

DOI: 10.3901/JME.2022.16.441

考虑不完美检测和最小维修次数限制的退化系统 预防性维修策略优化^{*}

张凤霞 马义中 沈静远 谢 恩

(南京理工大学经济管理学院 南京 210094)

摘要: 在系统运行期间,通过检测发现系统的缺陷状态,在其未失效时提前采取预防性维修措施,可以有效减少失效带来的严重后果。检测通常是不完美的,且检测误差概率是非恒定的;当检测显示系统处于缺陷状态,进行最小维修,且限制最小维修的次数,当多次检测到缺陷时进行基于检测的更换;在规定的時間间隔进行基于年龄的更换,更换可以更新系统。采用递归方法推导更新周期的期望成本和期望长度,采用更新报酬理论建立无限时间域的成本率模型,并通过优化算法对检测间隔、最小维修次数上限以及基于年龄的更换间隔三个决策变量进行联合优化。以钢制转炉系统为例说明所提维修策略的性能和实用性,灵敏度分析结果表明最小维修次数上限只对最小维修成本和预防性更换成本较为敏感;通过与未考虑最小维修和未限制最小维修次数的策略分别进行比较,说明所提维修策略的优势;通过仿真分析验证模型的正确性。

关键词: 延迟时间模型; 非恒定检测误差概率; 最小维修; 混合预防性维修策略

中图分类号: TG156

Optimal Preventive Maintenance Policy Considering Imperfect Inspection and Limiting the Number of Minimal Repairs for Degradation System

ZHANG Fengxia MA Yizhong SHEN Jingyuan XIE En

(School of Economics and Management, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract: During the operation of the system, it can effectively reduce the serious consequences of failure to discover the defective state of the system through inspection and perform preventive maintenance in advance. Inspections are generally imperfect and probabilities of inspection errors are non-constant. When the system is indicated to be defective, minimal repair is carried out, and the number of minimal repairs is limited. Inspection-based replacement will be performed when the inspections reveal the defects for several times. In addition, age-based replacement is scheduled at the specified time interval, and replacement can renew the system. The expected cost and the expected length per renewal cycle are derived by using a recursive method. The cost rate over an infinite time horizon is formulated based on the renewal reward theorem. The inspection interval, the upper limit of the number of minimal repairs and the age-based replacement interval are jointly optimized through the optimization algorithm. The steel converter system is provided to illustrate the performance and applicability of the proposed maintenance policy. The sensitivity analysis results show that the upper limit of the number of minimal repairs is only sensitive to the cost of minimal repair and preventive replacement. To show the advantages of the proposed method, the policies not considering minimal repair and not limiting the number of minimal repairs are separately presented for comparison. Simulation algorithm is introduced to verify the correctness of the method.

Key words: delay time model; non-constant probabilities of inspection errors; minimal repair; hybrid preventive maintenance policy

^{*} 国家自然科学基金(71931006, 71871119, 72171117, 71801128)和江苏省卓越博士后计划(2022ZB260)资助项目。20210822 收到初稿, 20220515 收到修改稿

0 前言

对于大多数系统,退化是不可避免的现象,系统不断退化进入缺陷状态。在缺陷状态时,系统仍可以运行,但会出现如疲劳裂纹、凹痕、腐蚀、磨损等的缺陷信号^[1-3]。如果对缺陷状态置之不理,缺陷状态最终会演化为失效状态。系统一旦失效,通常会带来严重的成本和安全后果,如导致重大的经济损失、人员伤亡或不可逆转的环境危害^[4-5]。CHRISTER 等^[6]于 1984 年提出的延迟时间模型可以用来描述此类退化失效过程。在过去的二十年中,基于延迟时间的维修模型已在各种实际应用中得到了广泛研究,例如生产线、铁路轨道、输油管道以及医疗设备等^[7-9]。WANG^[10]综述了 1999 年至 2012 年间延迟时间模型在维修建模和应用方面的进展,有关该模型的最新研究可参考文献[11-13]。

在实际生产过程中,可以通过检测发现系统的缺陷状态,从而在失效发生之前采取适当的预防性维修措施^[14-15]。到目前为止,各个工业领域(例如制造、能源生产和运输等)已经对完美检测(检测可以准确的揭示系统的真实状态)进行了较为详尽的研究^[16-18]。但是,实际上,由于技术的限制和环境的影响,检测通常会出现误差,如人为误差和设备的测量误差等,使得检测结果不能准确反映系统的退化水平,即存在不完美检测^[19]。例如,在钢制转炉系统中,为预防系统失效,工程师通过定期检测发现其缺陷状态,提前采取维修措施。但是,这种检测主要是在不关闭系统的情况下从外部进行的,可能会给出错误的结果,如,系统存在缺陷未检测出来,或者系统还未发生缺陷却检测出缺陷。

检测误差一般分为两类。I 型是系统处于正常状态,检测却表明其处于缺陷状态,称为假阳性误差。II 型是检测表明系统处于正常状态,但实际上其处于缺陷状态,称为假阴性误差。文献中已经存在多种不完美检测模型,例如,仅考虑假阴性误差的模型^[20-21],同时考虑假阳性和假阴性的模型^[22-24]。但上述关于不完美检测的文献都假设检测误差概率是恒定的,然而,在实际情况中,检测误差概率往往随着系统工作时间的变化而变化。例如,在较长一段时间内,如果检测一直显示系统处于正常状态,工程师可能不再依赖检测结果,而是更倾向于使用基于经验的判断——系统可能已经发生缺陷。此外,在缺陷发生的早期阶段,疲劳裂纹或点蚀很小,不能轻易地检测出缺陷状态;随着系统不断退化,更

容易检测到缺陷。迄今为止,仅有少数研究关注了非恒定检测误差概率问题^[25]。WANG^[26]假设缺陷识别概率是具有上限的关于延迟时间的增函数。DRIESSEN 等^[27]假设假阳性的概率取决于系统在正常状态下运行的时间,且假阴性的概率与系统退化有关。此外,他们还说明使用非恒定检测误差概率的模型比具有恒定检测误差概率的模型更准确,以此制定的最优维修策略可能产生更低的成本。

在考虑非恒定检测误差概率的预防性维修策略研究中,仅有的文献大都假设一旦检测到缺陷,对系统进行完美维修(如更换)。但是,在实际的维修任务中,由于技术、人力资源和维修时间的限制,往往对缺陷进行不完美维修^[28-29]。例如,在钢制转炉系统中,当检测到缺陷(检测表明存在疲劳裂纹或点蚀等),先执行一些基本维修活动,例如,重新涂装、焊接和表面润滑等。这样的修复活动是局部的,通常是不完美的,即不能将系统恢复如新。到现在为止,文献中已经存在多种模型用以描述不完美维修^[30-32]。其中,最小维修作为不完美维修的一种特殊情况,已被广泛应用于预防性维修建模^[33-35]。更进一步,当采用最小维修时,考虑到随着最小维修次数的增加,系统的总体退化趋势在不断增加,越来越容易产生失效,因此,需要对最小维修次数进行限制,即在多次检测到系统缺陷时不再进行最小维修,而是直接进行完美维修。

不完美检测和不完美维修在实践中普遍存在,当制定维修策略时,如果忽略这两种现象可能会导致严重的后果。然而,通过文献分析发现,仅有少量文献同时考虑了不完美检测和不完美维修,尤其是,到目前为止,还没有文献同时研究具有非恒定检测误差概率的不完美检测和限制维修次数的不完美维修问题。

本文采用延迟时间模型描述系统的三态退化过程。考虑检测是不完美的,且检测误差概率随时间的变化而变化。同时考虑最小维修和预防性更换,提出一种混合预防性维修策略(检测-最小维修-更换策略)。当检测显示系统处于缺陷状态(无论是假阳性还是确实存在缺陷),进行最小维修,且最小维修次数存在上限,当第 n 次检测到缺陷时,进行预防性更换。另外,因为检测存在误差,在多次不完美检测之后,进行基于年龄的更换。根据不同的更新点,通过递归方法分别计算不同更新场景的概率。基于概率方法,计算更新周期的期望成本和期望长度,通过更新报酬理论,得到无限时间域的成本率模型。最小化成本率以确定系统的最优检测间隔、

