较 NCR 非圆齿轮副小。

(3) 推导了不同重合度下非圆齿轮齿根弯曲应力方程,分析了其变化规律。结果表明:相同条件下,HCR 非圆齿轮的最大齿根弯曲应力明显较 NCR 非圆齿轮小。根据文中方法,通过选取合适的参数,能够有效提高非圆齿轮弯曲承载能力,扩大其应用场合。

(4) 对不同重合度非圆齿轮弯曲应力进行了仿真分析和实验测量,与理论结果相对比,最大误差分别约为 4.8% 和 5.9%。考虑网格划分精度与求解误差、加工误差、装配误差及测量误差的影响,仿真与实验误差均在合理误差范围内,验证了理论计算方法的合理性与正确性。

## 参考文献

- [1] 陈定方,孔建益,杨家军,等. 现代机械设计师手册(上册)[M]. 北京:机械工业出版社,2014.  
CHEN Dingfang, KONG Jianyi, YANG Jiajun, et al. Handbook of modern mechanical designers (Volume 1)[M]. Beijing: China Machine Press, 2014.
- [2] ADDOMINE M, FIGLIOLINI G, PENNASTRI E. A landmark in the history of non-circular gears design: The mechanical masterpiece of dondi's astrarium[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 122(1): 219-232.
- [3] LITVIN F L. Noncircular gears: Design and generation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [4] MODLER K H, LOVASZ E C, BAR G F, et al. General method for the synthesis of geared linkages with non-circular gear[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(6): 726-738.
- [5] LIU J Y, CHANG S L, MUNDO D. Study on the use of a non-circular gear train for the generation of figure-8 patterns[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, Transactions of the ASME, 2006, 20(2): 1229-1236.
- [6] MUNDO D. Geometric design of a planetary gear train with non-circular gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(2): 456-472.
- [7] MUNDO D, GATTI G, DOONER D B. Optimized fivebar linkages with non-circular gears for exact path generation[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(3): 751-760.

