

DOI: 10.3901/JME.2022.19.086

基于正交匹配追踪算法的复杂系统动力学建模与分析*

罗忠^{1,2,3} 周广泽^{1,2} 朱云鹏⁴ 高屹^{1,2} 李雷^{1,2}

(1. 东北大学机械工程与自动化学院 沈阳 110819;

2. 东北大学航空动力装备振动及控制教育部重点实验室 沈阳 110819

3. 东北大学佛山研究生创新学院 佛山 528312

4. 谢菲尔德大学自动控制与系统工程系 谢菲尔德 S13JD 英国)

摘要: 针对非线性系统模型的辨识问题,通过引入正交匹配追踪(Orthogonal matching pursuit, OMP)算法实现快速非线性系统建模。该方法旨在解决非线性有源回归(Nonlinear autoregressive with exogenous inputs, NARX)模型针对大型数据建模时效性差的问题。首先,说明了正交最小二乘(Orthogonal least squares, OLS)算法存在正交次数多、耗时长的问题,采用 OMP 算法可有效解决,通过与 OLS 算法对比正交差异性证明了 OMP 算法计算效率提升的理论基础,采用模型预报方法验证 OMP 算法所得 NARX 模型的动力学特性。其次,以单自由度非线性系统为例,说明了 OMP 算法系统建模的有效性。最后,利用 OMP 算法建立悬臂梁 NARX 模型,并分别将 NARX 模型预报输出与试验实测输出, NARX 模型固有频率与悬臂梁实际固有频率进行对比。结果表明,与 OLS 算法相比,所提方法的建模效率平均提升了 10 倍,且模型可有效反应系统动力学特性。

关键词: 非线性系统; NARX 模型; OLS 算法; OMP 算法; 差异性分析

中图分类号: TG156

Modelling and Analysis of Complex System Dynamics Based on Orthogonal Matching Pursuit Algorithm

LUO Zhong^{1,2,3} ZHOU Guangze^{1,2} ZHU Yunpeng⁴ GAO Yi^{1,2} LI Lei^{1,2}

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819;

2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819;

3. Foshan Graduate School of Innovation, Northeastern University, Foshan 528312;

4. Department of Automatic Control and System Engineering, University of Sheffield, Sheffield UK S13JD)

Abstract: The problem of identifying non-linear system models is addressed by introducing the OMP (Orthogonal matching pursuit) algorithm for fast non-linear system modelling. The method aims to solve the problem of poor timeliness in modelling large data with NARX (Nonlinear autoregressive with exogenous inputs) models. Firstly, it is shown that the OLS (Orthogonal least squares) algorithm has the problem of many orthogonal times and time consuming, which can be effectively solved by using the OMP algorithm. The kinetic properties of the NARX model obtained by the OMP algorithm are verified using the model prediction method. Secondly, the effectiveness of the OMP algorithm system modelling is illustrated by taking a single degree of freedom non-linear system as an example. Finally, the NARX model of the cantilever beam is established using the OMP algorithm, and the NARX

* 国家科技重大专项(J2019-IV-0002-0069)、国家自然科学基金(11872148, U1908217)和广东省粤佛联合重点基金(2020B1515120015)资助项目。
20220207 收到初稿, 20220610 收到修改稿

model prediction output is compared with the experimental measured output, the inherent frequency of the NARX model and the actual inherent frequency of the cantilever beam respectively. The results show that the modelling efficiency of the proposed method is on average 10 times higher than that of the OLS algorithm, and the model can effectively reflect the dynamics of the system.

Key words: nonlinear systems; NARX model; OLS algorithm; OMP algorithm; variance analysis

0 前言

数学模型是动力学研究的重要依据, 然而在实际工程中, 复杂动力系统通常难以建立偏微分方程或常微分方程等物理模型^[1]。基于系统科学的分析方法, 如数据驱动^[2]、数字孪生^[3]、复杂网络^[4]等, 为解决复杂系统动力学分析提供有效解决途径。其基本思想是利用系统的输入、输出数据, 通过系统辨识方法建立能够反应系统动力学特性的数值模型, 进而基于辨识得到的数值模型对复杂动力学系统进行分析、设计与故障诊断等^[5]。

传统的动力学数值模型包括 Volterra 级数模型、Hanmerstein-Wiener 模型、神经网络模型、非线性有源自回归(Nonlinear autoregressive with exogenous inputs, NARX)模型等^[5-6], 工程实际中, 一大类非线性模型可由 NARX 模型描述^[7], 例如, Akinola 等^[8]采用 NARX 模型建立了能够准确描述工业二氧化碳捕获过程中关键变量之间的动态关系模型。此外, 与神经网络模型相比, NARX 模型可以提供清晰的模型结构, 便于系统分析和设计^[5]。