基于年龄的更换间隔和最小维修次数上限。

1 系统描述及模型假设

考虑一个退化系统, 其经历三个状态: 正常、缺陷和失效状态。在正常状态下, 系统正常运行, 没有发生任何可检测的缺陷。处于缺陷状态时, 系统仍可以运行, 但存在一些需要修复的缺陷。如果不采取相应的维修措施, 缺陷最终会发展成导致高昂成本或者灾难性后果的失效, 采用延迟时间模型来表征此退化失效过程。为了研究这样的系统, 首先给出如下基本假设。

(1) 系统的失效状态是自警的, 即一旦发生就会立即显示出来, 而缺陷状态只能通过检测发现。

(2) 系统在正常状态的持续时间(即进入缺陷状态的时间点), 称为缺陷到达时间。用具有累积分布函数(Cumulative distribution function, CDF) $F_X(x)$ 和概率密度函数(Probability density function, PDF) $f_X(x)$ 的连续随机变量 $X > 0$ 表示, 且缺陷率表示为 $\lambda(x)$ 。从进入缺陷状态到系统失效的随机时间称为延迟时间, 用 CDF 和 PDF 分别为 $F_Y(y)$ 和 $f_Y(y)$ 的连续随机变量 $Y > 0$ 表示, 且失效率表示为 $h(y)$ 。此外, 假设变量 X 和 Y 是相互独立的。

(3) 假设一个新系统从 $t=0$ 开始运行, 每经过 $T > 0$ 单位时间对该系统进行定期检测。检测是不完美的, 同时考虑假阳性和假阴性两种检测误差。

(4) 出现错误检测结果的可能性随系统工作时间的变化而变化, 即检测误差概率是非恒定的。令 $\alpha(t)$ 和 $\beta((t-x)/y)$ 分别描述假阳性误差和假阴性误差的概率, 其中, x 表示缺陷到达时间, y 表示延迟时间。表 1 总结了不完美检测后不同检测结果的概率。

表 1 不完美检测后不同检测结果的概率

| 检测结果 | 系统状态 | |
|------|-----------------|----------------------|
| | 系统正常 | 系统缺陷 |
| 系统正常 | $1 - \alpha(t)$ | $\beta((t-x)/y)$ |
| 系统缺陷 | $\alpha(t)$ | $1 - \beta((t-x)/y)$ |

(5) 当检测判断系统处于缺陷状态, 无论是真的处于缺陷状态还是存在假阳性误差, 对系统进行最小维修。如果系统的真实状态为缺陷状态, 对其进行最小维修后, 系统恢复到正常状态, 但其缺陷率保持不变(与维修前最后一刻相同)。同时, 假设最小维修后, 系统不存在累积缺陷年龄, 失效率变为 0。如果发生了假阳性, 系统的真实状态为正常

状态, 对其进行最小维修后, 系统仍为正常状态, 且其缺陷率保持不变, 失效率为 0。

(6) 当第 n 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换, $n=1, 2, \dots$, 称为基于检测的更换。如果系统发生失效, 对系统进行纠正性更换, 称为基于失效的更换。此外, 如果自系统开始运行直到 MT , 未发生失效并且也未第 n 次检测到缺陷, 则在 MT 处直接对系统进行预防性更换(不再进行检测), 称为基于年龄的更换。更换可以更新系统。

(7) 不完美检测和最小维修的费用分别为 c_i 和 c_r 。当失效发生, 对系统进行纠正性更换会产生费用 c_f 。在第 n 次检测出缺陷或 MT 处进行预防性更换的费用为 c_p 。

(8) 假设用于检测、最小维修和更换的时间可以忽略不计。

在本文中, 定义 $\alpha(t)$ 和 $\beta((t-x)/y)$ 描述非恒定概率的检测误差。这是因为假阳性误差的概率随系统在正常状态下运行时间的变化而变化, 而假阴性误差的概率依赖于系统的退化水平, 可以用在缺陷状态的运行时间与延迟时间的比值表示^[27]。当检测显示系统处于缺陷状态, 进行最小维修(基于状态的维修), 因为基于状态的维修的相对性能在很大程度上取决于状态检测的准确性, 考虑到存在不完美检测, 所以在多次检测之后进行基于年龄的更换(定期维修), 即采取将基于状态的维修和定期维修相结合的混合预防性维修策略。进一步考虑到随着最小维修次数的增加, 系统的总体退化趋势在不断增加, 越来越容易产生失效, 为此, 当第 n 次检测到系统缺陷时, 进行预防性更换。

基于假设 (3)、(5) 和 (6), 在时间 mT , $m=1, 2, \dots, M-1$, 对系统进行定期检测; 在检测到缺陷状态时, 进行最小维修; 在时间 MT 或者系统失效或者第 n 次检测到系统缺陷时(无论哪个先发生), 进行更换。需要决策的变量有检测间隔 T , 与检测次数有关的变量 M , 与最小维修次数上限有关的变量 n , 所以用 (n, M, T) 表示检测和维修策略。

2 成本率模型

本文的目标是找到最优的预防性维修策略 $(n^*, M^*, T^*) \in \Omega$, 使得系统在无限时间域的成本率最小。根据更新报酬理论^[36], 更新过程依赖于独立同分布的随机变量, 这些随机变量表示两个连续的更新点之间经过的随机时间。在本文中, 更换可以

更新系统, 构成了更新点。因此, 将更新周期定义为两个连续更换事件(无论纠正性还是预防性)之间的持续时间。且根据更新报酬理论, 无限时间域上的成本率 $g(n, M, T)$ 等于一个更新周期上的成本率, 即 $g(n, M, T)$ 可以计算为一个更新周期内发生的期望成本除以期望长度。因此, 相应的优化问题可以表示为

$$g(n^*, M^*, T^*) = \min_{(n, M, T) \in \Omega} \frac{E_C(n, M, T)}{E_L(n, M, T)} \quad (1)$$

约束条件

$$n \in \{1, 2, \dots\} \quad M \in \{1, 2, \dots\} \quad T > 0$$

式中, $E_C(n, M, T)$ 表示每个更新周期的期望成本, $E_L(n, M, T)$ 表示每个更新周期的期望长度, $n^* - 1$ 表示最优的最小维修次数上限, T^* 表示最优的检测间隔, $M^* - 1$ 表示进行基于年龄的更换之前最优的检测次数, Ω 表示所有维修策略的集合。

2.1 最小维修模型

根据假设(5), 当第 k 次检测显示系统处于缺陷状态, 对系统进行最小维修。维修后, 系统继续处于(如果发生假阳性误差)或恢复到(确实存在缺陷)正常状态, 但累积年龄保持 kT 不变。令 $\lambda_0(\cdot)$ 表示不经过任何维修行为时系统的缺陷率, 则在 kT 处进行最小维修后, 系统的缺陷率可以表示为 $\lambda_k(x) = \lambda_0(kT + x)$, 而下一次缺陷到达时间 X_{k+1} 的 PDF 和 CDF 可以表示为

$$f_{X_{k+1}}(x) = \lambda_0(kT + x) \exp\left(-\int_{kT}^{kT+x} \lambda_0(s) ds\right) = \frac{f_{X_0}(kT + x)}{F_{X_0}(kT)} \quad (2)$$

$$F_{X_{k+1}}(x) = 1 - \exp\left(-\int_{kT}^{kT+x} \lambda_0(s) ds\right) = 1 - \frac{F_{X_0}(kT + x)}{F_{X_0}(kT)} \quad (3)$$

式中, $x = t - kT$ ($t > kT$, 为下一次最小维修之前的时间点), 且 $\overline{F_{X_0}}(x) = 1 - F_{X_0}(x)$ 。 $f_{X_0}(x)$ 和 $F_{X_0}(x)$ 分别表示不经过任何维修行为时缺陷到达时间 X_0 的 PDF 和 CDF。

因为最小维修后, 系统不存在累积缺陷年龄, 失效率 $h_{k+1}(y)$ 变为 0, 所以延迟时间 Y_{k+1} 的 PDF 和 CDF 分别表示为

$$f_{Y_{k+1}}(y) = f_{Y_0}(y) \quad (4)$$

$$F_{Y_{k+1}}(y) = F_{Y_0}(y) \quad (5)$$

式中, $f_{Y_0}(y)$ 和 $F_{Y_0}(y)$ 分别表示不经过任何维修行为时延迟时间 Y_0 的 PDF 和 CDF。

2.2 不同更新场景对应的概率

$E_C(n, M, T)$ 和 $E_L(n, M, T)$ 的推导基于一个周期内可能发生的所有情况。由于更新周期被定义为两个连续的更新点之间的持续时间, 根据更新点的不同, 将所有更新事件划分为三种不同的场景:

