

DOI: 10.3901/JME.2022.16.391

考虑间隙不确定性的花键概率疲劳寿命预测方法^{*}

喻天翔 赵庆岩 尚柏林 宋笔锋

(西北工业大学航空学院 西安 710072)

摘要: 花键在机械传动领域占有不可替代的地位,其使用寿命直接影响着设备的可靠性。现有的花键疲劳寿命预测模型大多仅考虑外载荷和材料等参数的影响,忽视制造中所产生的加工误差。加工误差导致花键的各齿侧隙不同,使得分配到各齿上的力大小各异,受载大的齿产生的累计损伤更严重,降低花键的实际使用寿命。因此,为得到更准确的花键疲劳寿命,基于国标对花键各误差的要求,推导不同加工精度时的花键侧隙分布范围,考虑侧隙不确定性对花键啮合齿数和齿上载荷分配的影响,建立等效力学模型,得到啮合齿数不确定性时的花键疲劳寿命分布,并与按照传统方法计算的花键疲劳寿命进行了对比。案例结果表明,花键疲劳寿命的均值为 10^8 个载荷循环,花键在 $2 \times 10^7 \sim 7 \times 10^8$ 个载荷循环内发生疲劳破坏的概率达到50%。提出的花键概率疲劳寿命预测方法能够进一步考虑间隙不确定性的影响,为花键的可靠性设计提供指导。

关键词: 花键; 齿侧间隙; 不确定性; 数值模型; 疲劳寿命

中图分类号: TB114

Probabilistic Fatigue Life Prediction Method of Spline Considering Clearance Uncertainty

YU Tianxiang ZHAO Qingyan SHANG Bolin SONG Bifeng

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: Splines play an irreplaceable role in mechanical transmission systems, and their life directly affects the reliability of equipment. Most of the existing spline fatigue life prediction models only consider the influence of parameters such as loads and material uncertainty, but ignore the machining errors generated in manufacturing. Machining errors lead to different clearances of the spline, making the force distributed to each tooth different. The damage to the tooth with a large load is more serious, which reduces the spline life. Therefore, to obtain a more accurate spline fatigue life, based on the requirements of the manual for the spline errors, the distribution range of the spline clearance at different machining accuracy is deduced. Then, the effect of the clearance uncertainty on the number of engaged teeth and uneven distribution of force is considered, an equivalent model of the force carried by each tooth is established. Finally, the fatigue life distribution of the spline is obtained, and compared with the spline fatigue life calculated by the traditional method. The case results show that the average spline fatigue life is 10^8 load cycles, and the probability of fatigue failure in 2×10^7 to 7×10^8 load cycles reaches 50%. The proposed probabilistic fatigue life prediction method can further consider the impact of the clearance uncertainty and provide guidance for the reliability design of splines.

Key words: spline; tooth clearance; uncertainty; numerical model; fatigue life

0 前言

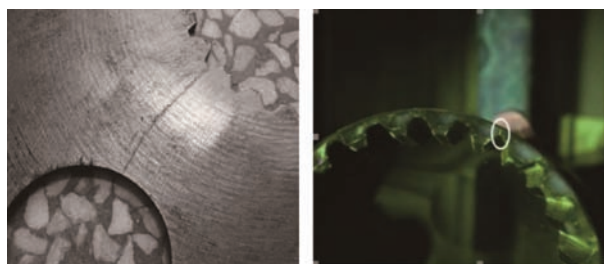
花键在机械传动领域占有不可替代的地位,被广泛应用于航空发动机、汽车、机床及一般的机械传动装置中。根据美国西南研究院调查结果,每架

A-4 Skyhawk 攻击机上有 174 处花键联接^[1]。花键的优异性能在军用装备中得到了广泛认可。

然而在高速、高冲击载荷作用下的复杂装备中,花键联接副工作环境恶劣,运行过程中常发生疲劳断裂、过度磨损等故障,严重影响了装备的可靠性和维修性。在 20 世纪 70 年代,美国海军战斗机维护库对航空花键进行了大量统计研究,结果表明,40% 的固定翼飞机和 70% 的旋翼飞机存在花键故障