常用的 NARX 模型辨识方法主要包括最小二乘(Orthogonal least squares, OLS)算法^[9]、最小绝对值收敛和选择算子(Least absolute shrinkage and selection operator, LASSO)算法^[10]、最小角回归(Least angle regression, LAR)算法^[11]等。与其他算法相比, OLS 算法更加简便, 稳定, 且能够准确建立系统动力学模型, 广泛应用于工程实际的建模与分析当中^[9]。然而, 在利用大规模数据时, OLS 算法在效率方面存在劣势, 例如, JACOBS 等^[12]分别采用 OLS 与 LASSO 算法建立弹性体驱动器 NARX 模型的过程中发现, OLS-NARX 模型的平均均方根归一化误差为 LASSO-NARX 模型的 1/3, 但 OLS-NARX 建模时间是 LASSO-NARX 建模时间的 6 倍。为解决此问题, CHEN 等^[13]提出一种快速正交最小二乘算法, 通过减少算法的内积计算次数提高建模效率; KARAMI 等^[14]利用矩阵变换, 采用一组单变量多项式代替多变量多项式, 通过减少模型候选集数量以提高建模效率。但上述方法对于建模效率提升有限, 在工程实际应用中, 如基于 NARX

模型的在线监测^[15]、实时控制^[16]、短时预测^[17]等, 仍缺少快速且准确的建模方法。

正交匹配追踪(Orthogonal matching pursuit, OMP)算法^[18]在图像处理、压缩感知领域有着广泛应用, 例如, YANG 等^[19]采用 OMP 算法实现了图像的稀疏分解; SHEN 等^[20]通过 OMP 算法从较少的测量数据中成功恢复原始信号。与 OLS 算法类似, OMP 算法的目的是从原始信号中提取特征信号, 而与 OLS 算法相比, OMP 算法需要更少的内积运算次数, 因而相比于 OLS 算法速度更快^[21]。

为提升 NARX 模型建模效率, 本文提出基于 OMP 算法的 NARX 模型辨识与分析方法。首先, 介绍了基于 OMP 算法的 NARX 建模过程, 并与 OLS 算法进行对比; 其次, 采用模型预报输出方法对辨识得到的 NARX 模型进行模型验证; 最后, 通过悬臂梁试验验证在所提方法在实际应用领域的有效性。

结果表明, 与传统 OLS 算法相比, OMP 算法建立 NARX 模型建模效率上平均提升了 10 倍, 且所得模型可准确反应系统动力学特性。本文结论丰富和发展了非线性系统建模方法, 为基于大量数据的复杂系统动力学分析提供有效解决方案。

1 非线性系统 NARX 模型

1.1 NARX 模型

NARX 模型是一种离散时间非线性系统模型, 其多项式展开式为^[6]

$$y(k) = \beta_0 + \sum_{i_1=1}^n \beta_{i_1} x_{i_1}(k) + \cdots + \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_l=1}^n \beta_{i_1, \dots, i_l} x_{i_1}(k) \cdots x_{i_l}(k) + z(k) \quad (1)$$

式中, l 为最高非线性阶数; k 表示离散时间; β_i 为模型系数; $z(k)$ 代表噪声序列; $x_i(k)$ 为

$$x_i(k) = \begin{cases} y(k-i) & 1 \leq i \leq n_y \\ u(k-i+n_y) & n_y+1 \leq i \leq n_y+n_u \end{cases} \quad (2)$$

式中, n_y, n_u 分别为模型输出、输入序列的最大时滞。

NARX 模型(1)可改写为线性回归形式

$$y(k) = \sum_{i=1}^M \theta_i p_i(k) + z(k) \quad (3)$$

式中, 回归项 $p_i(k)$, $i=1, \dots, M$ 由系统的输入和输出时滞变量组成; θ_i 表示与模型项对应的系数; M 表示 NARX 总模型项数

$$M = \frac{(n_u + n_y + l)!}{(n_u + n_y)! (l)!} \quad (4)$$

将长度为 N 的数据代入模型(3), NARX 模型可以进一步写成矩阵形式

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{z} = \begin{bmatrix} p_1(1) & \cdots & p_M(1) \\ \vdots & & \vdots \\ p_1(N) & \cdots & p_M(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z(1) \\ \vdots \\ z(N) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{y} = [y(1), \dots, y(N)]^T$ 为系统输出向量; $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_M]$ 为由候选模型项构成的回归矩阵, 其中 $\mathbf{p}_i = [p_i(1), \dots, p_i(N)]$, $i=1, \dots, M$; $\boldsymbol{\theta}$ 为模型系数向量; \mathbf{z} 为噪声向量。

1.2 NARX 模型辨识

NARX 模型辨识包括模型结构选择和模型系数估计两部分。在 NARX 模型(3)中, 模型结构选择是从 M 个模型项中选择少量且重要的模型项, 以减少模型复杂度, 避免模型过拟合。模型系数估计是在模型结构确定后, 得到对应模型系数的过程。

传统的 OLS 算法通过引入正交化模型, 使得模型选择与系数估计可以独立于其他模型项进行, OLS 依据误差减小率(Error reduction ratio, ERR)准则对模型项进行筛选, 模型系数可直接通过最小二乘法估计得到。基于 OLS 算法的 NARX 模型辨识过程如下所述:

假定式(5)中矩阵 \mathbf{P} 满足列满秩条件, \mathbf{P} 可正交分解为^[6]

$$\mathbf{P} = \mathbf{W}\mathbf{A} \quad (6)$$

式中, \mathbf{W} 为 $N \times M$ 正交矩阵, 其列向量 \mathbf{w}_i 可以由原列向量 \mathbf{p}_i , $i=1, \dots, M$ 通过施密特正交化得到