- ① 当第 n 次检测出缺陷, 对系统进行基于检测的更换;
- ② 当系统发生失效, 进行基于失效的更换;
- ③ 直到 MT 没有发生失效并且最多检测到 $n-1$ 次缺陷, 进行基于年龄的更换。

本文采用递归方法计算不同场景发生的概率。假设在 kT ($k = 0, 1, \dots, M-1$) 处检测出缺陷, 进行最小维修, 使系统处于正常状态, 且 kT 之后, 可能发生上述三种场景。则当 k 取 0 时, 即可得到具有不同更新点的三种更新场景的概率。值得注意的是, 系统在 $t=0$ 时为新系统, 不进行检测和维修, 但因计算时考虑的是 kT 之后的情况, 所以上述假设不会影响结果的正确性。接下来, 分别计算每一种场景对应的概率。

2.2.1 场景一(图 1): kT 之后, 进行基于检测的更换

在这种场景中, kT 之后, 当第 n 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换, 周期结束。当 $n=1$ 时, kT 之后, 不进行最小维修, 一旦检测到缺陷, 即进行更换。在这种情况下, 存在两种路径。

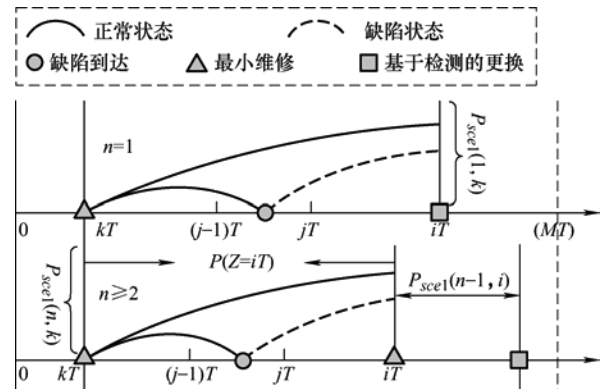


图1 场景一示意图

路径一: 在 iT 处系统处于正常状态, 检测发生假阳性, 显示系统出现缺陷, 对系统进行更换。这意味着缺陷发生在 iT 之后, 且从第 $k+1$ 次检测到第 $i-1$ 次检测均未发生假阳性误差, 相应的概率可以计算为

$$P_{sce1,1}(1, k, i) = \int_{(i-k)T}^{\infty} \prod_{m=k+1}^{i-1} (1 - \alpha(mT - kT)) \alpha(iT - kT) f_{X_{k+1}}(x) dx \quad (6)$$

路径二: 在 iT 处系统处于缺陷状态, 检测正确地反映了系统状态, 对系统进行更换。在这种路径

中, 缺陷发生在区间 $[(j-k-1)T, (j-k)T]$ 上, $j = k+1, k+2, \dots, i$, 失效发生在 iT 之后。在缺陷发生之前, 检测未发生假阳性误差, 而在缺陷发生之后, 从第 j 次检测到第 $i-1$ 次检测发生假阴性误差, 直到第 i 次检测才发现缺陷。相应的概率计算为

$$P_{sce1,2}(1, k, i) = \sum_{j=k+1}^i \left(\prod_{m=k+1}^{j-1} (1 - \alpha(mT - kT)) \right) \times \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_{(i-k)T-x}^{\infty} \prod_{n=j}^{i-1} \beta \left(\frac{nT - kT - x}{y} \right) \times \left(1 - \beta \left(\frac{iT - kT - x}{y} \right) \right) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx \quad (7)$$

在这两种路径中, $i = k+1, k+2, \dots, M-1$, 所以, 当 $n=1$ 时, 场景一发生的概率可以表示为

$$P_{sce1}(1, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} P_{sce1,1}(1, k, i) + \sum_{i=k+1}^{M-1} P_{sce1,2}(1, k, i) \quad (8)$$

当 $n \geq 2$ 时, kT 之后, 系统在前 $n-1$ 次检测到缺陷时, 进行最小维修, 当第 n 次检测出缺陷时, 对系统进行预防性更换, 更新系统。令变量 Z 表示 kT 之后发生第一次最小维修的时间, 则 $Z = iT$, $i = k+1, k+2, \dots, M-1$ 。同样存在两种情况: ① 系统确实处于缺陷状态, 检测显示出系统的真实状态; ② 系统处于正常状态, 检测首次发生假阳性误差。由此, kT 之后, 第一次最小维修发生在 iT 的概率可以计算为

$$P(Z = iT) = P_{sce1,1}(1, k, i) + P_{sce1,2}(1, k, i) \quad (9)$$

然后, 令 $P_{sce1}(n, k)$ 表示场景一发生的概率, 即 kT 之后, 第 n 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换的概率。则在 iT 进行第一次最小维修之后, 第 $n-1$ 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换的概率可以表示为 $P_{sce1}(n-1, i)$ 。因此, 根据递归方法, $P_{sce1}(n, k)$, $n \geq 2$, 可以计算为

$$P_{sce1}(n, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} P(Z = iT) P_{sce1}(n-1, i) \quad (10)$$

2.2.2 场景二(图 2): kT 之后, 进行基于失效的更换

在这种场景中, kT 之后, 系统在失效处进行纠正性更换, 周期结束。当 $n=1$ 时, 系统不进行最小维修, 这意味着 kT 之后, 直到系统失效, 中间未检测出缺陷, 即检测没有发生假阳性误差, 也没有将真实的缺陷探测出来。在这种情况下, 同样存在两种路径。

路径一: 缺陷和失效都发生在区间 $[(j-k-1)T, (j-k)T]$ 上, $j = k+1, k+2, \dots, M$, 相应的概率计算如下

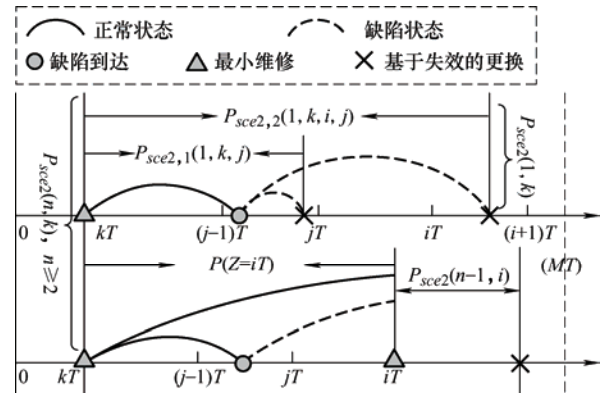


图 2 场景二示意图

$$P_{sce2,1}(1, k, j) = \prod_{m=k+1}^{j-1} (1 - \alpha(mT - kT)) \times \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_0^{(j-k)T-x} f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx \quad (11)$$

路径二: 与路径一不同的是, 在此路径中, 缺陷和失效发生在不同区间上。系统在区间 $[(j-k-1)T, (j-k)T]$ 上发生缺陷, 而在区间 $[(i-k)T, (i+1-k)T]$ 上发生失效, 其中, $i = k+1, k+2, \dots, M-1$; $j = k+1, k+2, \dots, i$ 。相应的概率表示如下

$$P_{sce2,2}(1, k, i, j) = \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_{(i-k)T-x}^{(i+1-k)T-x} \prod_{m=k+1}^{j-1} (1 - \alpha(mT - kT)) \times \prod_{n=j}^i \beta \left(\frac{nT - kT - x}{y} \right) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx \quad (12)$$

通过上述分析, 当 $n=1$ 时, 场景二发生的概率 $P_{sce2}(1, k)$ 可以计算为

$$P_{sce2}(1, k) = \sum_{j=k+1}^M P_{sce2,1}(1, k, j) + \sum_{i=k+1}^{M-1} \sum_{j=k+1}^i P_{sce2,2}(1, k, i, j) \quad (13)$$

当 $n \geq 2$ 时, 存在两种情况: ① 与 $n=1$ 情况相同, kT 之后, 直到系统失效, 中间未进行最小维修。② kT 之后, 在系统失效之前, 检测到缺陷并执行最小维修, 但检测到缺陷的次数小于 n 。在假设 kT 之后, 第 n 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换的情况下, 令 $P_{sce2}(n, k)$ 表示 kT 之后, 进行基于失效的更换(即场景二)的概率。则当假设 iT 之后, 第 $n-1$ 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换时, iT 之后, 进行基于失效的更换的概率可以表示为 $P_{sce2}(n-1, i)$ 。与场景一类似, 通过递归方法可以计算场景二发生的概率 $P_{sce2}(n, k)$, $n \geq 2$ 为

$$P_{sce2}(n, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} P(Z = iT) P_{sce2}(n-1, i) + P_{sce2}(1, k) \quad (14)$$

