

DOI: 10.3901/JME.2022.19.068

一种 6R 非球型手腕机器人逆运动学算法研究*

罗任峰^{1,2} 王旭浩³ 张大卫¹ 张培伦¹ 赵 臣¹

- (1. 天津大学机械工程学院 天津 300072;
2. 天津航天机电设备研究所 天津 300301;
3. 中国民航大学航空工程学院 天津 300300)

摘要: 6R 非球型手腕喷涂机器人得到了越来越广泛的应用,然而这种机器人的结构不满足 Pieper 准则,导致该机器人的逆运动学求解困难。对此,提出了一种近似解析法和数值迭代法相结合的 6R 非球型手腕机器人逆运动学组合算法。首先,根据 6R 非球型手腕机器人的结构特点近似转化为 6R 球型手腕机器人,并以等效球型手腕机器人的逆运动学解析解作为近似解,采用基于运动学雅可比矩阵的数值迭代法求解 6R 非球型手腕机器人的逆运动学精确解。其次,针对等效变换引起机器人有效工作空间减小,从而导致算法失败的问题进行了分析,提出了基于目标位姿偏置的方法提高逆运动学算法的鲁棒性。最后,通过数值仿真验证了所提出的 6R 非球型手腕机器人逆运动学算法的可靠性和实时性。

关键词: 6R 机器人; 非球型手腕; 喷涂机器人; 逆运动学

中图分类号: TP242

Inverse Kinematics Solution Algorithm of a 6R Robot with Non-spherical Wrist

LUO Renfeng^{1,2} WANG Xuhao³ ZHANG Dawei¹ ZHANG Peilun¹ ZHAO Chen¹

- (1. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072;
2. Tianjin Aerospace Electromechanical Equipment Research Institute, Tianjin 300301;
3. Aeronautical Engineering College, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300)

Abstract: The 6R spray painting robot with non-spherical wrist has been widely used. However, structure of this kind of robot does not satisfy Pieper-Criterion, leading to the inverse kinematics of this robot a very difficult problem. Then, an inverse kinematic algorithm for the 6R robot with non-spherical wrist is proposed by combining the approximate analytical solution and the numerical iterative method. Firstly, according to structure characteristics, the 6R robot with non-spherical wrist is transformed to a 6R robot with spherical wrist. By taking analytical solutions of the spherical wrist robot as approximate solutions, the Jacobian based iterative method is employed to derive the exact solutions of the 6R robot with non-spherical wrist. Secondly, failure of the proposed method caused by the reduction of the workspace due to structure transformation is analyzed. A target end configuration offsetting method is presented to improve the robustness of the proposed inverse kinematics algorithm. Finally, numerical simulations are carried out to prove the effectiveness and efficiency of the proposed inverse kinematic method for the 6R robot with non-spherical wrist.

Key words: 6R robot; non-spherical wrist; spray painting robot; inverse kinematics

0 前言

逆运动学是机器人学最首要的问题,是机器

人运动控制、轨迹规划等的基础。目前,机器人的逆解算法主要有解析法和数值算法^[1]。对于 6R 机器人,当结构满足 Pieper 准则时存在解析解,即三个连续关节轴线相交于一点或彼此平行^[2-3]。因此,工业机器人一般采用具有球型手腕的结构形式。但是随着领域的不断扩展,非球型手腕得到越来越多的应用,例如 Motoman EPX2050、

* 中央高校基本科研业务费专项资金(3122020030)和天津市智能制造科技重大专项(15ZXZNGX00200)资助项目。20211118 收到初稿,20220715 收到修改稿

FANUC P-250iB、ABB IRB 5500 等工业喷涂机器人均采用了具有中空结构的非球型手腕。研究非球型手腕机器人逆运动学算法具有重要理论意义和工程价值。

目前,数值解法主要有消元法、基于流形理论的几何解法、智能搜索法和数值迭代法。RAGHAVAN 等^[4]提出了一种消元法,得到关于单个关节转角的 16 次多项式方程。MANOCHA 等^[5]对这个方程求解进行了改进,运用符号处理和矩阵运算将逆运动学问题转化为矩阵特征值分解问题。刘松国等^[6]采用类似方法计算一般 6R 机器人运动学逆解。HUSTY 等^[7]提出利用经典多维几何来表述问题,并给出了基于流形理论的解决方案。QIAO 等^[8]采用倍四元数解决一般 6R 机器人的逆运动学问题。吕士增^[9]通过类似的方法求得了 6R 非球型手腕喷涂机器人的运动学逆解。孙恒辉等^[10]基于新旋量子问题理论对一类 6R 串联机器人的逆解算法进行了改进研究。上述方法推导过程复杂,算法的实时性和稳定性有待工程验证。此外,基于启发式智能搜索技术的方法主要有神经网络法^[11]、遗传算法^[12]等。这些方法将逆运动学问题转化为求极值问题,通过优化求解,但普遍存在对初始值敏感,容易陷入局部极值的问题。对此,KUCUK^[13]利用机器人的几何特征将 6R 非球型手腕机器人的逆运动学转化为一维数值迭代问题,算法对奇异位姿不敏感且计算效率较高。WANG 等^[14]采用类似的方法求解一种 7R 6-DOF 非球型手腕喷涂机器人运动学逆解,并对逆运动学多解问题开展分析研究,该逆运动学算法的稳定性有待工程验证。

对于无解析解机器人,工程上主要采用基于运动雅可比矩阵的数值迭代法^[15],CHO 等^[16]提出改进的阻尼最小二乘法,改善算法处理奇异位姿的能力。针对 7R 6-DOF 非球型手腕机器人,WU^[17]和 WANG 等^[18]分别提出基于等效变换的逆解组合算法,以等效球型手腕机器人解析解作为近似解,采用数值迭代求取精确解。WANG 等^[19]采用类似算法求解一种具有 4R 3-DOF 型手腕的 7 自由度机器人的运动学逆解。该类算法可以提供更好的初始值,提高基于雅可比矩阵迭代算法的计算效率。但是,近似等效变换通常会引起机器人有效工作空间减小^[19],当给定目标位姿在一定区域会导致算法失效,影响算法的稳定性。对此,LI 等^[20]提出了目标位姿偏置补偿法,当目标位姿落入失效区时,通过沿末端轴线反或正方向偏置,将目标位姿调整到等效机器人的可

