

DOI: 10.3901/JME.2022.16.430

面向产品可靠性评估的退化和寿命数据 分步融合方法^{*}

李博文¹ 贾祥¹ 赵骞² 郭波¹

(1. 国防科技大学系统工程学院 长沙 410073;
2. 国防科技大学信息通信学院 西安 710106)

摘要: 产品的退化数据和寿命数据是两类重要的可靠性信息,通过融合利用两类数据可显著提高产品可靠性评估结果的精度。现有融合方法常利用 Bayes 理论,但计算过程繁琐复杂,需要通过提高计算量来保证结果精度,且两类样本数据量的不均衡性会导致出现“数据淹没”的问题。考虑这一问题,提出了基于退化和寿命数据分步融合的可靠性评估方法,首先利用产品的退化数据,建立随机过程退化模型,对参数进行初始估计,随后结合寿命数据对寿命样本的失效概率进行更新,分两步将两类信息进行折合计算,从而达到数据融合的目的。最后通过寿命分布曲线拟合计算退化模型参数,并给出产品的可靠性评估结果。仿真试验和算例分析表明,与传统 Bayes 融合方法相比,在新的数据融合思路下,该方法能够简化可靠性评估工作实施步骤,同时提高评估精度和运算效率,还有效避免了“数据淹没”问题。

关键词: 可靠性评估; Bayes 理论; 随机过程; 失效概率

中图分类号: TB114

Phased Fusion Method of Degradation and Lifetime Data for Product Reliability Evaluation

LI Bowen¹ JIA Xiang¹ ZHAO Qian² GUO Bo¹

(1. College of Systems Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073;
2. College of Information Communication, National University of Defense Technology, Xi'an 710106)

Abstract: The degradation data and lifetime data of products are important reliability information. The accuracy of reliability evaluation usually can be improved by the fusion of these data. However, the existing methods are mainly based on Bayes theory where the calculation is complicated and required high computational cost to satisfy accuracy requirement. Meanwhile, the unbalanced data sample size can easily result in “data cover” problem. A phased fusion approach of degradation and lifetime data for product reliability assessment is proposed, which contained modelling the stochastic process degradation model on basis of degradation data, calculating the point estimations of parameters and updating the failure probability on basis of lifetime data. Data fusion is achieved by folding the two types of information in two phases. The estimations of parameters in degradation model and product assessment are finished by fitting the lifetime distribution finally. Fact is proved by simulation study and illustrative example that, compared with Bayes fusion approach, the proposed phased fusion method efficiently improves the accuracy and computational cost under new idea for reliability data fusion. More importantly, it also avoids the “data cover” problem effectively.

Key words: reliability evaluation; Bayes theory; stochastic process; failure probability

0 前言

可靠性是产品在规定的条件下和规定的时间

内,完成规定功能的能力^[1]。产品可靠性评估是可靠性研究的重要方面,常用的可靠性评估指标包括平均工作时间^[2](Mean time to failure, MTTF)、平均维修时间^[3](Mean time between failures, MTBF)、剩余寿命^[4]等。

产品的寿命数据和退化数据是两类重要的可靠性数据。基于这两类数据,现阶段广泛使用的可靠

^{*} 国家自然科学基金(71801219,72071208)、湖南省科技创新团队(2020RC4046)和湖南省优秀青年基金(2021JJ20050)资助项目。
20211015 收到初稿,20220301 收到修改稿

性评估思路主要包括基于寿命数据的方法、基于性能退化数据的方法以及基于性能退化数据和寿命数据融合的评估方法。基于寿命数据的可靠性评估方法主要利用数理统计理论, 分析寿命数据服从的特定分布, 通过估计分布参数再对产品的可靠性进行评估。孔德景^[5]对寿命数据的可靠性统计分析方法进行了研究。马仕川等^[6]在选定阈值的情况下研究了基于伪寿命数据的可靠性评估。随着科技的进步, 产品可靠性大幅提高, 在工程实践中很难收集到大量的寿命数据, 造成基于寿命数据的传统可靠性评估方法难以适用。因此基于性能退化数据的可靠性评估方法得到了较大发展。这类方法的关键是定义关键性能参数首次达到某一阈值的时间, 通过测量其性能参数的变化得到其寿命分布, 进而实现对产品的可靠性预测。LIANG 等^[7]利用灰色相关法得到多源信息融合联合发展系数, 经过两次拟合过程进行数据预测, 分析鱼雷装填设备可靠性。YU 等^[8]融合振动指标数据和回油流量数据对液压泵的剩余寿命进行预测。产品的制造特性、外部环境以及在工作条件下的变化往往具有随机性, 在对相关性能退化参数的研究过程中需要考虑其不确定性和随机性, 因此随机过程是可靠性评估一种常用的退化建模方法, YANG 等^[9]通过将空间退化纳入非平稳退化过程, 开发了基于 Gamma 随机过程的电阻退化模型。DONG 等^[10]开发了一个两阶段随机过程退化模型, 并将二元 Wiener 过程纳入计算, 基于不同的检查和维护策略对系统可靠性进行研究。PENG 等^[11]研究了以参数实时变化为主要特点的逆 Gaussian 过程退化建模方法。GORJIAN 等^[12]综述了可靠性评估中常用的退化模型, 分析了相关模型的优缺点和适用性。

进一步地, 通过 Bayes 方法融合寿命数据和退化数据的方法成为了可靠性评估的重要手段。这类方法主要依据 Bayes 理论, 首先确定待估参数的验前分布, 其次针对诸如退化数据, 定时截尾数据, 定数截尾数据等不同种类的数据进行分开讨论, 依次表示其服从的分布的似然函数, 进而得到联合似然函数, 最终从这一联合似然函数中推导出参数的后验分布, 确定参数的解析解或近似解。王艺玮等^[13]采用 Bayes 方法对监测刀具磨损情况的多传感器数据进行融合, 实现退化模型参数估计以及剩余寿命预测结果的实时更新。金光^[14]提出了一种可靠性信息融合的 Bayes-bootstrap 方法用于处理伪寿命数据导致的随机性误差问题, 并对长寿命卫星动量轮轴承组件润滑寿命进行预测。以 Bayes 理论为核