2.2.3 场景三(图 3): kT 之后, 进行基于年龄的更换

在这种场景中, kT 之后, 在 MT 处进行预防性更换, 周期结束。当 $n=1$ 时, kT 之后, 直到 MT , 中间未发生失效且未检测到缺陷, 在这种情况下, 也存在两种路径。

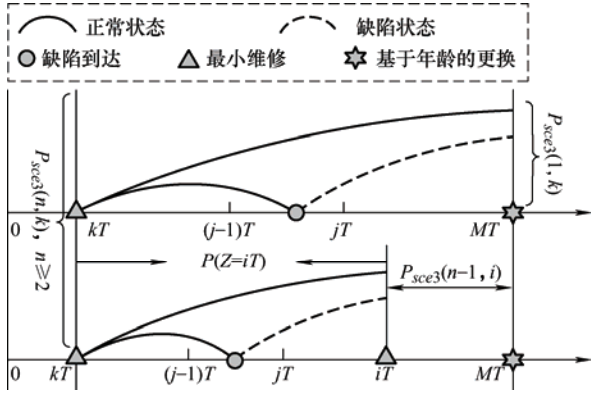


图 3 场景三示意图

路径一: 缺陷发生在区间 $[(j-k-1)T, (j-k)T]$ 上, $j = k+1, k+2, \dots, M$, 失效发生在 MT 之后。相应的概率可以计算为

$$P_{sce3,1}(1, k, j) = \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_{(M-k)T-x}^{\infty} \prod_{m=k+1}^{j-1} (1 - \alpha(mT - kT)) \times \prod_{n=j}^{M-1} \beta\left(\frac{nT - kT - x}{y}\right) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx \quad (15)$$

路径二: 缺陷发生在 MT 之后, 在缺陷发生之前检测未出现假阳性误差, 相应的概率表示为

$$P_{sce3,2}(1, k) = \int_{(M-k)T}^{\infty} \prod_{m=k+1}^{M-1} (1 - \alpha(mT - kT)) f_{X_{k+1}}(x) dx \quad (16)$$

因此, 可以得到, 当 $n=1$ 时, 场景三的概率为

$$P_{sce3}(1, k) = \sum_{j=k+1}^M P_{sce3,1}(1, k, j) + P_{sce3,2}(1, k) \quad (17)$$

与场景二类似, 当 $n \geq 2$, 存在两种情况: ① 与 $n=1$ 情况相同, kT 之后, 没有进行最小维修, 直到在 MT 处进行预防性更换; ② kT 之后, 在 MT 处进行更换之前检测到缺陷, 进行最小维修, 且最多检测到 $n-1$ 次缺陷。采用递归方法可以得到场景三发生的概率 $P_{sce3}(n, k)$, $n \geq 2$ 为

$$P_{sce3}(n, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} P(Z=iT) P_{sce3}(n-1, i) + P_{sce3}(1, k) \quad (18)$$

2.3 成本率模型

得到各个场景中每种路径发生的概率后, 利用概率方法计算更新周期的期望成本和期望长度。期望成本包括期望检测成本、期望最小维修成本、期望预防性更换成本以及期望纠正性更换成本。接下

来, 首先计算它们各自发生的期望次数。

因为场景一和场景三都是以一次预防性更换结束一个周期, 所以 kT 之后, 期望预防性更换次数 $N_p(n, k)$ 可以表示为

$$N_p(n, k) = P_{sce1}(n, k) + P_{sce3}(n, k) \quad (19)$$

场景二以一次纠正性更换结束一个周期, 所以 kT 之后的期望纠正性更换次数 $N_f(n, k)$ 表示为

$$N_f(n, k) = P_{sce2}(n, k) \quad (20)$$

在计算期望检测次数时, 需要分别对每个场景进行分析。当 $n=1$ 时, 在场景一中, 从第 $k+1$ 次检测开始, 直到第 i 次检测显示系统存在缺陷进行预防性更换, 共包括 $i-k$ 次检测。在场景二中, 从第 $k+1$ 次检测开始, 直到失效发生之前的最后一次检测为止, 路径一发生 $j-k-1$ 次检测, 路径二发生 $i-k$ 次检测。在场景三中, 所有路径都发生 $M-k-1$ 次检测。由此, 可以得到当 $n=1$ 时, kT 之后, 期望检测次数为

$$N_l(1, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} (P_{sce1,1}(1, k, i) + P_{sce1,2}(1, k, i)) \times (i-k) + \sum_{j=k+1}^M P_{sce2,1}(1, k, j) \times (j-k-1) + \sum_{i=k+1}^{M-1} \sum_{j=k+1}^i P_{sce2,2}(1, k, i, j) \times (i-k) + P_{sce3}(1, k) \times (M-k-1) \quad (21)$$

当 $n \geq 2$ 时, 存在两种情况, ① kT 之后, 直到周期结束, 没有进行最小维修。在这种情况下, 只可能在失效处或者在 MT 处周期结束, 即当 $n=1$ 时的场景二和场景三, 期望检测次数可以通过式(21)获得; ② kT 之后, 在周期结束之前检测到缺陷并进行最小维修, 且在第 i 次检测点发生第一次最小维修 ($i = k+1, k+2, \dots, M-1$), 在这种情况下, 到 iT 时, 已经发生 $i-k$ 次检测。令 $N_l(n, k)$ 表示在 kT 进行最小维修之后, 假设第 n 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换时的期望检测次数。则 iT 之后, 假设第 $n-1$ 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换时的期望检测次数可以表示为 $N_l(n-1, i)$ 。因此, 可以得到当 $n \geq 2$ 时, kT 之后的期望检测次数为

$$N_l(n, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} P(Z=iT) \times ((i-k) + N_l(n-1, i)) + \sum_{j=k+1}^M P_{sce2,1}(1, k, j) \times (j-k-1) + \sum_{i=k+1}^{M-1} \sum_{j=k+1}^i P_{sce2,2}(1, k, i, j) \times (i-k) + P_{sce3}(1, k) \times (M-k-1) \quad (22)$$

关于期望最小维修次数, 当 $n=1$ 时, kT 之后, 直到周期结束, 没有进行最小维修, 期望最小维修次数为 0

$$N_R(1, k) = 0 \quad (23)$$

当 $n \geq 2$ 时, 与计算期望检测次数类似, 只是在情况①中, 最小维修次数为 0。在情况②中, 到 iT 时, 已经发生 1 次最小维修。因此, 当 $n \geq 2$ 时, kT 之后的期望最小维修次数 $N_R(n, k)$ 为

$$N_R(n, k) = \sum_{i=k+1}^{M-1} P(Z=iT) \times (1 + N_R(n-1, i)) \quad (24)$$

相应的, kT 之后, 期望预防性更换成本、期望纠正性更换成本、期望检测成本以及期望最小维修成本分别为 $N_p(n, k) \times c_p$ 、 $N_F(n, k) \times c_f$ 、 $N_I(n, k) \times c_i$ 以及 $N_R(n, k) \times c_r$ 。

$$\begin{aligned} E_L(1, k) = & \sum_{i=k+1}^{M-1} (P_{sce1,1}(1, k, i) + P_{sce1,2}(1, k, i)) \times (i-k) \times T + P_{sce3}(1, k) \times (M-k) \times T + \\ & \sum_{j=k+1}^M \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_0^{(j-k)T-x} (x+y) \prod_{m=k+1}^{j-1} (1-\alpha(mT-kT)) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx + \\ & \sum_{i=k+1}^{M-1} \sum_{j=k+1}^i \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_{(i-k)T-x}^{(i+1-k)T-x} (x+y) \prod_{m=k+1}^{j-1} (1-\alpha(mT-kT)) \prod_{n=j}^i \beta\left(\frac{nT-kT-x}{y}\right) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx \end{aligned} \quad (26)$$