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{w}_2 = \mathbf{p}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{p}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_M = \mathbf{p}_M - \cdots - \frac{\langle \mathbf{w}_{M-1}, \mathbf{p}_M \rangle}{\langle \mathbf{w}_{M-1}, \mathbf{w}_{M-1} \rangle} \mathbf{w}_{M-1} \end{cases} \quad (7)$$

式中, 符号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量内积。

\mathbf{A} 为 $M \times M$ 上三角矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{M-1,M} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中, $a_{r,m} = \frac{\langle \mathbf{w}_r, \mathbf{p}_m \rangle}{\langle \mathbf{w}_r, \mathbf{w}_r \rangle}$, $r=1, \dots, M-1$, $m=2, \dots, M$ 为式(7)中施密特正交系数。

将式(6)代入模型(5), 可得

$$\mathbf{y} = (\mathbf{P}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{G} + \mathbf{z} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{G} = [g_1 \cdots g_M]^T$ 为正交系数向量, 可以由 \mathbf{y} 和 \mathbf{W} 利用正交性及最小二乘法直接得到^[6]

$$g_i = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}, i=1, \dots, M \quad (10)$$

ERR 准则为

$$\text{ERR}_i = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{w}_i \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}, i=1, \dots, M \quad (11)$$

表示当前 \mathbf{w}_i 向量对于实际向量 \mathbf{y} 的输出方差或能量的贡献程度^[22]。基于 ERR 准则的模型结构选择可总结如下。

(1) 设在第 j 步运算中(当 $j=1$ 时, $\mathbf{p}_i = \mathbf{w}_i$, $i=1, \dots, M$), $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{j-1}$ 为已选择模型项, 对应的正交向量为 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{j-1}$, $\mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_M$ 为剩余未选择的模型项, 将 $\mathbf{p}_j, \dots, \mathbf{p}_M$ 代入式(7), 得到与 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{j-1}$ 正交的 $\mathbf{w}_j, \dots, \mathbf{w}_M$ 向量, 将 $\mathbf{w}_j, \dots, \mathbf{w}_M$ 代入式(11)计算剩余 $M-j$ 个模型项的 ERR 值。

(2) 取当前最大 ERR 值对应的模型项作为第 j 步选定模型项。整个模型项搜索过程将在满足以下条件时终止

$$j \leq \rho \quad (12)$$

式中, ρ 为选定 NARX 模型项总个数。

当矩阵的 M 较大时, OLS 算法存在计算复杂的问题, 这是因为 OLS 算法引入正交化模型, 模型项彼此的正交化需要进行大量的施密特正交计算, 维数 M 增大, 正交化次数成倍增大, 导致 OLS 算法运算减慢^[23]。为解决这一问题, 提出基于 OMP 算法的 NARX 模型辨识方法。

2 基于 OMP 的 NARX 模型辨识方法

2.1 OMP 算法

OMP 算法作为匹配追踪算法的改进算法, 通过对已选择模型项的正交确保了后续模型项的选择不

受已选模型项影响, 进而提高了收敛速度^[18]。OMP 算法流程可总结如下。

(1) 初始化, OMP 算法的初始条件设置有输出向量 y , 原始矩阵 P 及矩阵 P 的归一化矩阵 $\bar{P} = [\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_M]$, 其中 $\bar{p}_i = p_i / \|p_i\|_2$, 模型项搜索结束阈值 ρ , 迭代终止条件为 $j \leq \rho$ 。

(2) 模型项的选择, 设在第 j 步运算中(初始状态 $j=1$), 为得到精简 NARX 模型, OMP 算法通过式(13)进行筛选

$$L_j = \underset{1 \leq i \leq M}{\operatorname{argmax}} |\langle \bar{p}_i, e_{j-1} \rangle| \quad (13)$$

式中, e_{j-1} 代表上一次迭代后产生的残差, 初始残差值 $e_0 = y$ 。

式(13)中内积计算即为残差项 e_{j-1} 在 \bar{p}_m 上的投影, 由于 \bar{P} 已作归一化处理, 即 $\|\bar{p}_m\|_2 = 1$, 垂直投影不受向量长度影响, 因此当向量夹角最小时即为最大投影长度。OMP 算法通过向量夹角的大小反映出各模型项的重要程度。

(3) 估计模型系数, 记录选定 NARX 模型项集合, 需要强调的是此时记录的是原始矩阵 P 中的模型项

$$\Phi_j = [\Phi_{j-1}, p_{L_j}] \quad (14)$$

对应的模型系数可通过最小二乘法得到

$$\theta_j = (\Phi_j^T \Phi_j)^{-1} \Phi_j^T y \quad (15)$$

更新残差

$$e_j = y - \Phi_j \theta_j \quad (16)$$

并令 $j = j+1$, 重复 OMP 算法的(2)、(3)流程, 直至达到算法终止条件, OMP 算法停止, NARX 建模完成。

2.2 OMP 算法与 OLS 算法对比

但在 OMP 算法流程中, 不存在明确的正交过程, 为此通过图 1 说明。在三维空间中, 令平面 Φ 为已选模型项的集合, 向量 y 在平面 Φ 的正交投影为向量 y^\perp , $y^\perp = \Phi \theta$, θ 为正交投影系数, 正交投影系数有两种计算方法: 第一种, 先将 Φ 中已选模型项代入式(7)得到正交模型项, 再分别计算向量 y 在各正交模型项上的投影系数; 第二种, 通过式(15)的最小二乘法进行求解^[24]。根据正交投影性质, $y - y^\perp = e \perp \Phi$ 。因此, OMP 算法通过计算向量 y 在已选模型项集合 Φ 上的正交投影 y^\perp , 使得残差 e 正交于集合 Φ , 保证 OMP 算法通过式(13)选择后续模型项时, 不会重复选择已选模型项, 算法可在有限