心的一系列传统方法区别主要在于验前分布的确定方法不同。

但基于 Bayes 的融合方法涉及到验后分布的推导和 Bayes 估计的复杂计算等, 过程繁琐, 运算难度大, 往往需要进一步引入近似抽样算法进行计算, 在工程实践中存在着诸多不便与局限性。另一方面, 现阶段的产品可靠性普遍较高, 难以获得大量的寿命数据, 而退化数据可以实时监测, 数据量大, 在基于 Bayes 融合的可靠性理论中, 无论是对于失效寿命数据或是退化数据的分析, 都需要首先确定寿命变量或退化特征量的分布函数, 再依据贝叶斯公式进行联合验后分布的推导。贝叶斯公式的弊端在于每个数据点的边缘分布概率密度值以乘积的形式相组合, 导致其计算结果往往被数据量大的信息主导, 小数据量可靠性信息得不到有效利用。事实上, 在实际数据分析过程中, 当采取寿命数据确定验前分布参数, 融合退化数据计算验后分布参数时, 参数的验后矩和验前矩在数值上存在明显差异; 而当采取退化数据确定验前分布参数时, 融合寿命数据计算验后分布参数时, 后验分布参数计算结果与验前计算结果差异较小。这说明当多源信息数据量存在明显不平衡差异时, 大数据量信息对小数据量信息存在“淹没”效应, 导致整体信息利用率不高, 融合效果大打折扣。针对这一问题, 蒋喜等^[15]研究了基于伪寿命分布的退化数据可靠性评估方法, 并运用虚拟增广样本法对寿命数据的数据量进行扩增, 并讨论了伪寿命数据的可信度。RANJAN 等^[16]使用改进的马尔科夫蒙特卡罗抽样算法对复杂的 Bayes 后验分布函数进行近似计算, 对三类寿命分布应用场景下的可靠性评估进行求解。针对评估精度与方法可用性差的缺陷, 现有研究大多是基于原有方法的数据层面扩增与算法层面改进, 方法适用范围有限, 改进效果不佳。针对“数据淹没”效应问题, 尚且缺乏相关研究与有效方法。针对上述两方面问题, 本文提出了面向产品可靠性评估的退化数据和寿命数据的分步融合方法, 从而对产品的可靠性进行评估。分两步对多源信息进行折合计算, 首先建立产品的随机过程退化模型, 利用性能退化数据估计模型参数初值, 可初步建立退化模型; 随后利用退化模型推得产品的寿命分布, 并结合产品的寿命数据, 引入一个基于信息熵^[17]函数和 Bayes 理论的优化模型, 对各寿命数据的失效概率进行更新; 最后通过分布曲线拟合确定产品的寿命分布参

数, 从而对产品的可靠性进行评估。通过仿真试验和实例分析, 验证了本文所提出方法相比传统方法的有效性和普适性。

1 模型假设及现有方法

1.1 数据模型

假设对 N 个产品的性能退化数据进行现场实测, 第 i 台设备的退化数据分别在 t_1, t_2, \dots, t_{m_i} 时刻得到, 其中 m_i 为第 i 个产品的采样时刻数量, 则第 i 个产品在第 j 个采样时刻的退化数据可表示为 x_{ij} , 令 $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im_i})^T$, 其中 $i=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, m_i$, 则这 N 个产品的退化数据集为 $\Omega_x = \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N\}$ 。

假设寿命试验中共收集得到 M 个寿命数据, $\Omega_t = \{t_1, t_2, \dots, t_M\}$ 为原始寿命数据集, 且 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_M$, 其中包括失效数据和截尾数据。将集合 Ω_t 中的相同数据进行合并得到 m 个数据组 $(t_1, t_2, \dots, t_m)^T$, $m \leq M$ 且 $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, 则对任意时刻 t_k , 对应的样品个数为 n_k , 失效样品个数为 r_k , 并用 $s_k = \sum_{v=k}^m n_v$ 表示在时刻 t_k 处仍处于正常试验状态下的样品数, 其中 $k=1, 2, \dots, m$ 。针对寿命样本, 利用数学模型 (t_k, r_k, s_k) 进行描述, 其中 $k=1, 2, \dots, m$ 。

1.2 基于 Bayes 理论的传统融合方法

这一类传统方法的主要目标是确定待测产品的失效分布参数, 由此评估其可靠性指标。设失效寿命服从分布中涉及的未知参数集合为 θ , 首先要设定参数集合的先验分布 $\pi(\theta)$ 。对于性能退化数据集 Ω_x 和寿命数据集 Ω_t , 联合似然函数 $L(\theta|\Omega_x, \Omega_t)$ 为

$$L(\theta|\Omega_x, \Omega_t) = \left(\prod_{k=1}^M f(t_k|\theta) \right) \left(\prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{m_i} f(x_{ij}|\theta) \right) \quad (1)$$

式中, $f(t_k|\theta)$ 是关于寿命随机变量 t_k 的概率密度函数, $f(x_{ij}|\theta)$ 是关于性能退化变量 x_{ij} 的概率密度函数。其中 $k=1, 2, \dots, m$, m 为合并后的寿命数据样本量, $i=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, m_i$, N 为退化试验样品数, m_i 为第 i 个被测样品的采样时刻数。根据 Bayes 方法给出关于待求参数集合 θ 的联合后验分布

$$\pi(\theta|\Omega_x, \Omega_t) = \frac{\pi(\theta)L(\theta|\Omega_x, \Omega_t)}{\int \pi(\theta)L(\theta|\Omega_x, \Omega_t)d\theta} \quad (2)$$