当 $n \geq 2$ 时, 与计算期望检测次数的方法类似, 分两种情况进行讨论: ① kT 之后, 直到周期结束, 没有进行最小维修, 即发生当 $n=1$ 时的场景二和场景三; ② kT 之后, 在周期结束之前发生最小维修, 且第一次最小维修发生在 $Z=iT$, 到时间 iT , 已经经历了 $(i-k) \times T$ 时间长度, $i=k+1, k+2, \dots, M-1$ 。令

$$\begin{aligned} E_L(n, k) = & \sum_{i=k+1}^{M-1} P(Z=iT) \times ((i-k) \times T + E_L(n-1, i)) + P_{sce3}(1, k) \times (M-k) \times T + \\ & \sum_{j=k+1}^M \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_0^{(j-k)T-x} (x+y) \prod_{m=k+1}^{j-1} (1-\alpha(mT-kT)) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx + \\ & \sum_{i=k+1}^{M-1} \sum_{j=k+1}^i \int_{(j-k-1)T}^{(j-k)T} \int_{(i-k)T-x}^{(i+1-k)T-x} (x+y) \prod_{m=k+1}^{j-1} (1-\alpha(mT-kT)) \prod_{n=j}^i \beta\left(\frac{nT-kT-x}{y}\right) f_{Y_{k+1}}(y) f_{X_{k+1}}(x) dy dx \end{aligned} \quad (27)$$

令 $E_L(n, M, T)$, $n=1, 2, \dots$, $M=1, 2, \dots$, 表示更新周期的期望长度, 同样可以在 $k=0$ 时得到其表达式, 如下所示

$$E_L(n, M, T) = E_L(n, 0) \quad (28)$$

根据更新报酬理论, 无限时间域的成本率 $g(n, M, T)$ 等于一个更新周期的成本率, 即更新周期的期望成本除以更新周期的期望长度

根据上述所有期望成本的表达式, 当 $k=0$ 时, 可以得到每个更新周期的期望成本 $E_C(n, M, T)$, $n=1, 2, \dots$, $M=1, 2, \dots$, 为

$$E_C(n, M, T) = N_p(n, 0) \times c_p + N_F(n, 0) \times c_f + N_I(n, 0) \times c_i + N_R(n, 0) \times c_r \quad (25)$$

接下来, 计算更新周期的期望长度, 首先计算 kT 之后到周期结束的期望长度。当 $n=1$ 时, 在场景一中, 在 iT 处结束一个周期, 所以 kT 之后的期望长度为 $(i-k) \times T$ 。在场景二中, 在系统失效处结束一个周期, 所以期望长度为 x 、 y 和的积分。在场景三中, 周期在 MT 处结束, 所以期望长度为 $(M-k) \times T$ 。因此, 当 $n=1$ 时, kT 之后的期望长度可以计算为

$E_L(n, k)$ 表示 kT 之后, 假设第 n 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换时的期望长度, 则 iT 之后, 假设第 $n-1$ 次检测出缺陷, 对系统进行预防性更换时的期望长度可以表示为 $E_L(n-1, i)$ 。因此, 可以得到当 $n \geq 2$, kT 之后的期望长度 $E_L(n, k)$ 为

$$g(n, M, T) = \frac{E_C(n, M, T)}{E_L(n, M, T)} \quad (29)$$

3 算例分析

为了说明本文提出的模型, 考虑钢厂中的钢制转炉系统^[8, 29]。它的作用是通过氧化过程去除杂质, 将铁水转化为钢。该系统是炼钢过程的关键设备,

每周 7 天每天 24 h(三班倒)运行, 其意外失效, 如穿炉、塌炉等, 将导致严重的成本和安全后果(引起爆炸、烫伤等事故)。在发生失效之前, 设备通常会先经历一个缺陷状态, 在缺陷状态下, 系统仍能工作, 但可以观察到耳轴或主轴磨损、螺丝松动、疲劳裂纹或腐蚀等信号。例如, 在穿炉事故中, 当系统运行一段时间, 其耐火材料受高温侵蚀、逐渐脱落, 进入缺陷状态, 如果不采取措施, 缺陷状态最终将发展成失效, 造成炉底或炉身穿孔引发穿炉事故。因此, 在设备运行期间, 工作人员会定期检测系统的腐蚀程度, 以判断是否发生缺陷, 提前采取维修措施, 预防系统失效。但这些检测主要是在不关闭系统的情况下从外部进行的, 可能得到错误的检测结果(不完美检测)。如果发现缺陷, 工作人员将采取一些补炉措施, 例如重涂、焊接和表面润滑等, 但这些维修活动的修复作用是局部的, 通常不能将系统修复如新(最小维修)。另外, 考虑到存在不完美检测和最小维修, 在第 M 次检测点(不再进行检测)以及第 n 次检测到缺陷时(最多进行 $n-1$ 次最小维修)进行预防性更换, 更新设备。在本节中, 给出优化步骤以获得最优维修策略, 包括最优检测间隔、预防性更换间隔以及最小维修次数上限, 使钢制转炉系统的维修成本率最低, 并通过一系列数值算例说明所提模型的性能和实用性。

3.1 问题设置和优化步骤

令随机变量 X (缺陷到达时间)服从 CDF 为 $F_X(x) = 1 - \exp\{-(x/\theta_1)^{\delta_1}\}$ 的 Weibull 分布, 其中, θ_1 和 δ_1 分别是尺度参数和形状参数。令延迟时间 Y 也服从 Weibull 分布, 且尺度参数和形状参数分别为 θ_2 和 δ_2 。

t 表示最小维修或者更换之后系统已经运行的时间, 例如, 在 kT 进行最小维修之后, 在 iT 进行检测计算假阳性误差或者假阴性误差时($i > k$), $t = iT - kT$ 。参考文献[27], 使用线性分段函数来描述 $\alpha(t)$ 。在正常状态的早期阶段, $\alpha(t)$ 是关于运行时间 t 的增函数; 当 t 到达阈值 a 之后, $\alpha(t)$ 保持不变。因此, 有

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_0 + (u_a t) / a & t \leq a \\ \alpha_0 + u_a & \text{其他} \end{cases} \quad (30)$$

式中, α_0 表示初始($t=0$)假阳性误差概率, u_a 为斜率, 表示 $\alpha(t)$ 的增加速度。此外, 使用一个 log-odds 分布函数来描述假阴性误差的概率 $\beta((t-x)/y)$, 可

以由式(31)给出

$$\beta\left(\frac{t-x}{y}\right) = \beta_0 + \frac{(1-\beta_0)}{1 + \exp\left(\gamma + \eta \ln\left(\frac{t-x}{y}\right)\right)} \quad x \leq t \leq x+y \quad (31)$$

式中, β_0 表示与 $(t-x)/y$ 无关的假阴性误差概率, γ 和 $\eta \geq 0$ 是形状参数。

表 2 给出了模型中固定不变的参数值, 它们的取值参考文献[27]。因为决策变量有 3 个, 包括检测间隔 T , 与检测次数有关的变量 M , 与最小维修次数上限有关的变量 n , 所以用 (n, M, T) 表示检测和维修策略。为了得到最优的预防性维修策略, 采用枚举法进行策略优化, 具体步骤如下: 首先, 列举 $n \in \{1, 2, \dots, n_{\max}\}$ 和 $M \in \{1, 2, \dots, M_{\max}\}$ 所有可能的组合。然后, 针对每一个 n 和 M 的组合, 搜索最优的检测间隔 T^* (例如, 使用 Matlab 中的函数 *fmincon*), 得到每一组 n 和 M 对应的最优维修策略 (n, M, T^*) 。最后, 比较所有 n 和 M 组合以及相应的 T^* 对应的成本率 $g(n, M, T^*)$, 找到使成本率最小的最优维修策略 (n^*, M^*, T^*) 。对本文的数值算例进行优化时, 设置 $n_{\max} = 10$, 且 $M_{\max} = 20$ 。

表 2 固定不变的模型参数值

| θ_1 | δ_1 | θ_2 | δ_2 | α_0 | a | β_0 | γ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------|-----------|----------|
| 900 | 2 | 100 | 2 | 0.05 | 1000 | 0.05 | 5 |

3.2 模型参数的灵敏度分析

为了说明本文所提的检测—最小维修—更换策略的性能和适用性, 首先, 对模型参数进行灵敏度分析, 包括成本参数(c_i , c_r , c_p 和 c_f)和不完美检测参数(u_a 和 η)。根据第 2 节推导的公式和第 3.1 节给出的优化步骤, 得到不同模型参数设置下的最优维修策略结果(表 3), 包括最优维修策略 (n^*, M^*, T^*) 及其成本率 $g(n^*, M^*, T^*)$ 。