步结束。

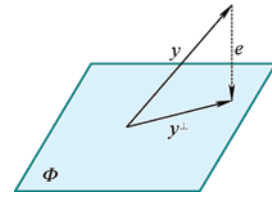


图 1 正交投影示意图

从图 2 所示的 OMP 算法与 OLS 算法正交流程图可以看出, OMP 算法是先在剩余未选模型项中通过式(13)筛选出当前运算步下的选定模型项, 再将此模型项与前序运算步下已选模型项进行彼此正交, 完成正交流程。OLS 算法将每一个未选模型项单独与已选模型项集合进行正交, OLS 在正交后的剩余模型项上进行筛选, 选出此步选定模型项。

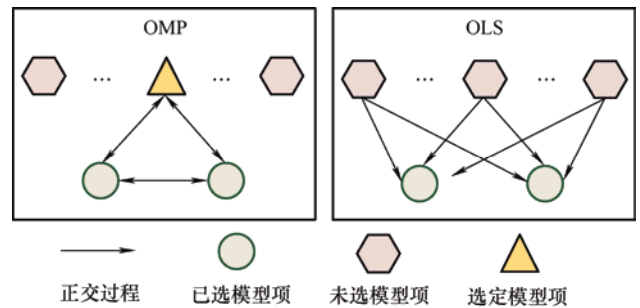


图 2 算法正交流程示意图

2.3 计算量

通常采用浮点运算次数衡量算法的计算量, 简称为 $flop$ 数, 一次加法(减法)或乘法(除法)运算都称为一次 $flop$ 。四则运算次数之和的 $flop$ 数就是算法的计算量^[25]。

正交系统辨识算法计算量主要受施密特正交影响, 因此本小节只考虑两种算法在正交化运算阶段的 $flop$ 数。

从式(7)可以看出, 当列向量行数为 N 时, 一次内积计算的 $flop$ 数为 $N + (N-1)$ 。假定算法运算至 j 步, 此时 OLS 算法中需要将剩余 $M - j + 1$ 个模型项同前 $j-1$ 个已选择模型项进行正交, 对应的 $flop$ 数为

$$flop_{OLS} = \{[N + (N-1) + N] \times 2j\} \times (M - j + 1) = (6Nj - 2j) \times (M - j + 1) \quad (17)$$

因为 $j \ll M$, 同时为了方便计算, 所以将式(17)中最大项作为 OLS 算法正交化阶段对应 $flop$ 数, $flop_{OLS} \approx 6NMj$ 。

对应 OMP 算法中需进行正交的模型项数量为 j , 相应 $flop$ 数为

$$\begin{aligned} flop_{OMP} &= \{[N + (N-1) + N] \times 2\} \times \sum j = \\ &= \frac{1}{2}(6N-1)(j)(j-1) \approx \\ &= 3Nj^2 \end{aligned} \quad (18)$$

可以看出 $flop_{OLS} \gg flop_{OMP}$ ，即 OMP 算法在计算量上较 OLS 算法有大幅度缩减。

2.4 模型验证

模型验证是系统辨识研究的基础部分之一，用以检验数学模型的有效性，一步向前预测和模型预报预测是两种常用的 NARX 模型验证方法^[26]。

在一步向前预测中，每一步都是使用系统实际输入序列和输出序列输入辨识得到的 NARX 模型中，得到模型验证输出序列。具体可用如下例子说明，令 NARX 模型为

$$y(k) = ay(k-1) + by(k-2) + cu(k-1) \quad (19)$$

系统的一步向前预测模型验证输出为

$$\begin{cases} \hat{y}(1) = y(1) \\ \hat{y}(2) = y(2) \\ \hat{y}(3) = \hat{a}y(2) + \hat{b}y(1) + \hat{c}u(2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k) = \hat{a}y(k-1) + \hat{b}y(k-2) + \hat{c}u(k-1) \end{cases} \quad (20)$$

式中， y 是 NARX 模型的实际输出值， \hat{y} 是 NARX 模型的预测输出值， $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 是 NARX 辨识出的模型项对应系数。

而在模型预报预测中，下一步的输入序列为上一步的模型预报输出，预测误差逐步积累，式(19)的 NARX 模型的模型预报预测模型验证输出为

$$\begin{cases} \hat{y}(1) = y(1) \\ \hat{y}(2) = y(2) \\ \hat{y}(3) = \hat{a}\hat{y}(2) + \hat{b}\hat{y}(1) + \hat{c}u(2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k) = \hat{a}\hat{y}(k-1) + \hat{b}\hat{y}(k-2) + \hat{c}u(k-1) \end{cases} \quad (21)$$

由此可知，模型预报预测与一步向前预测不同的是，在模型预报预测中，下一步的输出序列，是由上一步的模型验证输出得到，每步的预测误差会逐渐累积，模型预报预测可以严格表明 NARX 模型能否真实的反映出实际系统的动力学特性。因此，本文采用模型预报方法进行模型验证。