在平方损失函数下, 求解式(2)边缘密度函数并进行积分, 求得后验分布期望即为退化过程模型参数集合 θ 的点估计, 分析过程见图 1。

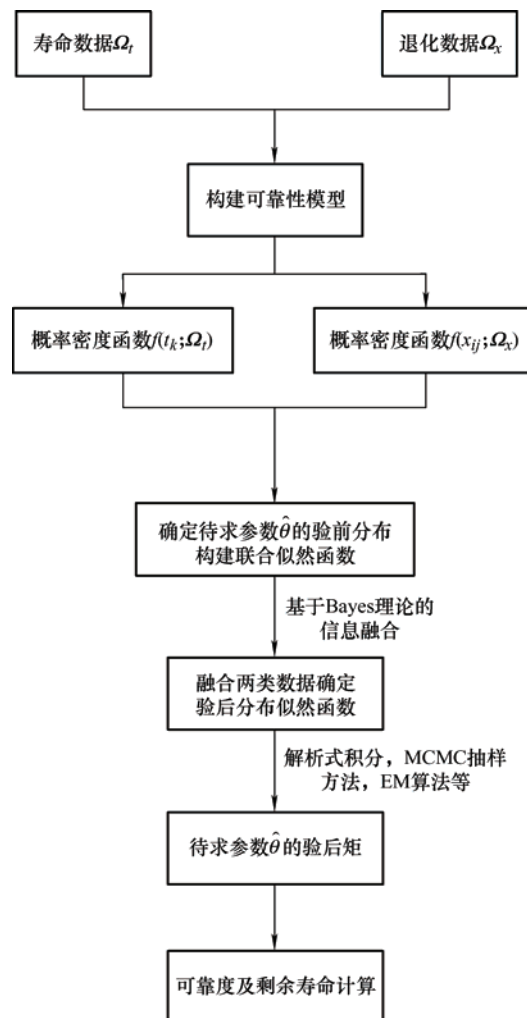


图 1 传统融合方法流程图

在基于 Bayes 理论的传统信息融合方法中, 不同的可靠性模型能够搭建数据与模型之间的关联关系, 建立产品可靠性评估模型, 进而计算可靠性指标。其中, 融合两类数据得到验后分布所得联合似然函数往往具有极其复杂的解析式, 边缘分布密度函数求解过程繁琐, 待求参数验后矩难以通过积分方法获得, 而常用的求解期望的近似方法如马尔科夫蒙特卡洛抽样方法, 需要通过提高计算量来满足精度需求, 此类方法计算成本高, 计算效率偏低。

2 本文所提出方法

本节提出一种基于退化数据和寿命数据分步融

合的可靠性评估方法。所谓分步是以失效概率作为折合两类信息的中间变量, 将两类数据的计算进行分步实施, 避免因数据量不均衡差异而导致的“淹没”效应, 寻求对信息的充分利用。具体做法是首先利用性能退化数据进行退化过程建模, 初步确定模型参数点估计, 进而推导出寿命分布以及各寿命样本处失效概率点估计的初值, 完成第一步失效概率计算。随后, 结合 Bayes 理论, 将失效概率点估计的初值作为验前矩, 同时引入最大熵原理建立优化模型, 计算得到失效概率的验后矩, 对失效概率进行更新, 完成第二步失效概率计算。最后依照寿命分布拟合寿命数据与更新后的失效概率数据, 建立最小二乘法曲线拟合模型, 求解退化过程模型的特征参数, 再对可靠性进行评估, 计算过程见图 2。

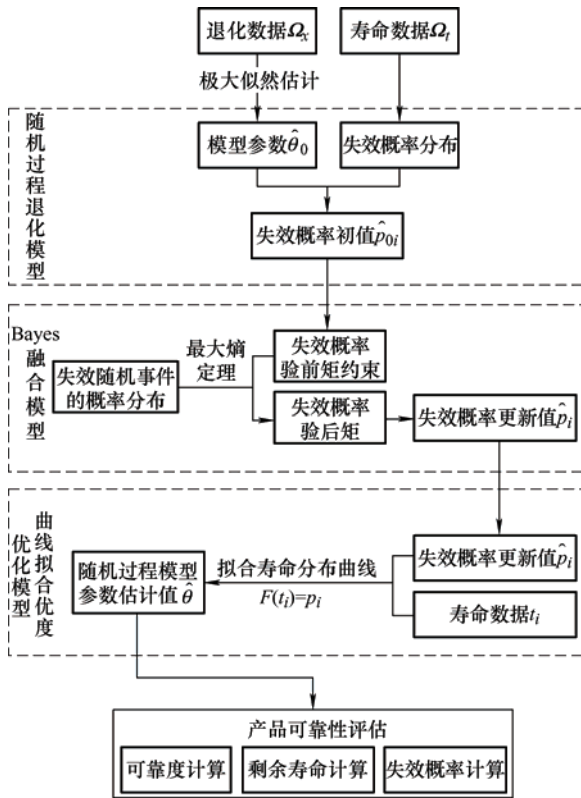


图 2 本文提出方法计算过程

2.1 基于随机过程的退化建模

随机过程模型借助一组含参数的服从特定分布的随机变量来描述退化过程, 其参数通常是时间。设 \$(\Omega, \Phi, P)\$ 是一个概率空间, \$T\$ 是一个实的参数集, 定义在 \$\Omega\$ 和 \$T\$ 上的二元函数 \$X(\omega, t)\$。如果对于任意固定的 \$t \in T\$, \$X(\omega, t)\$ 是 \$(\Omega, \Phi, P)\$ 上的随机变量, 则称 \$\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}\$ 为该概率空间上的随机过程, 简记为 \$\{X(t), t \in T\}\$ [18]。在可靠性领域

常常使用随机过程模型对产品退化过程进行建模, 常用的模型有 Wiener 过程模型, Gamma 过程模型和逆高斯过程等。这些模型通常定义于实数域, 且将二元函数关系 \$X(\omega, t)\$ 中的 \$t\$ 用来表示时间变量。

首先写出退化增量 \$\Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i,j-1}\$, 代表在样品 \$i\$ 在测量时刻 \$t_{j-1}\$ 和 \$t_j\$ 之间的退化增量, 构成性能退化数据增量集合 \$\Omega_{\Delta x}\$, 其中 \$i=1, 2, \dots, N\$, \$j=1, 2, \dots, m_i\$。根据其增量服从的退化过程模型总体分布特性能够给出关于退化量 \$X(t)\$ 的概率密度函数 \$f(x|\theta)\$。同时, 根据失效的定义, 规定退化量 \$X(t)\$ 首次达到失效阈值 \$l\$ 时, 产品发生退化失效 [19], 可定义失效时间 \$T\$ 为

$$T = \inf \{t: X(t) \geq l\} = \{t | X(t) \geq l, X(s) \leq l, 0 \leq s \leq t\} \quad (3)$$