由表 3 可知, 各相关参数对最优混合预防性维修策略的影响如下。

(1) n^* 对 c_r 或 c_p 较为敏感, 当 c_r 增加时, n^* 减小, 当 c_p 减小时, n^* 减小。这是因为, 当 c_r 增加或 c_p 减小时, 预防性更换比最小维修更具有吸引力, 所以 n^* 减小, 提前进行基于检测的更换。另外, n^* 对 u_a 、 η 、 c_i 以及 c_f 不太敏感, 当这几个参数发生变化时, 最优维修策略更倾向于在相同的 n^* 下调整 M^* 和 T^* 的值。

表 3 不同模型参数设置下的最优维修策略结果

| 案例 | 检测参数 | | 成本参数 | | | | 最优维修策略 | | | | |
|----|-------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|----------|-----------|---------|
| | u_a | η | c_i | c_r | c_p | c_f | n^* | M^* | T^* | M^*T^* | 成本率 |
| 1 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 7 | 47.402 6 | 331.818 2 | 0.770 4 |
| 2 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 2 000 | 2 | 6 | 67.433 0 | 404.598 0 | 0.605 6 |
| 3 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 8 000 | 2 | 8 | 39.146 0 | 313.168 0 | 0.867 3 |
| 4 | 0.5 | 2 | 10 | 30 | 100 | 5 000 | 3 | 8 | 44.128 0 | 353.024 0 | 0.748 4 |
| 5 | 0.5 | 2 | 10 | 30 | 100 | 2 000 | 3 | 7 | 61.790 1 | 432.530 7 | 0.588 0 |
| 6 | 0.5 | 2 | 10 | 30 | 100 | 8 000 | 3 | 9 | 36.747 6 | 330.728 4 | 0.843 1 |
| 7 | 0.5 | 2 | 10 | 50 | 100 | 5 000 | 1 | 6 | 53.104 2 | 318.625 2 | 0.787 6 |
| 8 | 0.5 | 2 | 10 | 50 | 100 | 2 000 | 1 | 5 | 77.581 3 | 387.906 5 | 0.617 4 |
| 9 | 0.5 | 2 | 10 | 50 | 100 | 8 000 | 1 | 7 | 43.414 3 | 303.900 1 | 0.887 1 |
| 10 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 80 | 5 000 | 1 | 5 | 54.750 5 | 273.752 5 | 0.701 6 |
| 11 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 120 | 5 000 | 2 | 10 | 42.263 5 | 422.635 | 0.827 1 |
| 12 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 130 | 5 000 | 3 | 11 | 40.471 8 | 445.189 8 | 0.850 6 |
| 13 | 0.5 | 2 | 8 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 10 | 40.075 6 | 400.756 0 | 0.728 6 |
| 14 | 0.5 | 2 | 12 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 6 | 51.709 4 | 310.256 4 | 0.805 2 |
| 15 | 0.5 | 2 | 15 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 4 | 64.226 5 | 256.906 0 | 0.847 2 |
| 16 | 0.3 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 8 | 44.536 7 | 356.293 6 | 0.751 8 |
| 17 | 0.7 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 7 | 47.644 1 | 333.508 7 | 0.786 6 |
| 18 | 0.8 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 6 | 51.078 6 | 306.471 6 | 0.794 0 |
| 19 | 0.5 | 1 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 8 | 46.883 3 | 375.066 4 | 0.738 4 |
| 20 | 0.5 | 3 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 7 | 44.999 8 | 314.998 6 | 0.810 4 |
| 21 | 0.5 | 4 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 6 | 46.210 3 | 277.261 8 | 0.849 0 |

(2) 当 c_r 增加时, 不仅 n^* 减小, M^* 和 M^*T^* 也减小, 相比于最小维修, 最优的维修策略更倾向于执行预防性更换, 所以不仅基于检测的更换, 基于年龄的更换也提前进行。当 c_i 增加时, n^* 不变, M^* 减小且 T^* 增加, 即检测次数和频率减小。 c_p 增加会导致 n^* 、 M^* 以及 M^*T^* 都增加, 说明检测和最小维修比预防性更换更具吸引力。当 c_f 增加, n^* 不变, 但 M^* 增加, T^* 和 M^*T^* 减小, 这是因为, 随着 c_f 增加, 需要提供更多的保护措施, 例如, 增加检测次数和检测频率以及提前进行基于年龄的更换, 以此预防代价高昂的失效事件。

(3) 随着 u_a 不断增加, 虽然 n^* 不变, 但 M^* 减小。这是因为, 发生假阳性误差会导致实际上处于正常状态的系统进行预防性维修, 从而造成不必要的成本。当 u_a 增加, 假阳性误差造成的不必要成本

增加, 因此, 检测次数减少。当假阴性误差概率增加(η 增加), 虽然 n^* 不变, 但 M^*T^* 减小。这是因为, 随着 η 增加, 将真实缺陷检测出来的难度增加, 因此, 需要提前进行基于年龄的更换, 以预防系统失效。

3.3 模型比较

本文提出的模型为检测-最小维修-预防性更换模型, 称为模型 1, 为了进一步说明所提模型的性能, 将其与另外两种模型进行对比。模型 2: 不考虑最小维修的模型, 即不进行最小维修, 一旦发现缺陷直接进行更换。模型 3: 不限制最小维修次数的模型, 即不进行基于检测的更换, 只要检测到缺陷就进行最小维修, 直到 MT 进行基于年龄的更换。不同参数设置下模型 2 和模型 3 的最优维修策略结果分别如表 4 和表 5 所示。

表 4 模型 2 不同参数设置下最优维修策略结果

| 案例 | 检测参数 | | 成本参数 | | | | 模型 2 最优维修策略 | | | 模型 1 最优维修策略 | | | |
|----|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------------|----------|---------|-------------|-------|----------|---------|
| | u_a | η | c_i | c_r | c_p | c_f | M | T | 成本率 | n^* | M^* | T^* | 成本率 |
| 1 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 6 | 53.104 2 | 0.787 6 | 2 | 7 | 47.402 6 | 0.770 4 |
| 2 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 2 000 | 5 | 77.581 3 | 0.617 4 | 2 | 6 | 67.433 0 | 0.605 6 |
| 3 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 8 000 | 7 | 43.414 3 | 0.887 1 | 2 | 8 | 39.146 0 | 0.867 3 |
| 4 | 0.5 | 2 | 10 | 30 | 100 | 5 000 | 6 | 53.104 2 | 0.787 6 | 3 | 8 | 44.128 0 | 0.748 4 |
| 5 | 0.5 | 2 | 10 | 50 | 100 | 5 000 | 6 | 53.104 2 | 0.787 6 | 1 | 6 | 53.104 2 | 0.787 6 |
| 6 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 80 | 5 000 | 5 | 54.750 5 | 0.701 6 | 1 | 5 | 54.750 5 | 0.701 6 |
| 7 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 130 | 5 000 | 7 | 52.928 5 | 0.906 7 | 3 | 11 | 40.471 8 | 0.850 6 |
| 8 | 0.5 | 2 | 8 | 40 | 100 | 5 000 | 8 | 46.664 4 | 0.750 7 | 2 | 10 | 40.075 6 | 0.728 6 |
| 9 | 0.5 | 2 | 15 | 40 | 100 | 5 000 | 4 | 66.060 0 | 0.859 7 | 2 | 4 | 64.226 5 | 0.847 2 |

表 5 模型 3 不同参数设置下最优维修策略结果

| 案例 | 检测参数 | | 成本参数 | | | | 模型 3 最优维修策略 | | | 模型 1 最优维修策略 | | | |
|----|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------------|----------|---------|-------------|-------|----------|---------|
| | u_a | η | c_i | c_r | c_p | c_f | M | T | 成本率 | n^* | M^* | T^* | 成本率 |
| 1 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 7 | 47.049 0 | 0.773 0 | 2 | 7 | 47.402 6 | 0.770 4 |
| 2 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 2 000 | 6 | 66.878 4 | 0.607 6 | 2 | 6 | 67.433 0 | 0.605 6 |
| 3 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 8 000 | 7 | 41.158 9 | 0.870 6 | 2 | 8 | 39.146 0 | 0.867 3 |
| 4 | 0.5 | 2 | 10 | 30 | 100 | 5 000 | 8 | 44.079 3 | 0.748 5 | 3 | 8 | 44.128 0 | 0.748 4 |
| 5 | 0.5 | 2 | 10 | 50 | 100 | 5 000 | 6 | 50.778 2 | 0.794 5 | 1 | 6 | 53.104 2 | 0.787 6 |
| 6 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 80 | 5 000 | 5 | 52.978 4 | 0.704 9 | 1 | 5 | 54.750 5 | 0.701 6 |
| 7 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 130 | 5 000 | 11 | 40.284 9 | 0.852 1 | 3 | 11 | 40.471 8 | 0.850 6 |
| 8 | 0.5 | 2 | 8 | 40 | 100 | 5 000 | 9 | 41.155 2 | 0.734 1 | 2 | 10 | 40.075 6 | 0.728 6 |
| 9 | 0.5 | 2 | 15 | 40 | 100 | 5 000 | 4 | 64.127 7 | 0.847 4 | 2 | 4 | 64.226 5 | 0.847 2 |