^{*} 国家自然科学基金资助项目(52075443)。20211020 收到初稿,20220510 收到修改稿

问题, 发动机驱动的附件系统表现出的平均故障间隔时间为 2 000 h, 但花键往往在 500 h 内就发生故障^[1]。近年来, 随着加工工艺的提高, 虽然花键的寿命有所改善, 但仍不能满足装备对其可靠性日益增长的要求, 花键故障仍时有发生。例如, 某坦克刹车系统中的摩擦片是一种典型的花键联接副, 内花键齿槽根部多次发生疲劳断裂, 如图 1a 所示; 在某航空发动机服役过程中, 薄壁轴花键也多次出现花键裂纹, 如图 1b 所示。因此, 开展针对花键疲劳失效问题的研究具有重要意义。



(a) 刹车片疲劳裂纹

(b) 航发薄壁轴花键疲劳失效

图1 花键疲劳失效示意图

导致花键发生疲劳失效的影响因素包括材料、外载荷、齿形以及加工精度等。近年来, 部分学者研究了载荷和材料特性对花键疲劳寿命的影响。如 RAO 等^[2]通过将花键接触长度、传动功率、转速和材料性能等视为随机变量, 研究了基于可靠性的三速汽车传动系统设计方法。LEEN 等^[3]通过试验及有限元方法研究了过载对花键齿上应力分布和疲劳位置的影响。HOUGHTON 等^[4]通过试验和有限元的方法研究了多载荷作用时花键疲劳裂纹的扩展情况。PEDERSEN^[5]研究了齿形对花键疲劳寿命的影响。薛向珍等^[6]利用有限元预测了在微动磨损与微动疲劳共同作用时的花键寿命。李铭等^[7]以最小次序统计量为出发点, 建立了齿轮的寿命预测模型, 该可靠性模型同样可用于指导花键的概率疲劳失效分析。CURA 等^[8-9]通过试验和有限元仿真方法研究了磨损对花键疲劳寿命的影响。

由此可见, 现有针对花键疲劳失效的研究大多从载荷的随机性、花键接触长度和材料性能退化等方面研究, 忽视了花键在制造之初就存在着加工误差的问题。在一定加工精度要求下, 允许花键的齿厚及齿槽宽在公差范围内波动, 导致花键齿和齿槽之间的齿侧间隙各不相同, 进而在传递载荷时, 花键的啮合齿数是一个变量, 同时也使得各齿上分配的载荷不同, 对花键的疲劳寿命产生影响。因此, 为更真实地预测花键疲劳寿命, 更好地指导复杂装备的可靠性分析, 在花键疲劳寿命预测时考虑侧隙

不确定性的影响是十分重要的。开展以上工作的重点在于确定花键的实际啮合齿数和分配到各齿上的载荷。

针对花键啮合齿数和齿上载荷分配的问题, 现有文献中已经提出了几种不同的分析方法和数值模型。有学者将花键啮合齿数视为一个固定值。如 CEDOZ 等^[10]认为啮合齿数占 50%; NIEMANN^[11]认为啮合齿数占 75%; 国标^[12]中通过引入分配系数修正许用应力值, 但在计算齿上的实际载荷时认为各齿同时受载且各齿上的力相同。也有学者借助于有限元和数值分析方法研究了花键啮合齿数和花键齿上载荷分配的问题。如 KAHN-JETTER 等^[13]通过有限元法研究了花键齿上的应力及啮合齿数。TJERNBERG^[14]考虑了分度误差对花键载荷分配的影响, 近似计算了花键齿上的载荷和疲劳寿命。CURA 等^[15]考虑偏心对花键侧隙的影响, 计算了花键啮合齿数和齿上分配的载荷。HONG 等^[16-17]开发了基于有限元的花键载荷计算模型。综上所述, 目前已经形成了较为成熟的有限元法以分析花键载荷的分配情况, 但该方法存在耗时长、效率低的缺点, 难以应用于大批量花键的概率寿命预测。而对于已有的花键数值仿真模型, 所考虑的误差源单一, 不能充分反映花键在实际加工精度要求时的间隙分布情况, 从而利用该方法难以获得准确的花键疲劳寿命。