达工作空间,该算法的问题是确定偏置方向较困难,当关节 4 和关节 6 轴线夹角为 90° 时算法失效。

综上所述,6R 非球型手腕机器人逆运动学算法尚待进一步完善。本文基于等效变换的思路,提出一种近似解析法和数值迭代法相结合的 6R 非球型手腕机器人逆运动学组合算法。针对等效变换引起机器人有效工作空间减小的问题,提出了改进的目标位姿偏置补偿的方法提高算法的可靠性。最后,通过数值仿真对所提出逆运动学算法的稳定性和实时性开展了分析和验证。

1 运动学分析

1.1 6R 非球型手腕机器人介绍

如图 1 所示为一种自主研发的 6R 非球型手腕喷涂机器人,其中,关节 1、关节 2 和关节 3 采用垂直关节构型,即 $R \perp R // R$,通过这三个关节主要确定机器人末端位置;关节 4、关节 5 和关节 6 采用非球型手腕的构型,即三个关节轴线相交于两点,这三个关节主要确定机器人末端姿态。非球型手腕机器人不满足 Pieper 准则,直接求取解析解困难,一般采取数值法求其逆解。

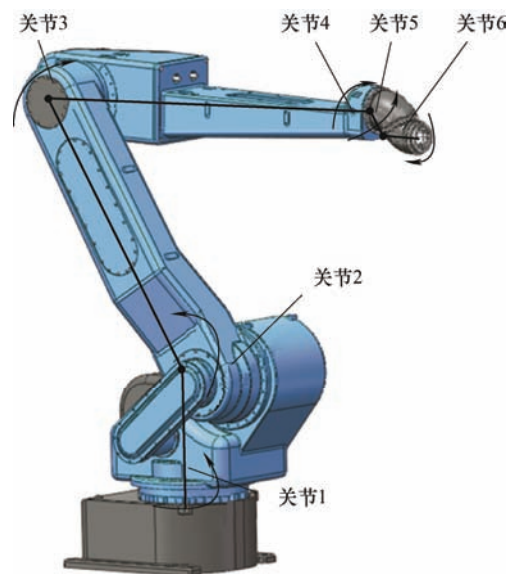


图 1 6R 非球型手腕喷涂机器人模型

为了后续求解方便,根据 D-H(Denavit-Hartenberg)参数法^[21-23],建立机器人的连杆坐标系,如图 2 所示,相应的 D-H 参数如表 1 所示。每个连杆坐标系可由四个参数 a_{i-1} , α_{i-1} , d_i , θ_i 来描述,其中 a_{i-1} 表示连杆长度, α_{i-1} 表示连杆扭角, d_i 表示关节偏距, θ_i 表示关节转角。根据 D-H 参数法建立机器人运动学模型,相邻连杆间的传递矩阵为

$${}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $s\theta_i = \sin \theta_i$, $c\theta_i = \cos \theta_i$, $s\alpha_i = \sin \alpha_i$, $c\alpha_i = \cos \alpha_i$ 。

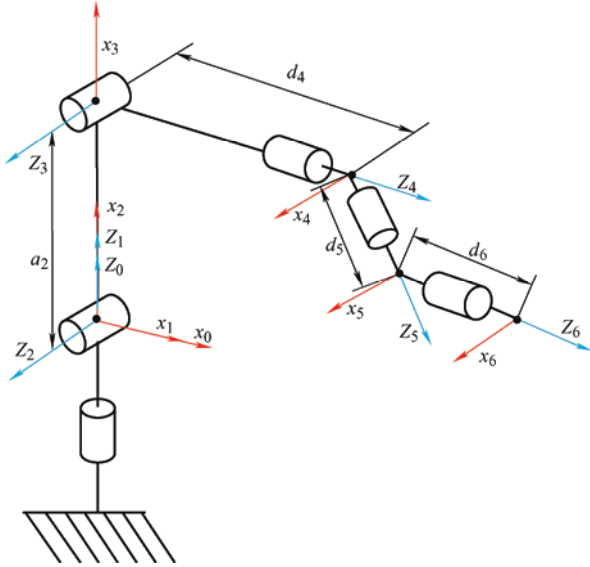


图 2 6R 非球型手腕机器人连杆坐标系

表 1 6R 非球型手腕喷涂机器人 D-H 参数

i	a_{i-1}	$\alpha_{i-1} / (^\circ)$	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	0	90	0	θ_2
3	a_2	0	0	θ_3
4	0	90	d_4	θ_4
5	0	-60	d_5	θ_5
6	0	60	d_6	θ_6

根据上述 D-H 参数, 机器人运动学正解表示为

$${}^0\mathbf{T} = {}^0\mathbf{T}(\theta_1) {}^1\mathbf{T}(\theta_2) {}^2\mathbf{T}(\theta_3) {}^3\mathbf{T}(\theta_4) {}^4\mathbf{T}(\theta_5) {}^5\mathbf{T}(\theta_6) \quad (2)$$

式中, ${}^0\mathbf{T}$ 表示机器人末端执行器在基坐标系下的齐次位姿矩阵。

1.2 等效球型手腕机器人逆运动学

相比球型手腕机器人, 6R 非球型手腕机器人后三关节轴线相交于两点, 不满足 Pieper 准则, 不存在解析解。但考虑到手腕偏置距离, 即连杆 5 长度较短, 且只影响机器人末端位置精度。为了求解方便, 忽略连杆 5 的长度, 即将连杆坐标系 5 的原点平移至连杆坐标系 4, 可以得到近似的等效 6R 球型手腕机器人, 如图 3 所示。相应的 D-H 参数如表 2 所示。

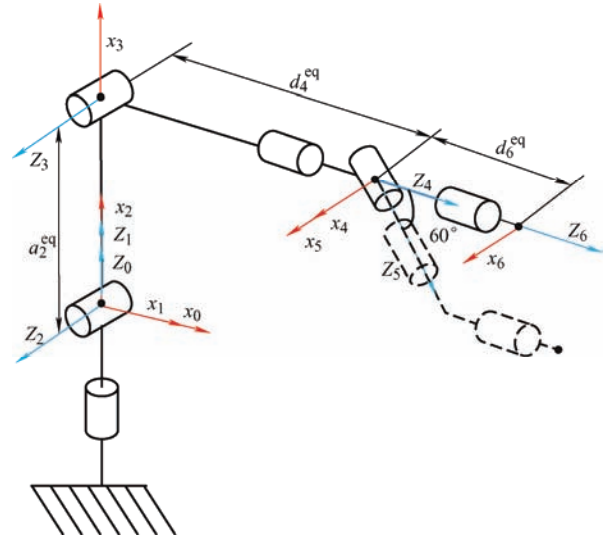


图 3 等效球型手腕机器人连杆坐标系

表 2 等效球型手腕喷涂机器人 D-H 参数

i	a_{i-1}	$\alpha_{i-1} / (^\circ)$	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1^{eq}
2	0	90	0	θ_2^{eq}
3	a_2^{eq}	0	0	θ_3^{eq}
4	0	90	d_4^{eq}	θ_4^{eq}
5	0	-60	0	θ_5^{eq}
6	0	60	d_6^{eq}	θ_6^{eq}