通过将本文所提方法(模型 1)与模型 2 和模型 3 进行比较。

(1) 模型 1 和模型 2 进行比较。模型 2 相当于在模型 1 中,当 n 值取 1 时。因此,除非 n 的最优值为 $n^*=1$,否则,模型 1 通常优于模型 2。而且,当 n^* 越大,模型 1 的优势越显著。这是因为,当 n^* 越大,最小维修价值越高,所以采用最小维修的模型 1 的优势增加。另外,在相同的 $n^*(n^* \neq 1)$ 值下,随着 M^* 增加和 T^* 减小,模型 1 的优势增加。这是因为,当检测次数以及检测频率增加,越容易检测到缺陷,最小维修带来的效益越高,所以模型 1 优势越显著。

(2) 模型 1 和模型 3 进行比较。模型 3 相当于在模型 1 中,当 n 趋近于无穷时。从表 5 可以

看出,模型 1 通常优于模型 3。当 n^* 越大,模型 1 的优势越不显著。这是因为,当 n^* 增加,在模型 1 中,发生基于检测的更换的可能性减小,因此,模型 1 维修策略接近于模型 3 维修策略,从而最优维修策略的成本率相差不大。另外,在相同的 n^* 值下, M^* 越小,模型 1 的优势越不显著。同样是因为,当 M^* 减小,发生基于检测的更换的可能性减小。

3.4 模型验证

在第 2 节公式的推导中,采用递归方法、条件期望方法等计算更新周期的期望成本和期望长度,以此得到更新周期的成本率,然后根据更新报酬理论,得到无限时间域的成本率模型。为验证模型的正确性,本节提出一个仿真算法来模拟系统的运行

和检测维修过程, 从而近似得到系统在无限时间域的成本率, 此数值仿真算法如图 4 所示。

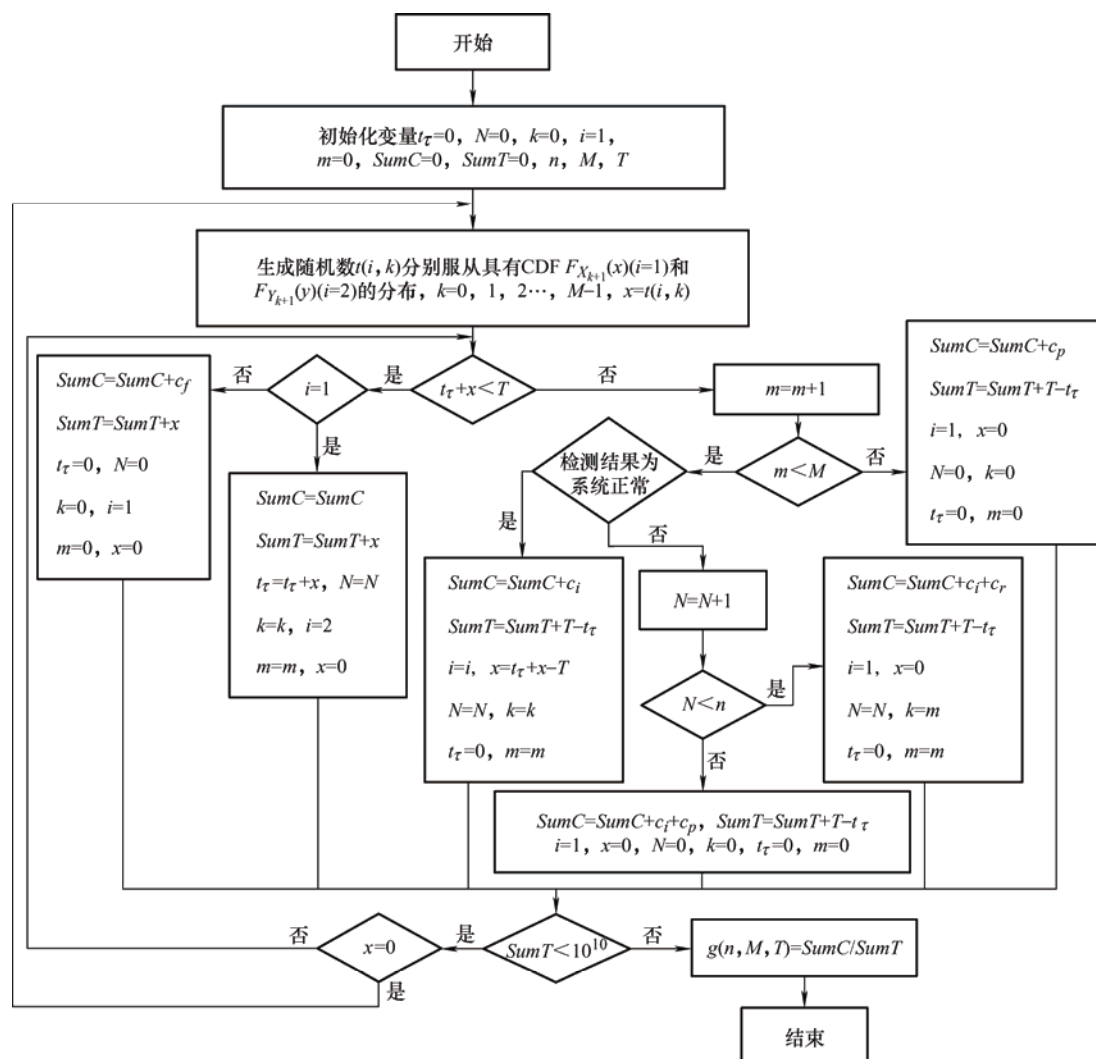


图 4 系统在无限时间域的成本率数值仿真算法流程图

以几组不同参数设置下的最优维修策略为例进行验证, 在每组参数设置下, 将最优维修策略 \$(n^*, M^*, T^*)\$ 分别代入推导公式和仿真算法得到相应的成本率, 观察成本率结果是否相近。运行一次仿真算法即可得到一个成本率仿真结果, 由于

存在波动, 一次仿真结果与用推导公式得到的结果相近可能是偶然的, 因此, 将上述流程重复三次, 观察三次结果以减小偶然性。三次仿真结果与根据第 2 节中推导公式所得结果的对比如表 6 所示。

表 6 仿真结果与根据第 2 节中推导公式所得结果的对比

| 案例 | 检测参数 | | 成本参数 | | | | 最优维修策略 | | | 成本率 | | | |
|----|-------|--------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|----------|---------|---------|---------|---------|
| | u_a | η | c_i | c_r | c_p | c_f | n^* | M^* | T^* | 推导结果 | 仿真结果 1 | 仿真结果 2 | 仿真结果 3 |
| 1 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 5 000 | 2 | 7 | 47.402 6 | 0.770 4 | 0.770 5 | 0.770 7 | 0.770 3 |
| 2 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 2 000 | 2 | 6 | 67.433 | 0.605 6 | 0.605 6 | 0.605 4 | 0.605 8 |
| 3 | 0.5 | 2 | 10 | 40 | 100 | 8 000 | 2 | 8 | 39.146 | 0.867 3 | 0.867 3 | 0.867 0 | 0.867 2 |
| 4 | 0.5 | 2 | 10 | 30 | 100 | 5 000 | 3 | 8 | 44.128 0 | 0.748 4 | 0.748 5 | 0.748 1 | 0.748 6 |
| 5 | 0.5 | 2 | 10 | 50 | 100 | 5 000 | 1 | 6 | 53.104 2 | 0.787 6 | 0.788 0 | 0.787 5 | 0.787 6 |

从表 6 可以看出, 推导公式得到的成本率结果与通过仿真得到的结果基本一致, 这验证了推导公式的正确性。

4 结 论

(1) 研究了不完美检测和不完美维修中存在非恒定检测误差概率和最小维修次数限制的问题, 提出一种检测-最小维修-更换策略。基于更新报酬理论推导了无限时间域的成本率模型, 从而得到最优的预防性维修策略, 包括检测间隔、最小维修次数上限以及基于年龄的更换间隔三个决策变量, 为工程师的检测和维修行为提供指导。