基于上述模型的不足, 推导了花键侧隙公差的计算方法, 在此基础上通过随机抽样获得多组花键侧隙值, 建立了花键等效力学模型, 研究了花键的实际啮合齿数和齿上分配的载荷, 并计算了花键的疲劳寿命及其分布。在保证花键齿侧间隙符合工程实际的同时, 可以快速获取不同加工精度花键的疲劳寿命分布, 用于指导花键的可靠性分析。

1 花键啮合齿数与载荷分配计算方法

由于加工误差不可避免, 使得花键各齿与齿槽配合面之间齿侧间隙各不相同, 进而导致分配到各齿上的力互不相同: 侧隙较小的齿上承担较大的载荷, 而侧隙较大的齿上承担的载荷较小或者没有载荷。如图 2a 所示为一个部分花键齿配合示意图, 由于加工误差的存在, 设花键配合面之间的齿侧间隙由左至右依次增大。当花键传递扭转载荷 M 时, 载荷由如图 2b 所示的两个花键齿承担, 而由于花键最左侧齿的齿侧间隙最小, 则该齿上承担的载荷也最大, 疲劳裂纹首先在该齿上产生。因此, 为真实预测花键的疲劳寿命及其分布情况, 关键在于获得花键侧隙, 并确定花键实际啮合齿对数和齿上分配的载荷。

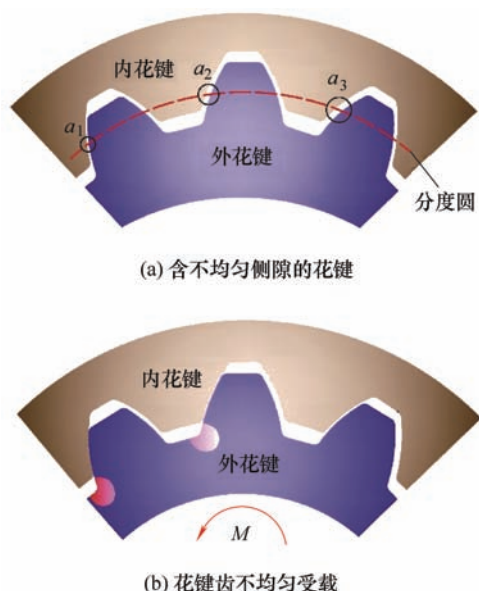


图 2 含不均匀齿侧间隙的渐开线花键模型

本节基于以上载荷分配原理, 介绍一定加工精度时的花键齿侧间隙的计算方法, 通过建立力学模型, 解决花键在外载荷作用下的啮合齿数及载荷分配问题。

另外需要说明的是, 本文只针对齿侧配合的渐开线花键进行分析, 花键只受扭转载荷的作用, 且假设相互啮合的花键齿与齿槽配合面之间完全贴合, 不考虑花键齿与齿槽轴向的变形对花键齿上应力分布的影响。

1.1 齿侧间隙计算

由于加工误差不可避免, 花键的各齿槽和各齿厚均不相同。设花键的基本齿槽宽和基本齿厚分别为 E 和 S , 加工公差 T 限制了实际齿槽宽或实际齿厚变动量, 综合公差 λ 限制齿侧形位误差的齿槽宽当量或齿厚当量; 另一方面, 花键实现不同配合类别取决于最小作用侧隙, 用改变外花键作用齿厚上偏差 es_V 的方法实现不同的配合^[18]。要检验花键尺寸是否符合设计要求, 需要分别规定齿槽宽和齿厚的极限值^[19]。根据 GB/T 3478.1—2008 中规定的花键实际齿槽宽与实际齿厚的极值可知