在求解 6R 非球型手腕机器人逆运动学之前, 首先计算等效球型手腕机器人运动学逆解。简化后的等效球型手腕机器人正向运动学方程表示为

$${}^0\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{T}(\theta_1^{\text{eq}}) {}^1\mathbf{T}(\theta_2^{\text{eq}}) {}^2\mathbf{T}(\theta_3^{\text{eq}}) {}^3\mathbf{T}(\theta_4^{\text{eq}}) {}^4\mathbf{T}(\theta_5^{\text{eq}}) {}^5\mathbf{T}(\theta_6^{\text{eq}}) \quad (3)$$

式中, ${}^0\mathbf{T}$ 表示机器人末端参考点相对基础坐标系的位姿矩阵。

对于逆运动学, 末端位姿 ${}^0\mathbf{T}$, 以及 \mathbf{n} , \mathbf{o} , \mathbf{a} 和 \mathbf{p} 为已知。机器人逆运动学就是根据式(3), 求各关节转角 θ_i^{eq} 。首先, 将式(3)两边同时左乘 ${}^0\mathbf{T}^{-1}(\theta_1^{\text{eq}})$ 可得

$${}^0\mathbf{T}^{-1}(\theta_1^{\text{eq}}) {}^0\mathbf{T} = {}^1\mathbf{T}(\theta_2^{\text{eq}}) {}^2\mathbf{T}(\theta_3^{\text{eq}}) {}^3\mathbf{T}(\theta_4^{\text{eq}}) {}^4\mathbf{T}(\theta_5^{\text{eq}}) {}^5\mathbf{T}(\theta_6^{\text{eq}}) \quad (4)$$

根据矩阵的最后一列对应元素相等可得

$$c_1^{\text{eq}} p_x + s_1^{\text{eq}} p_y = a_2^{\text{eq}} c_2^{\text{eq}} + d_4^{\text{eq}} s_{23}^{\text{eq}} \quad (5)$$

$$-s_1^{\text{eq}} p_x + c_1^{\text{eq}} p_y = 0 \quad (6)$$

$$p_z = a_2^{\text{eq}} s_2^{\text{eq}} - d_4^{\text{eq}} c_{23}^{\text{eq}} \quad (7)$$

式中, p_x, p_y, p_z 为 \mathbf{P} 中元素, $c_1^{\text{eq}} = \cos \theta_1^{\text{eq}}$, $s_1^{\text{eq}} = \sin \theta_1^{\text{eq}}$, $s_{23}^{\text{eq}} = \sin(\theta_2^{\text{eq}} + \theta_3^{\text{eq}})$, $c_{23}^{\text{eq}} = \cos(\theta_2^{\text{eq}} + \theta_3^{\text{eq}})$ 。

由式(6)求得 $\theta_1^{\text{eq}} = \text{Atan } 2(p_y, p_x)$

$$\theta_1^{\text{eq}'} = \begin{cases} \theta_1^{\text{eq}} - \pi (\theta_1^{\text{eq}} > 0) \\ \theta_1^{\text{eq}} + \pi (\theta_1^{\text{eq}} \leq 0) \end{cases} \quad (8)$$

式(5)、(6)、(7)左右两边平方后相加得

$$2a_2^{\text{eq}}d_4^{\text{eq}}s_3 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^{\text{eq}2} - d_4^{\text{eq}2} \quad (9)$$

求解式(9)可得

$$\theta_3^{\text{eq}} = \text{Atan } 2\left(k, \pm\sqrt{1-k^2}\right) \quad (10)$$

$$\text{其中, } k = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^{\text{eq}2} - d_4^{\text{eq}2}}{2a_2^{\text{eq}}d_4^{\text{eq}}}。$$

将式(3)两边同时左乘 ${}^0\mathbf{T}^{-1}(\theta_1^{\text{eq}}, \theta_2^{\text{eq}}, \theta_3^{\text{eq}})$ 可得

$${}^0\mathbf{T}^{-1}(\theta_1^{\text{eq}}, \theta_2^{\text{eq}}, \theta_3^{\text{eq}}){}^0\mathbf{T} = {}^3\mathbf{T}(\theta_4^{\text{eq}}){}^4\mathbf{T}(\theta_5^{\text{eq}}){}^5\mathbf{T}(\theta_6^{\text{eq}}) \quad (11)$$

式(11)左右两边矩阵的元素(1, 4), (2, 4)相等可以得到

$$c_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}}p_y + s_{23}^{\text{eq}}p_z - a_2^{\text{eq}}c_3^{\text{eq}} = 0 \quad (12)$$

$$c_1^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}}p_y - c_{23}^{\text{eq}}p_z - a_2^{\text{eq}}s_3^{\text{eq}} = d_4^{\text{eq}} \quad (13)$$

联立式(12)、(13), 求解可得

$$c_{23}^{\text{eq}} = \frac{(c_1^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}p_y)a_2^{\text{eq}}c_3^{\text{eq}} - (d_4^{\text{eq}} + a_2^{\text{eq}}s_3^{\text{eq}})p_z}{(c_1^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}p_y)^2 + p_z^2} \quad (14)$$

$$s_{23}^{\text{eq}} = \frac{(c_1^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}p_y)(a_2^{\text{eq}}s_3^{\text{eq}} + d_4^{\text{eq}}) + a_2^{\text{eq}}c_3^{\text{eq}}p_z}{(c_1^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}p_y)^2 + p_z^2} \quad (15)$$