进而可以得到失效时间的概率密度函数 \$f(t|\theta)\$ 以及关于失效时间 \$T\$ 的分布函数

$$F(t|\theta) = P(T < t) = \int_0^t f(t) dt \quad (4)$$

也称 \$F(t|\theta)\$ 为产品在任意时刻 \$t\$ 的失效概率, 同样地, 定义产品可靠度函数 \$R(t)\$

$$R(t|\theta) = P(T > t) = \int_t^\infty f(t) dt \quad (5)$$

产品在时刻 \$t_0\$ 处的剩余寿命

$$T_f(t_0) = E(t - t_0) = \int_{t_0}^\infty (t - t_0) f(t - t_0) dt \quad (6)$$

不同模型其主要区别在于随机变量 \$X(t)\$ 服从的分布不同, 失效寿命服从的分布形式也不同, 但这两类分布的分布参数是相同的。在对这一类随机过程退化模型进行计算分析时关键就在于对未知参数集合 \$\theta\$ 的求解, 进而将这一类参数代入式(4)~(6)中, 计算出产品可靠性指标的具体数值, 实现产品可靠性评估。本文提出方法将重点针对参数集合 \$\theta\$ 的求解展开研究。

假设利用测量得到的退化数据集 \$\Omega_x\$ 计算模型参数, 其基本过程是通过退化模型和测量数据构造出以未知参数为自变量的似然函数, 然后对此似然函数求取极大值, 所对应的参数值即为待估参数点估计值。即结合概率密度函数 \$f(x|\theta)\$ 构建似然函数

$$L(\theta) = f(\Omega_{\Delta x} | \theta) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{m_i} f(x_{ij} | \theta) \quad (7)$$

对似然函数取对数并整理得到

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} \ln f(x_{ij} | \theta) \quad (8)$$

使式(8)取极大值的一组参数 θ 即为极大似然估计量, 记作

$$\hat{\theta} = \arg \max \ln L(\theta) \quad (9)$$

根据式(7)计算寿命数据集合 Ω_i 中的每一个时刻 t_i 的失效概率点估计初值 \hat{p}_{0i} 为

$$\hat{p}_{0i} = P(T < t_i) = \int_0^{t_i} f(t | \theta) dt \quad (10)$$

式中, $i=1, 2, \dots, m$ 。

至此, 利用性能退化数据信息求得了初步的失效概率估计值。但考虑到性能退化试验过程中存在测量误差和随机效应等影响因素, 这里的初步估计值精度较低, 仍再结合寿命数据对其进行修正与更新。

2.2 基于信息熵函数和 Bayes 理论的失效概率更新

本节结合 Bayes 理论, 利用第 2.1 节的失效概率点估计初值 \hat{p}_{0i} 作为验前矩, 引入一种基于最大熵原理的优化模型确定超参数, 再求得验后矩 \hat{p}_i , 从而融合寿命数据信息实现对失效概率估计的更新。

首先设定失效概率 p_i 的验前分布 $\pi(p_i)$ 为贝塔分布 $B(p_i | a_i, b_i)$ [20], 即

$$\pi(p_i | a_i, b_i) = \frac{p_i^{a_i-1} (1-p_i)^{b_i-1}}{B(a_i, b_i)} \quad (11)$$

式中, $a_i > 0, b_i > 0, B(a_i, b_i) = \int_0^1 x^{a_i-1} (1-x)^{b_i-1} dx$ 。此处取贝塔分布是为了利用失效概率的共轭分布简化计算。假定 $a_i \neq b_i$, 可得 p_i 的验前矩为

$$E(p_i) = \int_0^1 p_i \pi(p_i; a_i, b_i) dp_i = \frac{a_i}{a_i + b_i} \quad (12)$$

设定在 t_i 时刻对应的失效样品个数为 r_i , 在 t_i 时刻对应的仍处于工作状态的样品数量为 s_i , 由此可以写出贝塔分布的似然函数

$$L(p_i | s_i, r_i) = C_{s_i}^{r_i} p_i^{r_i} (1-p_i)^{s_i-r_i} \quad (13)$$

利用 Bayes 公式推导失效概率的验后分布

$$\begin{aligned} \pi(p_i | s_i, r_i) &= \frac{\pi(p_i; a_i, b_i) L(p_i | s_i, r_i)}{\int_0^1 \pi(p_i; a_i, b_i) L(p_i | s_i, r_i) dp_i} = \\ &= \frac{p_i^{a_i+r_i-1} (1-p_i)^{b_i+s_i-r_i-1}}{B(a_i+r_i, b_i+s_i-r_i)} \end{aligned} \quad (14)$$

并在平方损失函数下推导出 p_i 的点估计为

$$\hat{p}_i = \int_0^1 p_i \pi(p_i | s_i, r_i) dp_i = \frac{a_i + r_i}{a_i + b_i + s_i} \quad (15)$$

注意到超参数 a_i 和 b_i 未知, 不能确定式(15)中的失效概率验后估计。为此, 引入信息熵函数 $E(a_i, b_i)$

$$\begin{aligned} E(a_i, b_i) &= - \int_0^1 \pi(p_i | a_i, b_i) \cdot \ln \pi(p_i | a_i, b_i) dp_i = \\ &= - \int_0^1 \frac{p_i^{a_i-1} (1-p_i)^{b_i-1}}{B(a_i, b_i)} \left[\frac{(a_i-1) \ln p_i + (b_i-1) \ln (1-p_i)}{\ln B(a_i, b_i)} \right] dp_i = \\ &= \ln B(a_i, b_i) - (a_i-1) [\phi(a_i) - \phi(a_i+b_i)] - \\ &\quad (b_i-1) [\phi(b_i) - \phi(a_i+b_i)] \end{aligned} \quad (16)$$

式中, $\phi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x), \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} \exp(-y) dy$ 。

进一步根据最大熵(Maximum entropy)原理 [21], 取信息熵 $E(a_i, b_i)$ 最大时 a_i 和 b_i 的取值作为超参数的估计结果。为此, 结合式(15)和式(16), 建立优化模型

$$\begin{aligned} &\max_{a_i > 0, b_i > 0} E(a_i, b_i) \\ &\text{s.t. } \hat{p}_{0i} = \frac{a_i}{a_i + b_i} \\ &\frac{a_{i-1} + r_{i-1}}{a_{i-1} + b_{i-1} + s_{i-1}} < \frac{a_i + r_i}{a_i + b_i + s_i} \quad (i > 1) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)中的不等式约束, 目的是为了保证失效概率的验后估计值序列满足 $\hat{p}_1 < \hat{p}_2 < \dots < \hat{p}_m$ 。利用数值优化算法求解式(17)中的优化模型, 在求得超参数 a_i 和 b_i 的估计值后, 代入式(15)可实现对失效概率的更新。