(1) 实际齿槽宽最小值 E_{\min} 。在内花键分度圆上测得的单个齿槽允许的最小弧齿槽宽, 如式(1)所示

$$E_{\min} = E + \lambda \quad (1)$$

(2) 实际齿槽宽最大值 E_{\max} 。在内花键分度圆上测得的单个齿槽允许的最大弧齿槽宽, 如式(2)所示

$$E_{\max} = E + T + \lambda \quad (2)$$

(3) 实际齿厚最小值 S_{\min} 。在外花键分度圆上

测得的单个花键齿允许的最小弧齿厚, 如式(3)所示

$$S_{\min} = S + es_V - (T + \lambda) \quad (3)$$

(4) 实际齿厚最大值 S_{\max} 。在外花键分度圆上测得的单个花键齿允许的最大弧齿厚, 如式(4)所示

$$S_{\max} = S + es_V - \lambda \quad (4)$$

则由上可知, 花键齿槽宽的取值范围为

$$[E_{\min}, E_{\max}] \quad (5)$$

即

$$[E + \lambda, E + \lambda + T] \quad (6)$$

花键齿厚的取值范围为

$$[S_{\min}, S_{\max}] \quad (7)$$

即

$$[S + es_V - (T + \lambda), S + es_V - \lambda] \quad (8)$$

因此花键齿与齿槽两侧间隙和的取值范围为

$$[2\lambda - es_V, 2(T + \lambda) - es_V] \quad (9)$$

为确定花键齿的工作齿面和非工作齿面两侧间隙的大小, 还需知道花键齿与齿槽相对于理想位置的偏移量。本文利用花键分度误差作为中间变量计算花键侧隙, 但国标中对花键分度公差并没有相应的取值标准, 这为后文取随机数分析载荷分布规律带来困难。傅耀先分析了花键分度误差、齿距累计误差及齿厚误差之间的数值关系^[20], 本文利用这一数值关系, 将花键分度公差用国标中已有的花键齿距累计公差和齿厚公差表示。

花键分度误差 δ_z ^[20]为在分度圆上, 外花键齿厚(内花键齿槽宽)的对称中心线偏离理论位置的最大误差值。 δ_z 取 $|\delta_{z\max}|$ 与 $|\delta_{z\min}|$ 中的较大值, 如图 3a 所示。分度公差 Δ_z 为分度误差允许的变动范围。渐开线花键的齿距累计误差 δ_p ^[18]为在分度圆上, 任意两同侧齿面间的实际弧长与理论弧长之差的最大绝对值, 如图 3b 所示。齿距累计公差 Δ_p 即为齿距累计误差的允许变动范围。此定义也可以理解为在分度圆上, 同侧齿形偏离理论位置的最大正、负弧长误差的两个绝对值之和。花键齿厚公差 Δ_s 为花键最大齿厚与最小齿厚的差值。由花键齿厚取值区间式(8)知, 花键齿厚公差也即加工公差 T , 如式(10)所示