由式(14)和(15)可以求得

$$\theta_{23}^{\text{eq}} = \text{Atan } 2\left((c_1^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}p_y)(a_2^{\text{eq}}s_3^{\text{eq}} + d_4^{\text{eq}}) + a_2^{\text{eq}}c_3^{\text{eq}}p_z, (c_1^{\text{eq}}p_x + s_1^{\text{eq}}p_y)a_2^{\text{eq}}c_3^{\text{eq}} - (d_4^{\text{eq}} + a_2^{\text{eq}}s_3^{\text{eq}})p_z\right) \quad (16)$$

$$\theta_2^{\text{eq}} = \theta_{23}^{\text{eq}} - \theta_3^{\text{eq}} \quad (17)$$

其中, $\theta_{23}^{\text{eq}} = \theta_2^{\text{eq}} + \theta_3^{\text{eq}}$ 。

令式(11)两边的元素(2,3)相等可以得到

$$c_1^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}}a_x + s_1^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}}a_y - c_{23}^{\text{eq}}a_z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}c_5^{\text{eq}} \quad (18)$$

由式(18), 求解可以得到

$$\theta_5^{\text{eq}} = \text{Atan } 2\left(\pm\sqrt{1-k_1^2}, k_1\right) \quad (19)$$

$$\text{其中, } k_1 = \left(c_1^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}}a_x + s_1^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}}a_y - c_{23}^{\text{eq}}a_z - \frac{1}{4}\right) \times \frac{4}{3}。$$

再令式(11)两边元素(1,3), (3,3)相等可以得到

$$c_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}}a_x + s_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}}a_y + s_{23}^{\text{eq}}a_z = \frac{\sqrt{3}}{4}s_4^{\text{eq}} - \frac{\sqrt{3}}{2}c_4^{\text{eq}}s_5^{\text{eq}} - \frac{\sqrt{3}}{4}s_4^{\text{eq}}c_5^{\text{eq}} \quad (20)$$

$$s_1^{\text{eq}}a_x - c_1^{\text{eq}}a_y = \frac{\sqrt{3}}{4}c_4^{\text{eq}}c_5^{\text{eq}} - \frac{\sqrt{3}}{4}c_4^{\text{eq}} - \frac{\sqrt{3}}{2}s_4^{\text{eq}}s_5^{\text{eq}} \quad (21)$$

联立式(20)、(21), 求解可以得到

$$\theta_4^{\text{eq}} = \text{Atan } 2(s_4^{\text{eq}}, c_4^{\text{eq}}) \quad (22)$$

$$k_2 = \left[(c_5^{\text{eq}} - 1)^2 + 4s_5^{\text{eq}2}\right] \times 3$$

$$s_4^{\text{eq}} = -4\sqrt{3}\left((c_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}} - 2s_1^{\text{eq}}s_5^{\text{eq}} - c_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}}c_5^{\text{eq}})a_x + (2c_1^{\text{eq}}c_5^{\text{eq}} + s_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}} - c_5^{\text{eq}}s_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}})a_y + (s_{23}^{\text{eq}} - c_5^{\text{eq}}s_{23}^{\text{eq}})a_z\right) / k_2$$

$$c_4^{\text{eq}} = 4\sqrt{3}\left((s_1^{\text{eq}} - s_1^{\text{eq}}c_5^{\text{eq}} + 2c_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}}s_5^{\text{eq}})a_x + (c_1^{\text{eq}}c_5^{\text{eq}} - c_1^{\text{eq}} + 2s_5^{\text{eq}}s_1^{\text{eq}}c_{23}^{\text{eq}})a_y + 2s_{23}^{\text{eq}}s_5^{\text{eq}}a_z\right) / k_2$$

同理可以求得 θ_6^{eq} 。综合可得, 给定机器人末端位姿矩阵, 可求取 8 组运动学逆解, 分别对应 θ_1^{eq} 、 θ_3^{eq} 和 θ_5^{eq} 的两组解。

1.3 球型手腕和非球型手腕机器人变换分析

为了将上述球型手腕机器人的逆解算法应用于 6R 非球型手腕机器人, 对比两种机器人的关节构型, 如图 2 和图 3 所示。相较球型手腕机器人, 6R 非球型手腕机器人最大的不同是手腕轴线相交于两点, 即手腕轴线存在偏置。但是考虑到各关节轴线方向相同, 手腕偏置距离较短, 且只影响末端位置精度。可以直接忽略手腕的偏置, 获得如式(23)所示的近似等效变换关系。

$$\begin{cases} \theta_1^{\text{eq}} = \theta_1, & \theta_2^{\text{eq}} = \theta_2, & \theta_3^{\text{eq}} = \theta_3, & \theta_4^{\text{eq}} = \theta_4 \\ \theta_5^{\text{eq}} = \theta_5, & \theta_6^{\text{eq}} = \theta_6 \\ a_2^{\text{eq}} = a_2, & d_4^{\text{eq}} = d_4, & d_5^{\text{eq}} = 0, & d_6^{\text{eq}} = d_6 \end{cases} \quad (23)$$

式中, θ_i^{eq} 为球型手腕机器人的关节转角, θ_i 为非球型手腕机器人的关节转角。近似等效变换引起机器人末端位置误差为 $p_{\text{err}} = d_5$, 由于 $d_5 = 138 \text{ mm}$ 相对较小, 等效球型手腕机器人的逆解可作为 6R 非球型手腕机器人逆解的近似解, 并可以作为数值迭代法的初始解, 从而提高 6R 非球型手腕机器人逆运动学迭代算法的效率和稳定性。近似等效变换引起位置误差对逆运动学算法的影响在第 2.3 节和 3.1 节进一步分析。

2 6R 非球型手腕机器人逆运动学

2.1 数值迭代算法

对于不存在解析解的机器人, 最小二乘法是应用最广泛的逆运动学算法。本文采用最小二乘法求 6R 非球型手腕机器人逆运动学精确解, 机器人关节转角增量计算公式为^[18]

$$d\theta = J^+ dx = (J^T J)^{-1} J^T dx \quad (24)$$

其中, $J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$ 为雅可比矩阵 J 的伪逆, $d\theta$ 为关节增量, dx 为末端位置和姿态误差矢量。

$$\begin{cases} ep = p_d - p_a \\ ew = 1/2(n_a \otimes n_d + o_a \otimes o_d + a_a \otimes a_d) \\ dx = [ep; ew] \end{cases} \quad (25)$$