3 算例验证

本文以图 3 所示的非线性系统为例对两种算法

进行验证。图中， $m = 1 \text{ kg}$ 为系统质量， $c = 25 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 为线性阻尼， $K = 1 \times 10^4 \text{ N/m}$ 为线性刚度， $K_3 = 1 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$ 为非线性刚度。

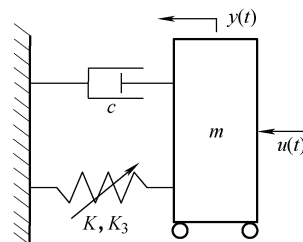


图 3 单自由度非线性系统

系统的运动微分方程为

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + Ky(t) + K_3y^3(t) = u(t) \quad (22)$$

将微分方程(22)采用中心差分离散化可得其实际 NARX 模型^[27]

$$\begin{aligned} y(k) &= 1.625y(k-1) - 0.87y(k-2) + \\ &+ 2.5 \times 10^{-5}u(k-1) - 2.5 \times 10^6y^3(k-1) \end{aligned} \quad (23)$$

输入信号 $u(t)$ 为 $[-2, 2]$ 上的随机激励信号，通过 Runge-Kutta 法仿真得到系统的输出信号 $y(t)$ ，采样频率 $f_s = 200 \text{ Hz}$ ，采样点数为 10 000，其中前 2 000 个采样点的输入输出信号如图 4 所示。

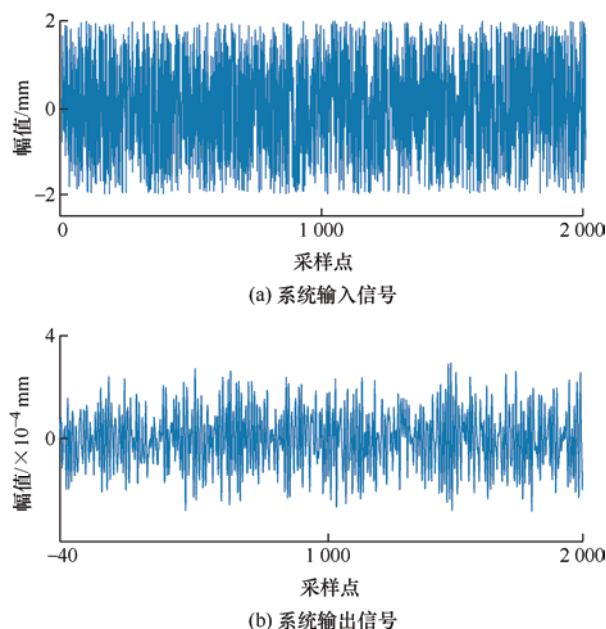


图 4 系统输入、输出时域图

设置系统的最大输入、输出时滞 $n_u = n_y = 5$ 、非线性最高阶数 $l=5$ ，算法终止阈值 $\rho=5$ ，建模数据长度 $N=4\ 000$ 。分别采用 OMP 算法与 OLS 算法建立 NARX 模型，具体 NARX 模型项辨识结果如表 1 所示。

表 1 非线性系统辨识结果

OLS 算法			OMP 算法		
搜索步	模型项	系数	搜索步	模型项	系数
1	$y(k-1)$	1.625	1	$y(k-1)$	1.03
2	$y(k-2)$	-0.875	2	$y(k-3)$	-0.48
3	$u(k-1)$	2.5×10^{-5}	3	$u(k-1)$	2.49×10^{-5}
4	$y^3(k-1)$	-2.5×10^6	4	$u(k-2)$	1.37×10^{-5}
5	$y(k-3)$	-2.9×10^{-15}	5	$y^3(k-1)y^2(k-2)$	-4.9×10^{13}

当前 NARX 模型预报验证结果如图 5 所示。

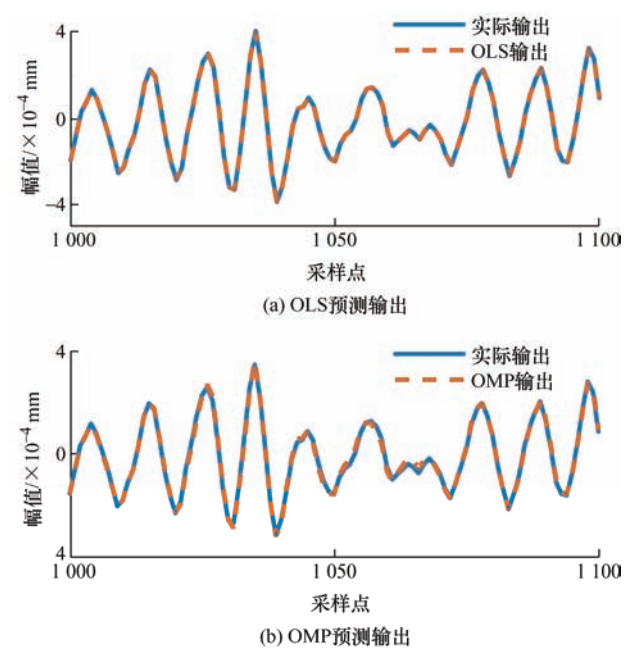


图 5 实际输出与预测输出对比图

引入归一化均方误差(Normalized mean square error, NMSE)指标衡量实际输出与模型预报输出之间误差^[28], 式(24)给出了 NMSE 的表达式, 具体结果如表 2 所示。