$$\Delta_s = S_{\max} - S_{\min} = T \quad (10)$$

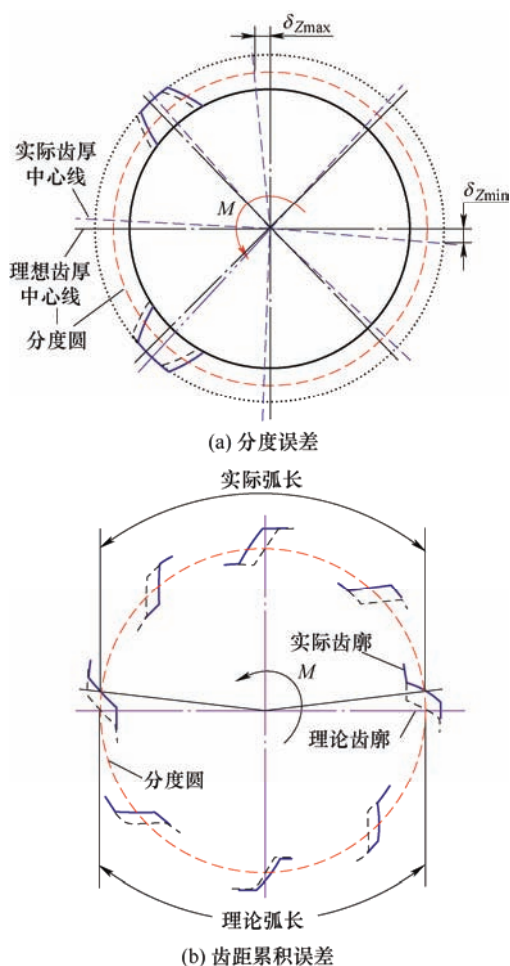


图3 花键误差示意图

根据以上定义,当不考虑齿厚误差的影响时,花键齿距累计公差 $A_{p,1}$ 与分度公差 A_z 的关系为

$$A_{p,1} = 2A_z \quad (11)$$

而当仅考虑花键齿厚公差 A_s 对花键齿距累计公差 $A_{p,2}$ 的影响,则

$$A_{p,2} = \frac{A_s}{2} = \frac{T}{2} \quad (12)$$

因此,综合考虑分度公差和齿厚公差影响下的花键齿距累计公差为

$$A_p = 2A_z + \frac{A_s}{2} = 2A_z + \frac{T}{2} \quad (13)$$

即

$$A_z = \frac{A_p}{2} = \frac{T}{4} \quad (14)$$

因此,通过 GB/T 3478.1—2008 查得花键齿距累计公差和加工公差,代入式(14)可获得花键的分度公差。

下面分析花键侧隙的具体计算方法。设内、外花键分度误差分别为 δ_{EZ} 和 δ_{SZ} ,且花键的实际齿槽

宽为 E_r ,实际齿厚为 S_r ,则花键齿两侧的间隙之和 A_C 为

$$A_C = E_r - S_r \quad (15)$$

若不考虑分度误差对花键的影响,花键工作齿面和非工作齿面一侧的间隙均为 $1/2 A_C$,如图4a所示。

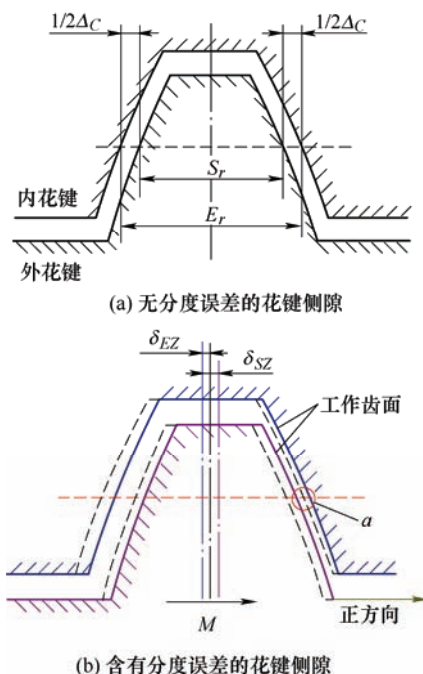


图4 花键侧隙示意图

下面讨论花键存在分度误差时齿两侧间隙的计算方法。规定分度误差沿齿厚对称中心线指向花键工作齿面一侧的方向为正方向,则图4b中外花键分度误差 δ_{SZ} 数值为正,内花键分度误差 δ_{EZ} 数值为负。则结合图4b中所示的各误差之间的位置关系可知,综合考虑花键配合类别及分度误差对花键侧隙的影响,工作齿面一侧的间隙为

$$a = \frac{1}{2} A_C - \delta_{SZ} + \delta_{EZ} = \frac{1}{2} (E_r - S_r) - \delta_{SZ} + \delta_{EZ} \quad (16)$$

花键非工作齿面一侧的间隙为

$$a' = \frac{1}{2} A_C + \delta_{SZ} - \delta_{EZ} = \frac{1}{2} (E_r - S_r) + \delta_{SZ} - \delta_{EZ} \quad (17)$$

本文若未做特殊说明,文中的侧隙均指代花键工作齿面一侧的间隙。对于任意服从正态分布^[21]的 $E_r \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $S_r \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\delta_{SZ} \sim N(\mu_3, \sigma_3^2)$, $\delta_{EZ} \sim N(\mu_4, \sigma_4^2)$,花键侧隙 a 服从的分布为

$$a \sim N\left(\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_2 - \frac{1}{2}\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_4, \frac{1}{4}\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2\right) \quad (18)$$