式中, p_a 和 p_d 是矩阵 T_a 和 T_d 的位置矢量, n_a, o_a, a_a 和 n_d, o_d, a_d 是矩阵 T_a 和 T_d 姿态矢量, T_a 和 T_d 分别表示当前位姿矩阵和目标位姿矩阵。

综合上式, 机器人关节转角迭代公式为

$$\theta = \theta + (J^T J)^{-1} J^T dx \quad (26)$$

迭代终止条件为机器人末端位置误差小于等于给定阈值或达到最大迭代次数。

$$p_{err} = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2} \leq \xi_p \quad (27)$$

式中, e_x, e_y, e_z 为 ep 中的元素, ξ_p 为给定阈值。

2.2 逆运动学组合算法

逆运动学组合算法流程如表 3 所示: 第一步, 根据 6R 非球型手腕机器人的 DH 参数, 计算等效球型手腕机器人 DH 参数, 如式(23)所示。第二步, 根据给定末端位姿矩阵 T_d , 计算等效球型手腕机器人逆运动学解析解 θ_i^{eq} , 求解过程见 1.2 节。第三步,

表 3 组合算法流程

序号	组合算法流程
1	等效球型手腕机器人 DH 参数表 \leftarrow 6R 非球型手腕机器人 DH 参数
2	$\theta^{eq} = IK_{eq}({}^0T)$ 根据给定末端位姿计算等效球型手腕机器人逆运动学解析解
3	$\theta_m = \theta^{eq}$ 根据等效球型手腕机器人关节转角获得 6R 非球型手腕机器人关节转角初始值
4	$T_a = DK(\theta_m)$ 计算 6R 非球型手腕机器人当前位姿
5	$T_a, T_d \Rightarrow dx$ 计算机器人当前位姿和目标位姿的位姿误差矢量
6	$\theta_m = \theta_m + (J^T J)^{-1} J^T dx$ 通过雅可比矩阵迭代法更新各个关节值
7	如果 $p_{err} \leq \xi_p$ 迭代结束, 并且 $\theta_{final} = \theta_m$, 否则重复步骤 4~7。

根据等效球型手腕机器人逆解, 转化得到 6R 非球型手腕机器人的逆运动学近似解。第四步至第七步, 采用基于运动雅可比矩阵的数值迭代法求精确解。

该组合方法结合了球型手腕机器人逆运动学解析算法与数值迭代方法。通过合理等效变换, 以等效球型手腕机器人逆运动学解析解作为近似解, 可以为数值迭代法提供良好的初始值, 有效提高算法的效率和稳定性。另外, 一般数值迭代法只能求取一个逆解, 该组合算法根据等效球型手腕机器人的 8 组近似解, 可以求取 8 组逆运动学精确解, 并且可以根据关节转角范围方便的选出所需要的逆解, 这是该逆运动学组合算法的另一个优点^[14]。

2.3 组合算法的分析与改进

在上述组合算法中, 需要根据给定的机器人实际末端位姿, 计算等效球型手腕机器人的逆运动学解析解, 为后续迭代算法提供初始值。分析机器人等效转化过程可知, 相较原 6R 非球型手腕机器人, 等效球型手腕机器人的末端参考点向关节坐标系 4 的方向平移了距离 d_5 , 将导致机器人的可达工作空间减小, 如图 4 所示。因此, 当给定末端位姿位于失效空间区域时, 由于超出等效球型手腕机器人可达工作空间, 其逆运动学无解, 本文提出的逆运动学组合算法将失效。

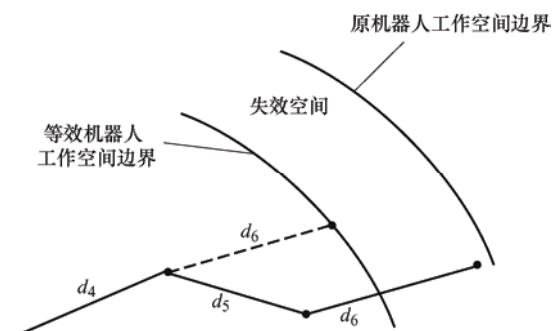


图 4 机器人工作空间减小问题

由图 4 可知, 失效空间区域的大小与机器人手腕的尺寸有关, 手腕偏置距离 d_5 越长, 失效空间的范围越大, 逆解算法失败的几率也越大。为了提高算法的稳定性, 文献[20]提出了末端目标位姿偏置补偿法, 如图 5 所示。机器人末端位置偏置计算公式为

$$p_d^* = p_d + R_d v \quad (28)$$

式中, $v = [0 \ 0 \ \text{sign}(\theta - 90^\circ)d]$, 当关节 4 和关节 6 轴线的夹角小于 90° 时, 将目标位置 p_d 沿 z_6 轴负向偏置距离 d , 得到新的目标位置 p_d^* 。当关节 4 和关节 6 轴线夹角大于 90° 时, 将目标位置 p_d 沿 z_6 轴正向偏置距离 d , 得到新的目标位置 p_d^* 。当关节 4

和关节 6 轴线夹角等于 90° 时, 该方法失效。此外, 对于逆运动学, 无法提前求得关节 4 轴线方向, 故关节 4 和关节 6 轴线夹角难以判断。对此, 该文献采用试探的方法, 首先沿 z_6 轴负向偏置, 无效再沿 z_6 轴正向偏置, 算法效率较低。