$$NMSE = \frac{\sum_{i=1}^N (y - \hat{y})^2}{\sum_{i=1}^N (y)^2} \quad (24)$$

表 2 算法 NMSE 值

	OLS	OMP
NMSE	0.48 %	0.91%

从表 1 可以看出, OLS 前四个辨识模型项与式(23)的实际离散化模型相同, 第五模型项对应系数非常小, 代表对于输出的贡献可以忽略不计。而

OMP 辨识结果与式(23)存在差异性, 但图 5 与表 2 的结果皆可说明, OMP 算法辨识所得 NARX 模型能良好的拟合系统输出, 为验证 OMP 算法所得 NARX 模型可有效反应原非线性系统的动力学特性, 采用正选信号对原非线性系统与 OMP 算法所得 NARX 模型进行扫频, 其正弦信号设置为 $u(t) = \sin(2\pi ft)$, $f = [0:0.1:50]$ Hz, 幅频特性曲线如图 6 所示。结果表明 OMP 算法所得模型可有效反应原非线性系统的动力学特性。

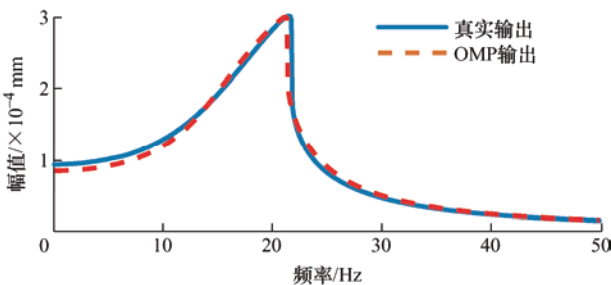


图 6 幅频特性图

为对比 OMP 算法与在 OLS 算法采用不同大小数据集建立 NARX 模型的效率, 分别令非线性最高阶数 $l = 3 \sim 7$, 此时 NARX 对应的模型项个数分别为 $M=286, 1001, 3003, 8008, 19448$, OLS 算法建模时间与 OMP 算法建模时间见表 3。从表 3 可以看出, OMP 算法的计算时间较 OLS 有显著提升, 平均提速 10 倍。

表 3 算法建模时间

阶数	OLS/s	OMP/s
3	0.22	0.02
4	0.67	0.056
5	1.87	0.15
6	5.1	0.39
7	12.4	0.95

OMP 算法计算效率大幅提升, 利于快速建立 NARX 模型, 因此对于大量数据的建模问题, 当考虑建模效率时, 采用 OMP 算法建立 NARX 模型存在优势。

4 试验验证

试验对象为悬臂梁, 测试系统包括 LMS 测试系统、压电式加速度传感器及模态激振器。

将悬臂梁与激振器顶杆通过螺栓连接, 分别将两个加速度传感器布置于顶杆上端及悬臂梁中处, 如图 7 所示。将传感器连接至图 8 所示的 LMS 测试系统, 采样频率设定为 2 048 Hz。通过 LMS 控制通入激振器的电信号幅值为 1、3 V, 激振频率为 200 Hz, 分别定义为工况 1、2, 利用工况 2 数据进行建模, 利用工况 1 数据进行 NARX 模型验证。

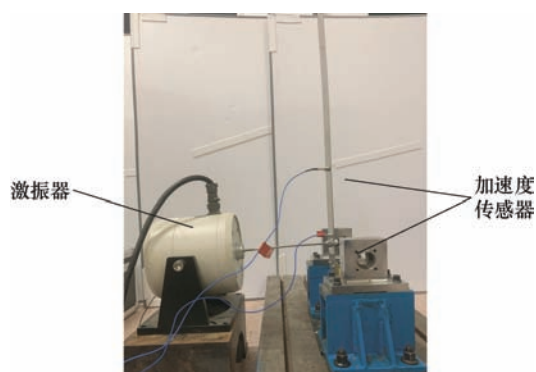


图 7 悬臂梁试验台



图 8 测试系统

根据上述试验步骤, 测得上述 2 种工况下的输入、输出信号。其中, 工况 2 前 1 000 个采样点的输入、输出信号时域曲线如图 9 所示。

令悬臂梁系统中输入、输出时滞 $n_u = n_y = 5$, 最高阶数 $l = 5$, 算法终止阈值 $\rho = 8$, 建模数据长度 $N = 5\ 000$ 。采用工况 2 的实测数据通入 OMP 算法与 OLS 算法建立 NARX 模型, 其中 OMP 算法所得 NARX 模型具体结构如表 4 所示, 两种算