2.3 基于曲线拟合的优化模型

在对寿命数据的失效概率进行更新后, 可得诸点 (t_i, \hat{p}_i) , 其中 t_i 是寿命数据, \hat{p}_i 是失效概率, $i=1, 2, \dots, m$ 。进而可利用回归思想, 通过拟合产品的寿命分布曲线, 建立优化模型

$$\min \sum_{i=1}^m [F(t_i | \theta) - \hat{p}_i]^2 \quad (18)$$

利用数值优化算法如全局优化算法, 求解上述模型, 可对产品寿命的分布参数进行估计。进一步结合式(5)和式(6), 可以绘制该产品的后续可靠度曲线以及在任意时刻 t_0 的剩余寿命点估计

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t; \hat{\theta}) dt \quad (19)$$

$$T_f(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0) f(t - t_0; \hat{\theta}) dt \quad (20)$$

如上所述, 利用本文提出方法求解, 能够综合

利用性能退化数据和寿命数据中蕴含的信息进行产品可靠性评估。通过分步融合的方式, 避免数据量不均衡造成的“数据淹没”问题。针对高可靠性产品的可靠性评估研究, 既是对现有解决方法的补充, 也为后续研究提供了新的思路。

2.4 在非线性 Wiener 过程模型下的计算过程

本节针对待求参数较多, 相对复杂的非线性 Wiener 过程^[22]模型进行具体分析, 介绍本文提出方法的计算过程。

在非线性 Wiener 过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 中, 第 i 个样品在第 j 个采样时刻的退化变量 $X_i(t_{ij})$ 表示为

$$X_i(t_{ij}) = \mu t_{ij}^b + \sigma B(t_{ij}) \quad (21)$$

式中, $B(t)$ 是标准的布朗运动, 且 $i=1, 2, \dots, N$, $j=1, 2, \dots, m_j$ 。参数 μ 和参数 b 为描述同类产品的固定效应, σ 为扩散参数, 共同组成 3 维待求参数向量组 $\theta = (\mu, b, \sigma)^T$ 。

根据式(3)得到失效时间的概率密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma^2}} \left[l - (t^b - bt^b) \mu \right] \exp \left[-\frac{(l - \mu t^b)^2}{2t\sigma^2} \right] \quad (22)$$

由于无法得到失效时间分布函数的解析解, 采用积分的方法来得到失效概率数值解, 即

$$p = F(t) = \int_0^t f(t) dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3 \sigma^2}} \left[l - (t^b - bt^b) \mu \right] \exp \left[-\frac{(l - \mu t^b)^2}{2t\sigma^2} \right] dt \quad (23)$$

令 $T_i = (T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{im_i})^T$, 其中 $T_{ij} = \mu t_{ij}^b$, 以及 $X_i = (x_{ij}(t_{i1}), x_{ij}(t_{i2}), \dots, x_{ij}(t_{im_i}))^T$ 表示退化数据矩阵。根据 Wiener 过程特性, X_i 服从多元正态分布, 其均值矩阵和方差矩阵分别为 μ_i 和 Ω_i

$$\mu_i = \mu T_i \quad (24)$$

$$\Omega_i = \begin{pmatrix} t_{i,1} & t_{i,1} & \cdots & t_{i,1} \\ t_{i,1} & t_{i,2} & \cdots & t_{i,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{i,1} & t_{i,2} & \cdots & t_{i,m_i} \end{pmatrix} \quad \Omega_i = \sigma^2 Q_i \quad (25)$$

根据不同的样品退化测量之间的独立假设, 参数 $\theta = [\mu, b, \sigma]^T$ 的对数似然函数可表示为

$$l(\theta | \Omega_x) = -\frac{\ln(2\pi)}{2} \sum_{i=1}^N M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln |\Omega_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu T_i)^T \Omega_i^{-1} (X_i - \mu T_i) \quad (26)$$

对 μ 取一阶偏导数, 得到

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} X_i - \mu \sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} T_i \quad (27)$$

令式(27)等于 0, 得到

$$\hat{\mu}_0 = \frac{\sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} X_i}{\sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} T_i} \quad (28)$$

于是得到截面似然函数

$$l(\sigma, b | \Omega_x) = -\frac{\ln(2\pi)}{2} \sum_{i=1}^N M_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln |\Omega_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N X_i^T \Omega_i^{-1} X_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} X_i \right)^2}{\sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} T_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} X_i}{\sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} T_i} \right)^2 \sum_{i=1}^N T_i^T \Omega_i^{-1} T_i \quad (29)$$

通过二维搜索算法, 求得使截面似然函数最大的参数 $\hat{b}_0, \hat{\sigma}_0$, 代入式(28)得到 $\hat{\mu}_0$, 根据式(22)和(23)得到失效概率初步估计 \hat{p}_{0i}

$$\hat{p}_{0i} = \int_0^{t_i} f(t; \hat{\mu}_0, \hat{b}_0, \hat{\sigma}_0) dt = \int_0^{t_i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3 \hat{\sigma}_0^2}} \left[l - (t^{\hat{b}_0} - bt^{\hat{b}_0}) \hat{\mu}_0 \right] \times \exp \left[-\frac{(l - \hat{\mu}_0 t^{\hat{b}_0})^2}{2t\hat{\sigma}_0^2} \right] \right\} dt \quad (30)$$

进一步结合式(23)和(30)优化得到基于最大熵原理的失效概率更新值 \hat{p}_i ,

$$\hat{p}_i = \frac{a_i + r_i}{a_i + b_i + s_i} \quad (31)$$

并建立形如式(18)的非线性最小二乘曲线拟合模型

$$\min \sum_{i=1}^m [F(t_i | \mu, b, \sigma) - \hat{p}_i]^2 \quad (32)$$

利用优化算法求解得到退化模型特征参数的点估计 $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \hat{b}, \hat{\sigma})^T$, 代入 Wiener 过程可靠度函数与

剩余寿命公式得到相关可靠性指标。

$$R(t) = 1 - F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3 \hat{\sigma}^2}} \left[l - (t^{\hat{b}} - \hat{b} t^{\hat{b}}) \hat{\mu} \right] \exp \left[\frac{-(l - \hat{\mu} t^{\hat{b}})^2}{2t \hat{\sigma}^2} \right] dt \quad (33)$$

$$T_f(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ (t - t_0) \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - t_0)^3 \hat{\sigma}^2}} \times \left[l - \left((t - t_0)^{\hat{b}} - \hat{b}(t - t_0)^{\hat{b}} \right) \hat{\mu} \right] \times \exp \left[\frac{-(l - \hat{\mu}(t - t_0)^{\hat{b}})^2}{2(t - t_0) \hat{\sigma}^2} \right] \right\} dt \quad (34)$$