(2) 采用数值算例(以钢制转炉系统为例)说明所提模型的性能和适用性。灵敏度分析结果表明, 最小维修次数上限仅对最小维修成本和预防性更换成本较为敏感, 同时, 随着模型参数的变化, 最优维修策略以一定的规律发生变化。

(3) 将本文所提模型与其他模型(模型 2 和模型 3)进行比较, 结果表明, 虽然在某些特殊情况下, 本文所提模型与模型 2 或模型 3 得到的最优维修成本率相近。但在大多数情况下, 相较于其他两种策略, 采用本文所提维修策略进行维修活动得到的成本率更低, 有效降低了维修成本。

(4) 值得指出的是, 本文的研究假设检测不具有伤害性, 不会对系统的状态产生影响。但考虑到有的检测是具有破坏性的, 可能影响系统的状态, 因此, 进一步假设检测会产生缺陷或者失效, 或者改变系统的退化率, 可以作为未来的一个研究工作。

参 考 文 献

- [1] VAN OOSTEROM C D, ELWANY A H, ÇELEBI D, et al. Optimal policies for a delay time model with postponed replacement[J]. *European Journal of Operational Research*, 2014, 232(1): 186-197.
- [2] SI Xiaosheng, LI Tianmei, ZHANG Qi, et al. An optimal condition-based replacement method for systems with observed degradation signals[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2018, 67(3): 1281-1293.
- [3] ZHANG Fengxia, SHEN Jingyuan, LIAO Haitao, et al. Optimal preventive maintenance policy for a system subject to two-phase imperfect inspections[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2021, 205: 107254.
- [4] SI Shubin, ZHAO Jiangbin, CAI Zhiqiang, et al. Recent advances in system reliability optimization driven by importance measures[J]. *Frontiers of Engineering Management*, 2020, 7(3): 335-358.
- [5] HASHEMI M, TAVANGAR M, ASADI M. Optimal preventive maintenance for coherent systems whose failure occurs due to aging or external shocks[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2022, 163: 107829.
- [6] CHRISTER A H, WALLER W M. Reducing production downtime using delay-time analysis[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1984, 35(6): 499-512.
- [7] JONES B, JENKINSON I, WANG J. Methodology of using delay-time analysis for a manufacturing industry[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2009, 94(1): 111-124.
- [8] ZHAO Fei, WANG Wenbin, PENG Rui. Delay-time-based preventive maintenance modelling for a production plant: a case study in a steel mill[J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2015, 66(12): 2015-2024.
- [9] MAHMOUDI M, ELWANY A, SHAHANAGHI K, et al. A delay time model with multiple defect types and multiple inspection methods[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2017, 66(4): 1073-1084.
- [10] WANG Wenbin. An overview of the recent advances in delay-time-based maintenance modelling[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2012, 106: 165-178.
- [11] SCARF P A, CAVALCANTE C A V, LOPES R S. Delay-time modelling of a critical system subject to random inspections[J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 278(3): 772-782.
- [12] 沈南燕, 武星, 李静, 等. 自动化生产线中关键设备的预维护策略研究[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(21): 231-240.
- [13] PENG Rui, HE Xiaofeng, ZHONG Chao, et al. Preventive maintenance for heterogeneous parallel systems with two failure modes[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2022, 220: 108310.
- [14] SINISTERRA W Q, CAVALCANTE C A V. An integrated

- model of production scheduling and inspection planning for resumable jobs[J]. *International Journal of Production Economics*, 2020, 227: 107668.
- [15] CHENG Yao, WEI Yian, LIAO Haitao. Optimal sampling-based sequential inspection and maintenance plans for a heterogeneous product with competing failure modes[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2022, 218: 108181.
- [16] TAGHIPOUR S, BANJEVIC D. Periodic inspection optimization models for a repairable system subject to hidden failures[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2011, 60(1): 275-285.
- [17] LIN Boliang, WU Jianping, LIN Ruixi, et al. Optimization of high-level preventive maintenance scheduling for high-speed trains[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 183: 261-275.
- [18] ZHANG Yanjing, SHEN Jingyuan, MA Yizhong. An optimal preventive maintenance policy for a two-stage competing-risk system with hidden failures[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2021, 154: 107135.
- [19] BERRADE M D, SCARF P A, CAVALCANTE C A V, et al. Imperfect inspection and replacement of a system with a defective state: A cost and reliability analysis[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2013, 120: 80-87.
- [20] HE K, MAILLART L M, PROKOPYEV O A. Scheduling preventive maintenance as a function of an imperfect inspection interval[J]. *IEEE Transactions on reliability*, 2015, 64(3): 983-997.
- [21] PENG Rui, LIU Bin, ZHAI Qingqing, et al. Optimal maintenance strategy for systems with two failure modes[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2019, 188: 624-632.
- [22] CAVALCANTE C A V, SCARF P A, BERRADE M D. Imperfect inspection of a system with unrevealed failure and an unrevealed defective state[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2019, 68(2): 764-775.
- [23] ASADKHANI J, MOKHTARI H, TAHMASEBPOOR S. Optimal lot-sizing under learning effect in inspection errors with different types of imperfect quality items[J/OL]. *Operational Research*, <https://doi.org/10.1007/s12351-021-00624-7>.
- [24] AKCAY A. An alert-assisted inspection policy for a production process with imperfect condition signals[J]. *European Journal of Operational Research*, 2022, 298(2): 510-525.
- [25] ZHANG Fengxia, SHEN Jingyuan, MA Yizhong. Optimal maintenance policy considering imperfect repairs and non-constant probabilities of inspection errors[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2020, 193: 106615.
- [26] WANG Wenbin. Modeling planned maintenance with non-homogeneous defect arrivals and variable probability of defect identification[J]. *Eksploracja i Niezawodnosc-Maintenance and Reliability*, 2010(2): 73-78.
- [27] DRIESSEN J P C, PENG H, VAN HOUTUM G J. Maintenance optimization under non-constant probabilities of imperfect inspections[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 165: 115-123.
- [28] WANG Ling, HU Haijun, WANG Yuqiao, et al. The availability model and parameters estimation method for the delay time model with imperfect maintenance at inspection[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(6): 2855-2863.
- [29] YANG Li, YE Zhisheng, LEE C G, et al. A two-phase preventive maintenance policy considering imperfect repair and postponed replacement[J]. *European Journal of Operational Research*, 2019, 274(3): 966-977.
- [30] PHAM H, WANG Hongzhou. Imperfect maintenance[J]. *European Journal of Operational Research*, 1996, 94(3): 425-438.
- [31] HUYNH K T. A hybrid condition-based maintenance model for deteriorating systems subject to nonmemoryless imperfect repairs and perfect replacements[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2019, 69(2): 781-815.
- [32] 王泽洲, 陈云翔, 蔡忠义, 等. 基于复合非齐次泊松过程的不完美维修设备剩余寿命预测[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(22): 14-23.
- WANG Zezhou, CHEN Yunxiang, CAI Zhongyi, et al. Remaining useful lifetime prediction of the equipment subjected to imperfect maintenance based on the compound nonhomogeneous poisson process[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(22): 14-23.
- [33] NAKAGAWA T. Optimal policy of continuous and discrete replacement with minimal repair at failure[J]. *Naval Research Logistics Quarterly*, 1984, 31(4): 543-550.

- [34] 苏春, 陈武. 基于滚动窗口方法的风力机动态机会维修优化[J]. 机械工程学报, 2014, 50(14): 62-68.
- SU Chun , CHEN Wu. Dynamic opportunistic maintenance optimization for wind turbine system based on rolling horizon approach[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(14): 62-68.
- [35] SAFAEI F , TAGHIPOUR S. Optimal preventive maintenance for repairable products with three types of failures sold under a renewable hybrid FRW/PRW policy[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2022,

223: 108392.

- [36] ROSS S M. Stochastic processes[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996.

作者简介: 张凤霞, 女, 1993 年出生, 博士研究生。主要研究方向为系统可靠性与维修。

E-mail: 616107002498@njust.edu.cn

马义中(通信作者), 男, 1964 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为质量工程与质量管理、可靠性与维修建模、控制理论、计算机试验设计等。

E-mail: yzma@njust.edu.cn