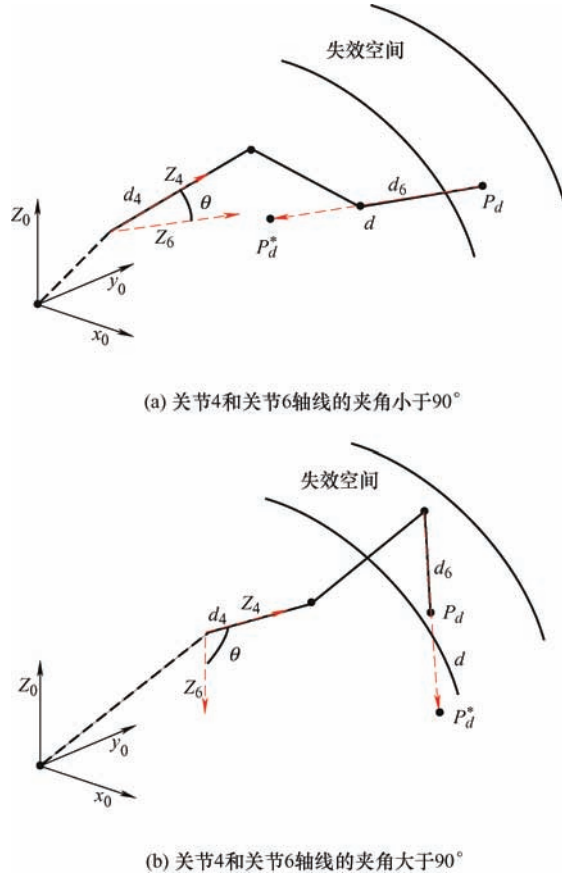


图 5 文献[20]目标位姿偏置补偿方法示意图

针对文献[20]中算法效率低, 以及无法解决当关节 4 和关节 6 轴线成 90° 时算法失效的问题, 本文提出了改进的末端位姿偏置补偿法, 如图 6 所示。由于机器人的工作空间可以近似看作绕基础坐标系原点的球型, 当末端位姿落入失效空间区域时, 将末端参考点向着基础坐标系原点的方向偏置一定距离, 即可使目标位姿进入等效机器人的工作空间内。改进的机器人末端位置偏置计算公式为

$$\mathbf{p}_d^* = \mathbf{p}_d - d\mathbf{w} \quad (29)$$

式中, $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{p}_d}{\|\mathbf{p}_d\|}$ 为偏置方向矢量, d 为偏置距离,

一般取 $d = d_5$ 。由于改进算法无需预先计算机器人关节轴线方向, 只需根据式(10), 判断 k 是否小于等于 1, 当 $k > 1$ 时, 按照式(29)对机器人末端位置进行偏置。算法对于关节 4 和关节 6 轴线夹角大于、小于和等于 90° 的情况均适用。

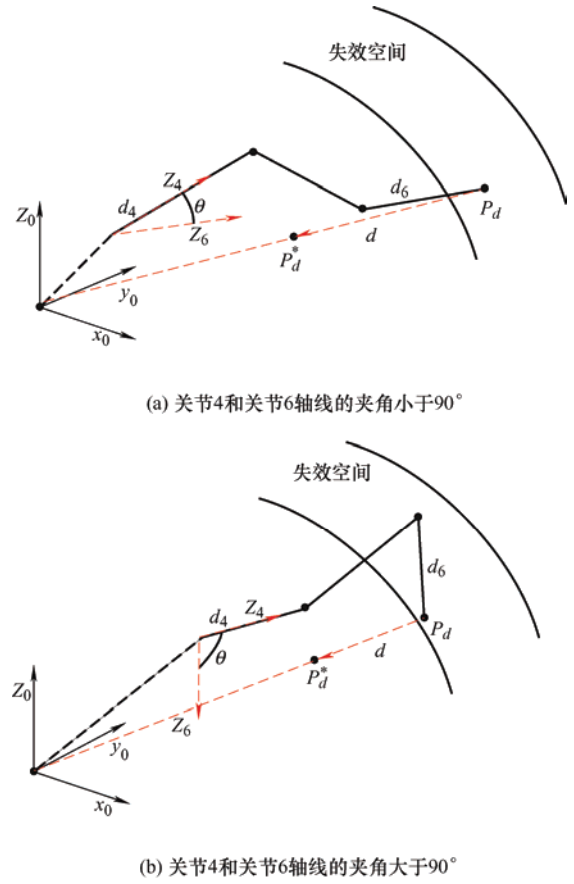


图 6 改进的目标位姿偏置补偿方法示意图

3 实例分析

3.1 算例 1

为了验证本文提出 6R 非球型手腕机器人逆运动学组合算法的有效性, 以自主研发的 6R 非球型手腕喷涂机器人, 如图 1 所示, 为对象给出算例。计算机配置为: Pentium i7 2.8 GHz, 8 GB RAM。机器人主要 DH 参数为 $a_2=1\ 100\text{ mm}$, $d_2=1\ 450\text{ mm}$, $d_5=138\text{ mm}$, $d_6=150\text{ mm}$, 各个关节转角范围, 如表 4 所示。首先, 选择一组典型的机器人关节转角 $\theta=[60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 60^\circ]$ 为例, 根据式(2), 机器人末端目标位姿矩阵为

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} 0.4735 & -0.0372 & 0.8800 & 1142.3724 \\ 0.0623 & 0.9980 & 0.0087 & 1631.8040 \\ -0.8786 & 0.0508 & 0.4749 & 1693.7262 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

根据 1.2 节和 1.3 节推导, 可以计算等效球型手腕机器人逆运动学解析解, 通过等效转换得到 6R 非球型手腕机器人的逆运动学近似解如表 5 所示。

表 4 机器人关节转角范围

关节 i	1	2	3	4	5	6
转角范围/(°)	[-150, 150]	[-50, 110]	[-70, 90]	[-360, 360]	[-360, 360]	[-360, 360]

表 5 机器人逆运动学近似解

θ_1 /(°)	θ_2 /(°)	θ_3 /(°)	θ_4 /(°)	θ_5 /(°)	θ_6 /(°)
55.005 4	64.227 4	50.689 2	58.249 4	56.475 6	69.014 9
-124.994 6	163.478 9	50.689 2	-92.235 3	54.984 8	27.286 8
55.005 4	16.521 1	129.310 8	87.764 7	54.984 8	27.286 8
-124.994 6	115.772 6	129.310 8	-121.750 6	56.475 6	69.014 9
55.005 4	64.227 4	50.689 2	-91.689 4	-56.475 6	-80.923 8
-124.994 6	163.478 9	50.689 2	116.934 6	-54.984 8	-123.543 4
55.005 4	16.521 1	129.310 8	-63.065 4	-54.984 8	-123.543 4
-124.994 6	115.772 6	129.310 8	88.310 6	-56.475 6	-80.923 8

以近似解为初始值,并根据第 2.1 节,采用基于运动雅可比矩阵的数值迭代法求解 6R 非球型手腕机器人精确逆解,如表 6 所示,迭代终止条件设定为 $\zeta_p=0.01$ mm。