3 方法对比分析

本节将通过仿真试验,以非线性 Wiener 过程退化模型为例,比较本文提出的方法与现有方法的精度与运算速度,同时验证两种方法的信息融合效果。在试验中首先设定待求参数真值 $\theta = (\mu, b, \sigma)^T$, 产品失效阈值为 l , 单个产品性能退化样本数据量 n , 试验产品数量 m 以及失效产品数 r 。根据 Wiener 退

化模型参数仿真产生 m 组样本量为 n 的性能退化数据,同时用反函数法生成 m 个仿真样本的寿命数据从中随机选取 r 个作为仿真失效数据,其余 $(m - r)$ 个寿命数据通过与 $(0,1)$ 上的随机数相乘来模拟试验中的截尾数据。不失一般性地,设定试验产品数 m 为 20,退化样本数据量 $n = 300$,其中为体现产品可靠性高及失效样本极少的特点,设定失效产品数 r 为 3。

考虑到传统 Bayes 理论衍生方法多种多样,区别主要包括验前分布选取与现场信息选择等,为充分验证本文方法的性能表现,选取性能较优的一类 Bayes 融合方法求解作为对照组试验。分别利用本文提出方法与传统方法进行求解,重复上述过程 1 000 次并记录参数点估计结果,并采用相对偏差 $RDEV$ 和平均相对误差评价参数估计精度 MRE

$$RDEV = \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\theta_i} \right| \right) \quad (35)$$

$$MRE = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\left| \frac{\hat{\theta}_i - \theta_i}{\theta_i} \right|^2 \right) \quad (36)$$

基于 Intel Core i5-7400 CPU 处理器,16GB 安装内存硬件环境,在 Matlab 平台下开展上述试验,同时记录两种方法的平均运行时间,结果见表 1。

表 1 仿真试验结果

参数	$RDEV$	MRE	平均运行时间/s	方法
$\mu = 2.0, b = 0.9, \sigma = 3.0, l = 500$	0.580 3	0.073 0	53.652	本文提出方法
	1.162 4	0.212 6	1 490	Bayes 方法
$\mu = 2.0, b = 0.9, \sigma = 1.5, l = 500$	0.856 5	0.108 0	76.191	本文提出方法
	0.985 8	0.126 3	1 156	Bayes 方法
$\mu = 0.5, b = 1.5, \sigma = 1.5, l = 500$	0.470 5	0.043 9	64.454	本文提出方法
	1.718 8	0.241 0	948	Bayes 方法
$\mu = 0.5, b = 0.9, \sigma = 3.0, l = 500$	0.676 3	0.125 1	61.035	本文提出方法
	0.944 2	0.152 1	1 058	Bayes 方法
$\mu = 0.5, b = 1.5, \sigma = 5.0, l = 1.0 \times 10^4$	0.828 3	0.123 7	52.513	本文提出方法
	1.608 7	0.380 5	1 158	Bayes 方法

分析仿真试验对比结果和图 3 中的可靠度曲线对比可以看出,在不同预设参数条件下,本文提出方法计算得到的模型参数点估计值相对偏差和平均相对误差皆小于 Bayes 方法的结果,尤其在失效产品数 r 较小的情况下,结果仍接近真值,具有较高精度。同时,本文提出方法的运行时间远远小于传统 Bayes 方法,印证了本文提出方法具有较高的计算效率。

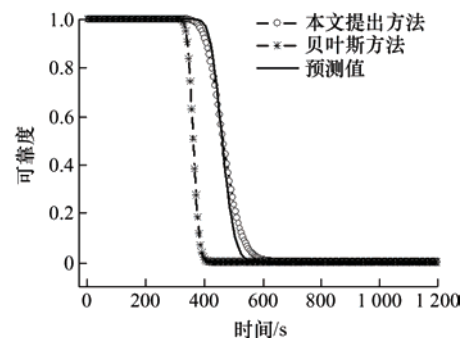


图 3 不同方法求解的可靠度曲线(参数设置为 $\mu = 2.0, b = 0.9, \sigma = 3.0, l = 500$)

图 4 展示了该方法在对一组参数进行 1 000 次重复试验过程中的参数求解情况, 可以看出在同等条件下, 本文提出方法的参数求解结果波动范围显著小于 Bayes 方法, 能够在有限计算次数内维持结果在接近真值的范围内。而反观 Bayes 方法, 需要通过大量迭代计算达到收敛条件。这一对比情况普遍存在于仿真试验中, 说明了本文提出方法对计算效率更高, 同时在求解效果方面具有较强的鲁棒性和稳定性。

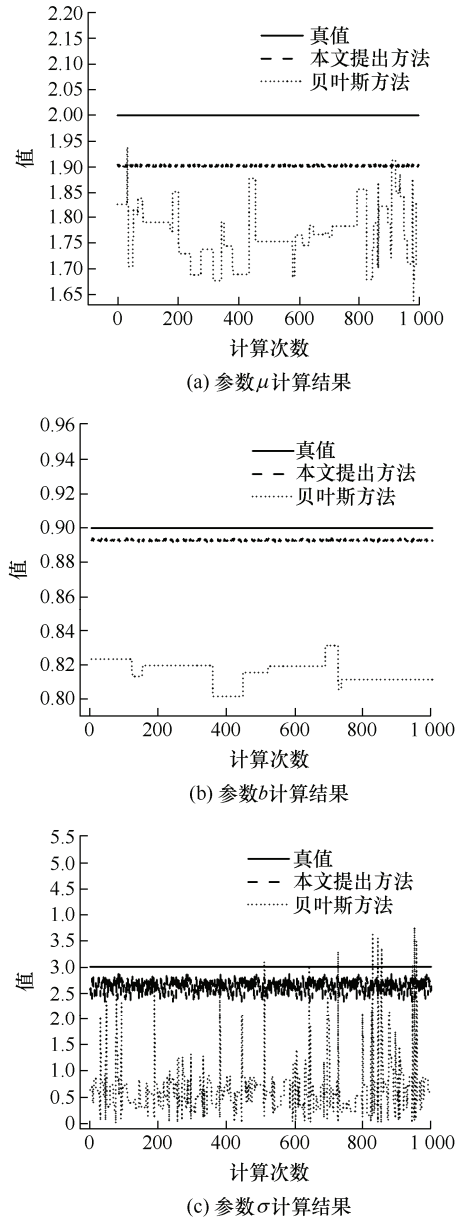


图 4 1 000 次重复求解下的待求参数结果(参数设置为 $\mu = 2.0, b = 0.9, \sigma = 3.0, l = 500$)