- [8] OTTAVIANO E, MUNDO D, GUIDO D A, et al. Numerical and experimental analysis of non-circular gears and cam-follower systems as function generators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(2): 996-1008.
- [9] PETRE A, DRAGOSM, CATALIN A. A gear with translational wheel for a variable transmission ratio and applications to steering box[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52(2): 267-276.
- [10] 吴序堂, 王贵海. 非圆齿轮及非匀速比传动[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
- WU Xutang, WANG Guihai. Noncircular gear and nonuniform transmission[M]. Beijing: China Machine Press, 1997.
- [11] 刘大伟, 任廷志. 由补偿法构建封闭非圆齿轮节曲线[J]. 机械工程学报, 2011, 47(13): 147-152.
- LIU Dawei, REN Tingzhi. Creating pitch curve of closed noncircular gear by compensation method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(13): 147-152.
- [12] 黄忠超, 蓝兆辉. 节曲线封闭的非圆齿轮传动比函数设计[J]. 机械传动, 2011, 35(11): 30-33.
- HUANG Zhongchao, LAN Zhaohui. Design of transmission ratio function of non-circular gear of closed pitch curve[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2011, 35(11): 30-33.
- [13] 林超, 侯玉杰, 龚海, 等. 高阶变性能圆锥齿轮传动模式设计与分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(13): 131-139.
- LIN Chao, HOU Yujie, GONG Hai, et al. Design and analysis of transmission mode for high-order deformed elliptic bevel gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(13): 131-139.
- [14] 林超, 张雷, 张志华. 一种新型非圆锥齿轮副的传动原理及其齿面求解[J]. 机械工程学报, 2014, 50(5): 66-72.
- LIN Chao, ZHANG Lei, ZHANG Zhihua. Transmission theory and tooth surface solution of a new type of non-circular bevel gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(5): 66-72.
- [15] 郑方焱, 张争艳, 陈定方, 等. 新型非圆齿轮分度装置[J]. 中国机械工程, 2014, 25(22): 2997-3002.
- ZHENG Fangyan, ZHANG Zhengyan, CHEN Dingfang, et al. A new type of non-circular gear indexing device[J]. China Mechanical Engineering, 2014, 25(22): 2997-3002.
- [16] ZHENG Fangyan, HUA Lin, HAN Xinghui, et al. Synthesis of indexing mechanisms with non-circular gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 105(1): 108-128.
- [17] 林超, 夏锡光, 邢庆坤, 等. 非圆齿轮型间歇转动机构的设计与运动特性分析[J]. 中国机械工程, 2020, 31(10): 1142-1148.
- LIN Chao, XIA Xiguang, XING Qingkun, et al. Design and kinematic characteristics analysis of an intermittent rotation mechanism based on non-circular gears[J]. China Mechanical Engineering, 2020, 31(10): 1142-1148.
- [18] 李渤涛, 陈定方. 非圆齿轮设计、制造、检测及应用[J]. 机械工程学报, 2020, 56(9): 55-72.
- LI Botao, CHEN Dingfang. Design, manufacture, inspection and application of non-circular Gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(9): 55-72.
- [19] LEWIS G, MONASA F. Large deflections of cantilever beams of non-linear materials of the Ludwick type subjected to an end moment[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1982, 17(1): 1-6.
- [20] 齿轮手册编委会. 齿轮手册(上册)(第二版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
- Gear manual editorial board. Gear manual (Volume 1) (2nd Edition)[M]. Beijing: China Machine Press, 2001.
- [21] LI S. Effect of addendum on contact strength, bending strength and basic performance parameters of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008, 43(12): 1557-1584.
- [22] HOTAIT M A, KAHRAMAN A, Nishino T. An investigation of root stresses of hypoid gears with misalignments[J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(7): 071006.
- [23] HOTAIT M A, KAHRAMAN A. Experiments on the relationship between the dynamic transmission error and the dynamic stress factor of spur gear pairs. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70(6): 116-128.
- [24] 李纪强, 刘忠明. 非圆齿轮传动弯曲强度计算方法研究[J]. 机械传动, 2011, 35(11): 1-4.
- LI Jiqiang, LIU Zhongming. Study on the calculation method of bending strength for non-circular gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2011, 35(11): 1-4.
- [25] 方宗德, 蒋孝煜, 宋镜瀛. 大重合度齿轮的性能研究[J]. 机械传动, 1987, 11(1): 27-32.
- FANG Zongde, JIANG Xiaoyu, SONG Jingying. Research on the performance of gears with high contact ratio[J]. Journal of Mechanical Transmission, 1987, 11(1): 27-32.
- [26] 李发家, 朱如鹏, 李苗苗, 等. 高重合度外啮合齿轮齿根弯曲应力计算方法[J]. 航空动力学报, 2017, 32(1): 138-147.

- LI Fajia, ZHU Rupeng, LI Miaomiao, et al. Calculation method of external meshed gear tooth root bending stress of high contact ratio gear[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(1): 138-147.
- [27] CHEN Zhen, ZENG Ming, FUENTES A A. Geometric design, meshing simulation, and stress analysis of pure rolling rack and pinion mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2020, 142(3): 1-24.
- [28] 陈龙, 郝婵娟, 汪中厚, 等. 单齿啮合的齿轮接触等几何分析[J]. 机械工程学报, 2021, 57(3): 107-115.
- CHEN Long, HAO Chanjuan, WANG Zhonghou, et al. Isogeometric analysis of gear with single tooth contact[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(3): 107-115.
- [29] JOHNSON K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- 
- 作者简介: 喻永权, 男, 1994 年出生, 博士研究生。主要研究方向为新型齿轮传动设计、检测与制造。  
E-mail: 20160702017@cqu.edu.cn
- 林超(通信作者), 男, 1958 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械设计计算机辅助工程、新型齿轮传动及微纳传动设计与制造和产品数字化设计及制造。  
E-mail: linchao@cqu.edu.cn