表 6 机器人逆运动学精确解

θ_1 /(°)	θ_2 /(°)	θ_3 /(°)	θ_4 /(°)	θ_5 /(°)	θ_6 /(°)
60.000 0	60.000 0	60.000 0	60.000 0	60.000 0	60.000 0
-121.554 0	159.577 7	51.548 4	-93.713 2	57.915 1	22.945 7
58.446 0	20.422 3	128.451 6	86.286 8	57.915 1	22.945 7
-120.000 0	120.000 0	120.000 0	-120.000 0	60.000 0	60.000 0
57.999 6	60.030 9	51.547 0	-93.455 7	-60.865 9	-76.583 2
-120.641 3	159.554 6	60.325 7	108.688 2	-57.154 9	-114.801 3
59.358 7	20.445 4	119.674 3	-71.311 8	-57.154 9	-114.801 3
-122.000 4	119.969 1	128.453 0	86.544 3	-60.865 9	-76.583 2

由表 6 可知,给定 1 组机器人末端位姿,可以求得 8 组运动学逆解。其中第一组逆解与给定关节转角误差小于 $0.000 1^\circ$,验证了组合算法的计算精度。此外,对比表 5 和表 6 可得,通过等效变换法,采用等效球型手腕机器人逆运动学解析解求得 6R 非球型手腕机器人逆运动学近似解与精确解误差小于 10° ,近似解可以为数值迭代法提供可靠的初始值,提高算法的效率和可靠性。

3.2 算例 2

为了验证改进的末端位姿偏置补偿法对工作空间缩小问题的有效性,给定机器人三组末端位姿:位姿 1 与算例 1 相同,位姿 2 和位姿 3 位于机器人失效工作空间内。并且处于位姿 2 时,机器人关节 4 和关节 6 轴线夹角小于 90° ,位姿 3 时,机器人关节 4 和关节 6 轴线夹角约等于 90° 。分别采用无目标位姿偏置处理的初始组合算法、文献[20]的算法和本文改进的目标位姿偏置法进行求解,运算时间如表 7 所示。

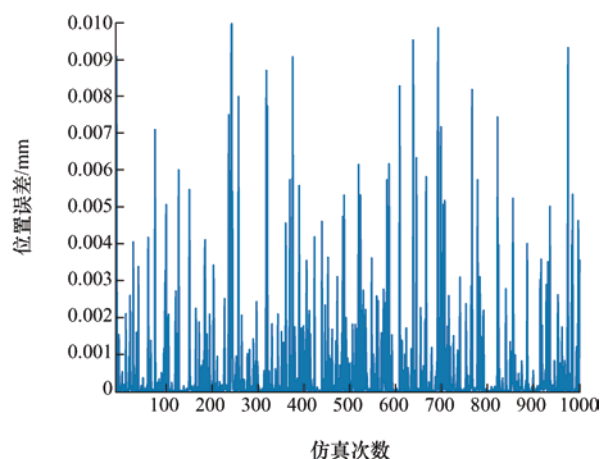
表 7 运动学逆解算法的运算时间(ms)

	位姿 1	位姿 2	位姿 3
本文改进算法	1.3	2.4	2.3
文献[20]算法	1.2	2.1	—
初始组合算法	1.2	—	—

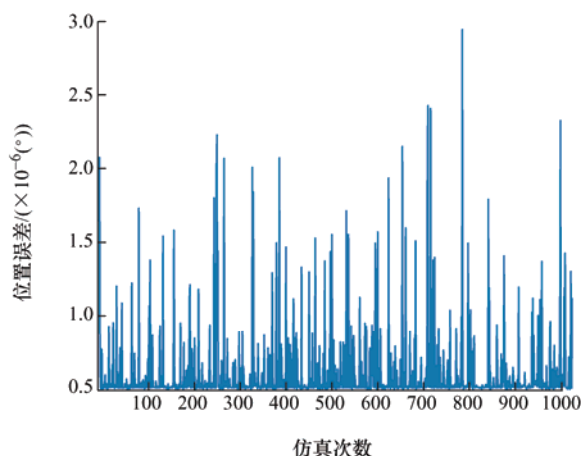
由表 7 可知,当位姿 1 不在失效空间,三种算法均可以求得逆解,运算时间小于 1.5 ms。当给定位姿 2 在失效空间,初始组合算法失效,两种目标位姿偏置法均可以求得逆解,运算时间小于 2.5 ms,实时性较好。当给定位姿 3 在失效空间,初始组合算法和文献[20]算法均失效,只有本文改进的目标位姿偏置法可以求得逆解,运算时间小于 2.5 ms,实时性较好。通过算例证明本文提出逆运动学算法具有更好的稳定性。

3.3 算例 3

为了进一步验证算法的可靠性和实时性,在机器人的可用工作空间内随机选取 1 000 组关节位姿,逆运动学算法的求解精度和运算时间分别如图 7 和图 8 所示。



(a) 位置误差



(b) 姿态误差

图 7 逆运动学算法的计算误差

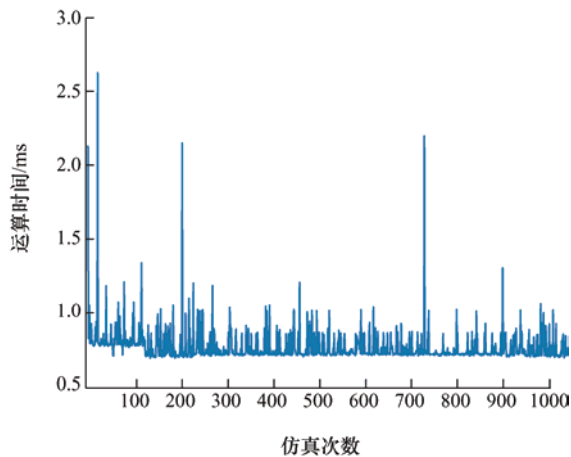


图 8 算法的运算时间

由图 7 和图 8 可得, 对于 1 000 组位姿, 逆运动学求解精度较高, 最大位置误差小于 0.01 mm, 最大姿态误差小于 $3 \times 10^{-6} (^{\circ})$ 。平均运算时间 0.9 ms, 最大运算时间小于 3 ms, 实时性较好, 并且三个运算时间较长的位姿均位于等效变换引起的失效空间内。通过算例 3 证明本文提出的 6R 非球型手腕机器人的改进的逆运动学组合算法在工作空间内具有较好的稳定性和实时性。

4 结论

(1) 提出一种近似解析法和数值迭代法相结合的 6R 非球型手腕机器人的逆运动学组合算法。该算法相较于传统的基于运动雅可比矩阵的数值迭代法, 通过等效变换, 以等效球型手腕机器人逆运动学解析解作为近似解, 解决了对于初值敏感的问题, 具有更好的运算效率和稳定性。

(2) 针对等效变换引起的机器人有效工作空间减小的问题, 提出了改进的目标位姿偏置补偿算法: 当末端位姿进入失效空间, 将机器人末端参考点向着基础坐标系原点的方向偏置一定距离, 使目标位置落入等效机器人的工作空间。该改进的方法提高了组合算法的鲁棒性。

(3) 以自主研发的 6R 非球型手腕喷涂机器人为例, 进行了机器人运动学逆解的仿真验证。算例结果证明本文所提出的一种 6R 非球型手腕机器人逆运动学算法具有较好的计算精度、实时性和稳定性。该逆运动学算法可以推广应用到其他具有非球型手腕的串联机器人。

参 考 文 献

[1] 刘亚军, 黄田. 6R 操作臂逆运动学分析与轨迹规划[J]. 机械工程学报, 2012, 48(3): 9-15.