仿真试验可以充分说明本文提出的分布融合方法能够获得精度较高, 误差可控的参数点估计, 同时计算步骤简洁, 大幅度提高了现有针对产品可靠性评估这一类方法的计算效率。针对传统方法存在

的由于性能退化数据和寿命数据样本量差别导致的融合效果不佳问题上, 文中对不同方法的信息融合效果进行量化, 记录下融合寿命数据前后的参数点估计向量, 在两种方法均能够在可接受误差范围内求解的前提下, 表 2 中采用欧式距离表征其模型参数向量 θ 之间的绝对距离, 对融合前后参数的相关性进行比较。

$$D_E = \sqrt{(\hat{\theta}_0 - \hat{\theta})^T (\hat{\theta}_0 - \hat{\theta})} \quad (37)$$

式中, $\hat{\theta}_0$ 为仅利用性能退化数据得到的退化模型点估计初值向量, $\hat{\theta}$ 为不同方法计算得到的点估计向量。

观察表 2 中的结果, 通过 Bayes 信息融合方法所得到的验后估计结果往往与验前计算结果差别不大, 信息融合效果不佳, 即前文所提到的“数据淹没”现象。而本文提出方法的结果与融合前的结果具有较大相关性距离, 说明即使在寿命数据样本量极少的情况下, 依然能够对基于性能退化数据得到的参数点估计结果进行有效修正, 信息融合作用优于 Bayes 融合方法。

表 2 参数求解结果的相关性分析

参数	D_E	
	本文提出方法	Bayes 方法
$\mu = 2.0, b = 0.9, \sigma = 3.0, l = 500$	1.141 6	0.251 0
$\mu = 2.0, b = 0.9, \sigma = 1.5, l = 500$	1.057 8	0.173 8
$\mu = 0.5, b = 1.5, \sigma = 1.5, l = 500$	0.737 3	0.018 5
$\mu = 0.5, b = 0.9, \sigma = 3.0, l = 500$	0.409 2	0.013 1
$\mu = 0.5, b = 1.5, \sigma = 5.0, l = 1 \times 10^4$	1.035 5	0.042 0

4 算例

本节利用彭宝华等在文献[23]中提供的金属化膜脉冲电容器的寿命数据, 如表 3 所示, 并根据其文中计算得到的模型参数 $\theta = (\mu, b, \sigma)^T = (1.136 0 \times 10^{-4}, 1.0, 2.7 \times 10^{-3})^T$ 生成性能退化数据样本, 结合两类数据进行本文提出方法的实际应用。

按照第 3 节中方法进行求解, 首先求得失效概率估计初值 \hat{p}_{0i} , 根据式(17)计算出超参数 a_i 和 b_i , 进而根据式(31)中的给出失效概率 \hat{p}_i 的估计值, 结果见表 4。最后基于 5 个数据点对 (t_i, \hat{p}_i) 对寿命分

布曲线进行拟合, 得到参数点估计为 $\hat{\mu} = 2.0591 \times 10^{-5}$, $\hat{\sigma} = 8.2 \times 10^{-3}$, $\hat{b} = 1.1336$ 。

表 3 寿命试验数据

i	1	2	3	4	5
t_i	10 000	19 862	23 674	27 397	30 125
r_i	0	1	1	1	1
s_i	8	7	6	5	4

表 4 超参数和失效概率点估计的计算结果

i	1	2	3	4	5
a_i	4.121×10^{-8}	0.864	1.321	2.815 3	5.156
b_i	1.137×10^{-7}	1.355	0.869	0.855 9	0.896 7
\hat{p}_{0i}	0.009 7	0.389 5	0.603 1	0.766 9	0.851 8
\hat{p}_i	5.151×10^{-9}	0.202 2	0.283 4	0.440 0	0.612 4

作为对比, 利用第 1.2 节中的 Bayes 方法进行求解。求得分布参数 $\hat{\mu} = 4.435 \times 10^{-5}$, $\hat{b} = 1.1057$, $\hat{\sigma} = 3.800 \times 10^{-3}$ 。绘制出可靠度曲线并进行对比。依照文献[23]中的介绍, 参与寿命试验的 8 个样品在 10 000 次充放电前均无失效(图 5), 由此可以看出, 在图 6 中, 本文提出方法求解结果符合实际, 精度更高, 与仿真试验的结论一致。

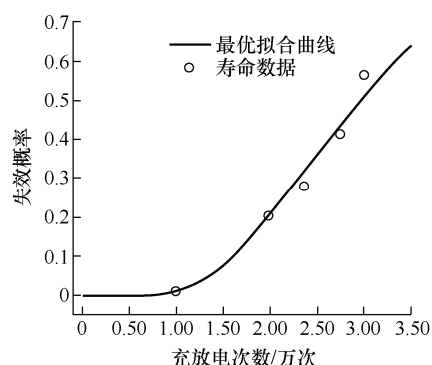


图 5 基于信息熵的失效概率拟合结果

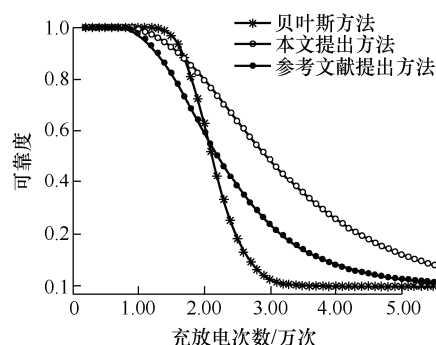


图 6 算例计算结果对比

5 结论

本文针对综合利用退化数据和寿命数据开展产品可靠性评估的问题, 提出了一种通用的基于退化数据和寿命数据分步融合的评估方法, 主要结论如下。

(1) 本方法主要研究推导了基于随机过程退化模型的计算方法, 能够结合大多数多参数随机过程模型展开计算, 是一类通用的产品可靠性评估方法。

(2) 在计算效率方面, 与传统基于 Bayes 融合理论的方法相比, 本方法的优势在于能够简化求解步骤, 避免复杂繁琐的高维度、多参数采样问题, 大幅度提高计算速度, 进而增加了工程实践应用背景下的可操作性和可用性。