法的建模时间与采用模型预报验证方法的 NMSE 值见表 5。

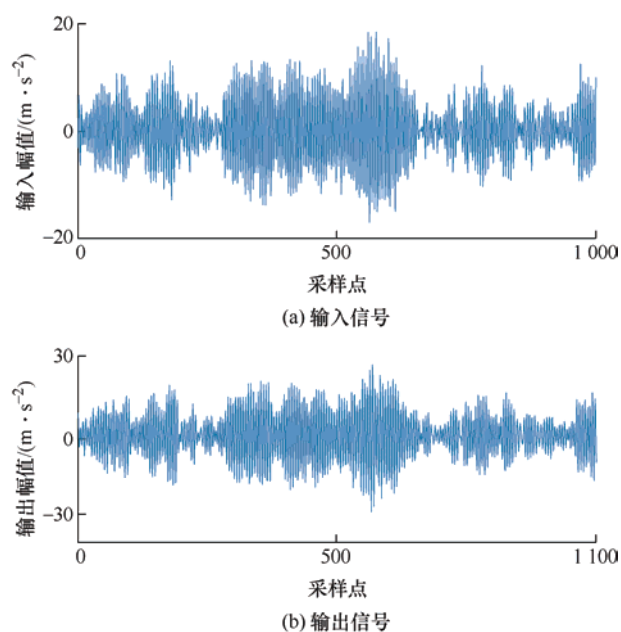


图 9 悬臂梁试验台实测数据

表 4 悬臂梁系统辨识结果

搜索步	OMP	
	模型项	系数
1	$u(k-5)$	-0.327 8
2	$y(k-2)$	-1.187 9
3	$y(k-1)$	0.749 3
4	$u(k-3)y(k-4)$	-0.008 5
5	$y(k-5)$	-0.435 7
6	$y(k-5)^2$	-0.001 7
7	$u(k-1)^3$	4.0×10^{-4}
8	$u(k-1)^3 u(k-4)y(k-4)$	-1.4×10^{-6}

表 5 算法运算时间与 NMSE 值

	FROLS	OMP
时间/s	5.8	0.47
NMSE	7.2%	9.4%

为验证表 4 所示 NARX 模型的有效性, 代入工况 1 的 2 000 个采样点的输入、输出数据, 实际输出与模型预报验证对比结果如图 10 所示, 实际输出与模型预报输出之间的 NMSE=5.4%, 从图 10 可以看出, OMP 算法建立的悬臂梁系统 NARX 模型预测输出能与 LMS 实测输出能较好地吻合。

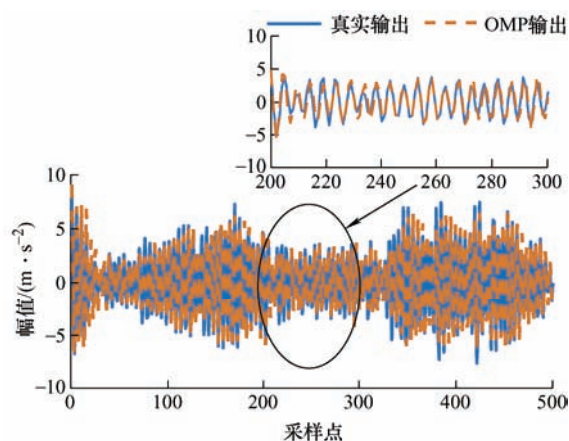


图 10 实际输出与辨识输出对比图

为验证 OMP 所得 NARX 模型的动力学特性, 采用锤击法对悬臂梁测量固有频率^[29]。实验测得的悬臂梁系统一阶固有频率为 40.63 Hz。为得到悬臂梁 NARX 模型的固有频率, 采用正弦信号 $u(t) = \sin(2\pi ft)$, $f = [0:0.1:80]$ Hz, 并进行扫频, NARX 模型的固有频率 45.3 Hz。将实验测得与 NARX 模型预测的一阶固有频率列于表 6, 从表中可知, 相对偏差为 11.49%, 小于 15%, 在工程应用允许范围内, 表明 OMP 算法建立的 NARX 模型可有效反应悬臂梁系统的真实动力学特性。

表 6 固有频率的实验与仿真对比

实验/Hz	模型/Hz	相对偏差(%)
40.63	45.3	11.49

5 结论

(1) 传统基于 OLS 算法的 NARX 建模方法在针对大量数据建立 NARX 模型的情况下, 由于其正交化步骤多, 计算量大的特点, 造成算法运算时间长, 不利于需要快速建立 NARX 模型的应用场合。

(2) 本文提出基于 OMP 算法的 NARX 建模方法在保证建模精度的前提下, 通过改变模型项之间的正交化形式, 减少正交次数, 避免了 OLS 算法计算时间长的的问题。结果显示本所提方法较传统建模方法运算效率大幅提升, 更适用于建模数据量大的快速建模实际场景。

(3) 通过 OMP 算法建立的 NARX 模型, 由于其筛选原则默认只考虑向量夹角的大小对其重要性的影响, 而忽略了向量长度, 导致最终建模精度略低于 OLS 算法所得 NARX 模型, 但 OMP 算法得到的 NARX 模型仍能有效反应系统的动力学特性; 为进一步提高本文所提方法的建模精度, 在接下来的