LIU Yajun, HUANG Tian. Inverse kinematics analysis and trajectory planning of 6R operating arm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(3): 9-15.

[2] PIEPER D L. The kinematics of manipulators under computer control[D]. California: Stanford University, PhD Thesis, 1969.

[3] DUFFY J. Analysis of mechanisms and robot manipulators[M]. London: Edward Arnold, 1980.

[4] RAGHAVAN M, ROTH B. Inverse kinematics of the general 6R manipulator and related linkages[J]. Mechanical Design, 1993, 115(3): 502-508.

[5] MANOCHA D, CANNY J. Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 10(5): 648-657.

[6] 刘松国, 朱世强, 王宣银. 基于矩阵分解的一般 6R 机器人实时高精度逆运动学算法[J]. 机械工程学报, 2008, 44(11): 304-309.

LIU Songguo, ZHU Shiqiang, WANG Xuanyin. Real-time high-precision inverse kinematics algorithm for general 6R robot based on matrix factorization[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(11): 304-309.

[7] HUSTY M L, PFUMER M, SCHRÖCKER H P. A new and efficient algorithm for the inverse kinematics of a general serial 6R manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(1): 66-81.

[8] QIAO S, LIAO Q, WEI S, et al. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on double quaternions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(2): 193-199.

[9] 吕世增, 张大卫, 刘海年. 基于吴方法的 6R 机器人逆运动学旋量方程求解[J]. 机械工程学报, 2010, 46(17): 35-41.

LÜ Shizeng, ZHANG Dawei, LIU Hainian. Solving the screw equation of inverse kinematics of 6R robot based on Wu's method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(17): 35-41.

[10] 孙恒辉, 赵爱武, 李达, 等. 基于新旋量子问题改进一类 6R 串联机器人逆解算法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(1): 79-86.

SUN Henghui, ZHAO Aiwu, LI Da, et al. An improved inverse solution algorithm for a class of 6R serial robots based on the new spin quantum problem[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 79-86.

[11] ASADI-EYDIVAND M, EBADZADEH M M, SOLATI-HASHJIN M, et al. Cerebellum-inspired neural network solution of the inverse kinematics problem[J].

- Biological Cybernetics, 2015, 109(6): 561-574.
- [12] KALRA P, MAHAPATRA P B, AGGARWAL D K. An evolutionary approach for solving the multimodal inverse kinematics problem of industrial robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(10): 1213-1229.
- [13] KUCUK S, BINGUL Z. Inverse kinematics solutions for industrial robot manipulators with offset wrists[J]. Applied Mathematical Modeling, 2014, 38(7-8): 1983-1999.
- [14] WANG X, ZHANG D, ZHAO C. The inverse kinematics of a 7R 6-degree-of-freedom robot with non-spherical wrist[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2017, 9(8): 1-11.
- [15] KHATIB O. A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation[J]. IEEE Journal on Robotics and Automation, 1987, 3(1): 43-53.
- [16] CHO G R, LEE M J, KIM M G, et al. Inverse kinematics for autonomous underwater manipulations using weighted damped least squares[C]// Proceedings of 14th International Conference on Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI). Jeju: IEEE, 2017, 765-770.
- [17] WU L, YANG X, MIAO D, et al. Inverse kinematics of a class of 7R 6-DOF robots with non-spherical wrist[C]// Proceedings of 2013 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. Takamatsu: IEEE, 2013, 69-74.
- [18] WANG X, ZHANG D, ZHAO C. Inverse kinematics of a 7R 6-DOF robot with nonspherical wrist based on transformation into the 6R robot[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2017, 2017: 1-12.
- [19] WANG Y, ZHAO C, WANG X, et al. Inverse kinematics of a 7-DOF spraying robot with 4R 3-DOF non-spherical wrist[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2021, 68: 1-17.
- [20] LI J, YU H, SHEN N, et al. A novel inverse kinematics method for 6-DOF robots with non-spherical wrist[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 157: 1-17.
- [21] WU M, KUNG Y, LEE F, et al. Inverse kinematics of robot manipulators with offset wrist[C]// Proceedings of 2015 International Conference on Advanced Robotics and Intelligent Systems. Taipei, China: IEEE, 2015, 1-6.
- [22] 齐有泉, 李艳文, 陈子明, 等. 串联九自由度喷涂机器人及其运动学分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(23): 165-171.
- QI Youquan, LI Yanwen, CHEN Ziming, et al. Series nine-degree-of-freedom spray robot and its kinematics[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(23): 165-171.
- [23] 王超, 张文辉, 江洁, 等. 基于 Matlab/Adams 的工业焊接机器人运动学分析与控制联合仿真[J]. 中国工程机械学报, 2020, 18(6): 504-509.
- WANG Chao, ZHANG Wenhui, JIANG Jie, et al. Co-simulation of kinematic analysis and control of industrial welding robot based on Matlab/Adams[J]. Chinese Journal of Construction Machinery, 2020, 18(6): 504-509.

作者简介: 罗任峰, 男, 1988 年出生。主要研究方向为工业喷涂机器人。

E-mail: 1204110172@qq.com

王旭浩(通信作者), 男, 1989 年出生, 讲师, 硕士研究生导师。主要研究方向为工业喷涂机器人设计与应用技术, 民航特种设备。

E-mail: xh_wang@cauc.edu.cn

张大卫, 男, 1962 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为喷涂机器人设计理论与应用技术, 高档数控机床精度设计与补偿技术、热误差主动控制技术, 微纳制造技术。

E-mail: medzhang1101@tju.edu.cn