(3) 本文提出的分步融合思想, 能够较好地保护数据信息完整性, 在一定程度上解决了目前方法存在的“数据淹没”问题, 更好地发挥了小样本数据对于参数估计结果的修正作用, 优化整体数据融合效果。仿真试验和算例表明, 本文方法的计算结果精度更高, 鲁棒性强。

在后续研究中, 拟进一步结合可信度研究解决此类“数据淹没”问题的可靠性评估方法。

参 考 文 献

- [1] 张义民. 机械动态与渐变可靠性理论与技术评述[J]. 机械工程学报, 2013, 49(20): 101-114.
ZHANG Yimin. Review of theory and technology of mechanical reliability for dynamic and gradual systems[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(20): 101-114.
- [2] 王正, 王增全. 具有多种失效模式机械零部件的寿命概率分布特征计算方法[J]. 机械工程学报, 2017, 53(2): 175-182.
WANG Zheng, WANG Zengquan. Method for calculating the life probability distribution characteristic of mechanical components with multiple failure modes[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(2): 175-182.
- [3] YANG J W, WANG J H, QIANG H, et al. Reliability assessment for the solenoid valve of a high-speed train braking system under small sample size[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31: 47.
- [4] ZHAO Z, WU J, LI T, et al. Challenges and opportunities

- of AI-enabled monitoring, diagnosis & prognosis: A review[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2021, 34(3): 16-44.
- [5] 孔德景. 寿命型和退化型数据的可靠性统计分析及应用研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2019.
- KONG Dejing. Reliability statistical inferences and application studies based on lifetime data and degradation data[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2019.
- [6] 马仕川, 罗静, 杨立波. 基于伪寿命数据的数控机床可靠性评估[J]. 科技风, 2019(16): 98-99.
- MA Shichuan, LUO Jing, YANG Libo. Reliability evaluation of CNC machine tools based on pseudo life data[J]. Technology Wind, 2019(16): 98-99.
- [7] LIANG Q W, YANG C, LIN S, et al. Multi-source information grey fusion method of torpedo loading reliability[J]. Ocean Engineering, 2021, 234: 109303.
- [8] YU H, LI H. Pump remaining useful life prediction based on multi-source fusion and monotonicity-constrained particle filtering[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 170: 108851.
- [9] YANG Y, PENG J, CAI C S, et al. Time-dependent reliability assessment of aging structures considering stochastic resistance degradation process[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2022, 217: 108105.
- [10] DONG Q, CUI L, SI S. Reliability and availability analysis of stochastic degradation systems based on bivariate Wiener processes[J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 79: 414-433.
- [11] PENG Weiwen, LI Yanfeng, YANG Yuanjian, et al. Bayesian degradation analysis with inverse Gaussian process models under time-varying degradation rates[J]. IEEE Transaction on Reliability, 2017, 66(1): 85-95.
- [12] GORJIAN N, MA Lin, MITTINTY M, et al. A review on degradation models in reliability analysis[C/CD]// Proceedings of the 4th World Congress on Engineering Asset Management, Athens, Greece, 28-30 September, 2009.
- [13] 王艺玮, 邓蕾, 郑联语, 等. 基于多通道融合及贝叶斯理论的刀具剩余寿命预测方法[J]. 机械工程学报, 2021, 57(13): 214-224.
- WANG Yiwei, DENG Lei, ZHENG Lianyu, et al. A multi-channel signal fusion and Bayesian theory based method for tool remaining useful life prediction[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(13): 214-224.
- [14] 金光. 一种综合性能与寿命数据的 Bayes-Bootstrap 方法[J]. 宇航学报, 2007, 28(3): 731-734.
- JIN Guang. A Bayes-Bootstrap method synthesizing performance and life data[J]. Journal of Astronautics, 2007, 28(3): 731-734.
- [15] 蒋喜, 刘宏昭, 刘丽兰, 等. 基于伪寿命分布的电主轴极小子样可靠性研究[J]. 振动与冲击, 2013, 32(19): 80-85.
- JIANG Xi, LIU Hongzhao, LIU Lilan, et al. Extremely small-scale sample's reliability of an electric spindle based on distribution of false lifetime[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(19): 80-85.
- [16] RANJAN R, SEN R, UPADHYAY S K. Bayes analysis of some important lifetime models using MCMC based approaches when the observations are left truncated and right censored[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 214: 107747.
- [17] JAYNE E. Information theory and statistical mechanics[J]. The Physical Review, 1957, 106: 620-630.
- [18] 张卓奎, 陈慧婵. 随机过程及其应用[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2012.
- ZHANG Zhuokui, CHEN Huichan. Stochastic process and its application[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2012.
- [19] 王铁, 苏向东, 张国忠, 等. 基于信息熵与现场数据的汽车零部件可靠性计算[J]. 中国工程机械学报, 2007(2): 138-141, 146.
- WANG Tie, SU Xiangdong, ZHANG Guozhong, et al. Reliability calculation of vehicle components based on information entropy and on-site data[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2007(2): 138-141, 146.
- [20] 贾祥, 程志君, 郭波. 基于信息熵和 Bayes 理论的高可靠性产品可靠性评估[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(7): 1919-1926.
- JIA Xiang, CHENG Zhijun, GUO Bo. Reliability evaluation for products based on entropy and Bayes theory[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2020, 40(7): 1919-1926.
- [21] WANG Fan, LI Heng. On the use of the maximum entropy method for reliability evaluation involving stochastic process modeling[J]. Structural Safety, 2021, 88: 102028.
- [22] 金光. 基于退化的可靠性技术: 模型、方法及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2014.
- JIN Guang. Reliability technology based on degradation: Model, method and application[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2014.

- [23] 彭宝华, 周经伦, 金光. 综合多种信息的金属化膜电容器可靠性评估[J]. 强激光与粒子束, 2009, 21(8): 1271-1271.
- PENG Baohua, ZHOU Jinglun, JIN Guang. Reliability assessment of metallized film capacitor using multiple reliability information sources[J]. High Power Laser and

Particle Beams, 2009, 21(8): 1271-1271.

作者简介: 李博文, 男, 1998 年出生。主要研究方向为系统可靠性分析。

E-mail: libowen_529@163.com

贾祥(通信作者), 男, 1992 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。

主要研究方向为复杂系统可靠性分析, 试验评估。

E-mail: jiaxiang09@sina.cn