研究中, 考虑向量长度在 OMP 算法筛选原则中的作用, 具体的建模方法将在今后的研究中分析。

参 考 文 献

- [1] LIU Haopeng, ZHU Yunpeng, LUO Zhong, et al. Identification of the dynamic parametrical model with an iterative orthogonal forward regression algorithm[J]. Applied Mathematical Modelling. 2018, 64: 643-653.
- [2] BREWICK P T, MASRI S F. An evaluation of data-driven identification strategies for complex nonlinear dynamic systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(2): 1297-1318.
- [3] TAO Fei, QI Qinglin. Make more digital twins[J]. Nature, 2019, 573(7775): 490-491.
- [4] LUE Linyuan, ZHOU Tao. Link prediction in complex networks: A survey[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2011, 390(6): 1150-1170.
- [5] LI Yuqi, LUO Zhong, HE Fengxia, et al. Modeling of rotating machinery: A novel frequency sweep system identification approach[J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 494: 115882.
- [6] BILLINGS S, CHEN S, KORENBERG M. Identification of MIMO non-linear systems using a forward-regression orthogonal estimator[J]. International Journal of Control, 1989, 49(6): 2157-2189.
- [7] LI Yuqi, LUO Zhong, LIU Zijia, et al. Nonlinear dynamic behaviors of a bolted joint rotor system supported by ball bearings[J]. Archive of Applied Mechanics, 2019, 89(11): 2381-2395.
- [8] AKINOLA T E, OKO E, GU Y, et al. Non-linear system identification of solvent-based post-combustion CO₂ capture process[J]. Fuel, 2019, 239: 1213-1223.
- [9] CHEN Shen, XIA Hong, HARRIS C J, et al. Sparse modeling using orthogonal forward regression with PRESS statistic and regularization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2004, 34(2): 898-911.
- [10] BONIN M, SEGHEZZA V, PIRODDI L. NARX model selection based on simulation error minimisation and LASSO[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(7): 1157-1168.
- [11] EFRON B, HASTIE T, JOHNSTONE I, et al. Least angle regression[J]. Annals of Statistics, 2004, 32(2): 407-451.
- [12] JACOBS W R, BALDACCHINO T, DODD T, et al. Sparse bayesian nonlinear system identification using variational inference[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(12): 4172-4187.

- [13] CHEN Shen, WIGGER J. Fast orthogonal least squares algorithm for efficient subset model selection[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(7): 1713-1715.
- [14] KARAMI K, WESTWICK D, SCHOUKENS J. Applying polynomial decoupling methods to the polynomial NARX model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 148.
- [15] LIU Yi, WANG Haiqing, YU Jiang, et al. Selective recursive kernel learning for online identification of nonlinear systems with NARX form[J]. Journal of Process Control, 2010, 20(1): 181-194.
- [16] ALTAN A, ASLAN O, HACIOGLU R. Real-time control based on NARX neural network of hexarotor UAV with load transporting system for path tracking[C]. Istanbul, Turkey: 2018.
- [17] RAI S, DE M L. NARX: Contribution-factor-based short-term multinodal load forecasting for smart grid[J]. International Transactions on Electrical Energy Systems, 2021, 31(9).
- [18] PATI Y C, REZAIIFAR R, KRISHNAPRASAD P S. Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition[C]. 1993.
- [19] YANG Ming, LIU Ningbo, LIU Wei. Image 1D OMP sparse decomposition with modified fruit-fly optimization algorithm[J]. Cluster Computing-The Journal of Networks Software Tools and Applications, 2017, 20(4): 3015-3022.
- [20] SHEN Yi, LI Song. Sparse signals recovery from noisy measurements by orthogonal matching pursuit[J]. Inverse Problems and Imaging, 2015, 9(1): 231-238.
- [21] KAUR A, BUDHIRAJA S. Wavelet based sparse image recovery via orthogonal matching pursuit[C]. IEEE, 2014.
- [22] WEI Hualiang, BILLINGS S A, LIU J. Term and variable selection for non-linear system identification[J]. International Journal of Control, 2004, 77(1): 86-110.
- [23] ZHANG Long, LI Kang. Forward and backward least angle regression for nonlinear system identification[J]. Automatica, 2015, 53: 94-102.
- [24] 陈志杰. 高等代数与解析几何[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- CHEN Zhijie. Higher algebra and analytical geometry[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.
- [25] 丁锋. 系统辨识算法的复杂性、收敛性及计算效率研究[J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1729-1741.
- DING Feng. Research on complexity, convergence and computational efficiency of system identification algorithms[J]. Control and Decision-making, 2016, 31(10): 1729-1741.
- [26] MA Ying, LIU Haopeng, ZHU Yunpeng, et al. The NARX model-based system identification on nonlinear, rotor-bearing systems[J]. Applied Sciences, 2017, 7(9).
- [27] GE Xiaobiao, LUO Zhong, MA Ying, et al. A novel data-driven model based parameter estimation of nonlinear systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 453: 188-200.
- [28] MUJI S, RAHIM R A, RAHIMAN M, et al. Optical tomography: Image improvement using mixed projection of parallel and fan beam modes[J]. Measurement, 2013, 46(6): 1970-1978.
- [29] 罗忠, 陈广凯, 李建章, 等. 考虑轴承刚度的转子系统动力学相似模型设计[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2015, 36(03): 402-405.
- LUO Zhong, CHEN Guangkai, LI Jianzhang. Design of a similar model for rotor system dynamics considering bearing stiffness[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science Edition), 2015, 36(03): 402-405.

作者简介: 罗忠(通信作者), 男, 1978 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机械动力学与控制、模型试验理论与方法。

E-mail: zhluo@mail.neu.edu.cn

周广泽, 男, 1997 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为基于数据驱动的复杂系统建模。

E-mail: guangze988@163.com