1.2 啮合齿数计算

1.2.1 等效力学模型构建

每对花键齿上的力取决于相配合的齿和齿槽的啮合刚度。由于花键齿的变形较小, 因此可以将齿和齿槽等效为弹簧^[22]。依照参考文献[23]计算内、外花键的单键刚度分别为 K_I 和 K_E , 建立如图 5 所示的等效弹簧串联系统。则一对相配合的内、外花键齿的啮合刚度为

$$K = \frac{K_I \cdot K_E}{K_I + K_E} \quad (19)$$

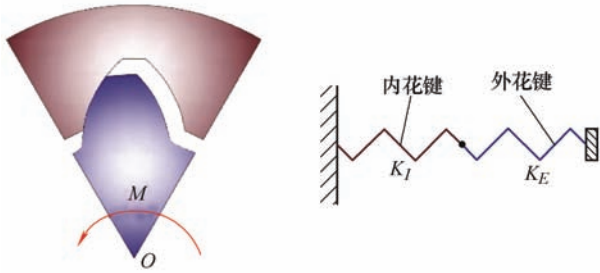


图 5 内、外花键齿刚度等效计算模型

对于含有 n 个齿的花键, 将齿侧间隙 a_1, a_2, \dots, a_n 由小到大排序为 $a_{(1)}, a_{(2)}, \dots, a_{(n)}$, 依序将对应的各内、外花键齿编号为 $1, 2, \dots, n$, 建立如图 6 所示的并联弹簧系统。其中各弹簧分别对应一对相配合的键齿; 载荷 F 到各弹簧的初始距离即为花键的初始齿侧间隙, 按照初始距离由小到大的顺序将弹簧编号为 $1, 2, \dots, n$; b 为最后一根被压缩弹簧的形变量, 也即花键各齿共同的形变量。设花键齿上载荷的作用点位于分度圆 D 处, 花键传递的扭转载荷为 M , 则作用于并联弹簧系统上的外载荷 F 可表示为

$$F = \frac{2M}{D} \quad (20)$$

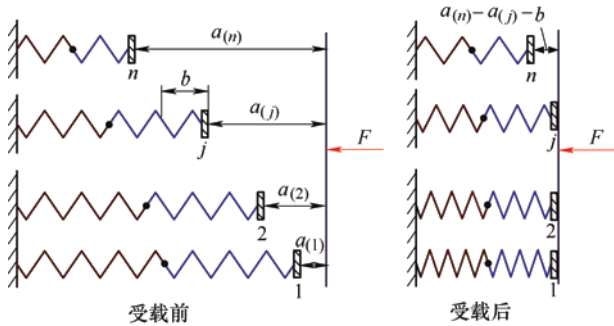


图 6 花键副等效力学模型

1.2.2 啮合齿数计算

根据等效模型, 被压缩弹簧的数量对应花键的

啮合齿数。当外载荷 F 刚接触第 j 根弹簧时, 第 i ($i=1, 2, \dots, j-1$) 根弹簧的形变量为 $a_{(j)} - a_{(i)}$ 。考虑由于齿形差异导致花键齿刚度各不相同, 记编号为 $1, 2, \dots, n$ 的各对键齿的啮合刚度分别为 K_1, K_2, \dots, K_n 。由胡克定律知, 当外载荷 F 刚接触第 $j+1$ 根弹簧时, 前 j 根弹簧的弹性力之和 $F_{E,j}$ 为

$$F_{E,j} = K_1[a_{(j+1)} - a_{(1)}] + K_2[a_{(j+1)} - a_{(2)}] + \dots + K_j[a_{(j+1)} - a_{(j)}] \quad (21)$$

在外载荷 F 作用时, 设有 j ($1 \leq j < n$) 根弹簧被压缩, 若将该前 j 根弹簧继续压缩至刚接触第 $j+1$ 根弹簧, 则前 j 根弹簧由变形产生的弹性力之和必大于等于外载荷 F , 如式(22)所示

$$F_{E,j} \geq F \quad (22)$$

将 j 从 1 至 $n-1$ 依次代入式(22), 首先使得该式成立的 j 值, 即为外载荷 F 作用下被压缩的弹簧根数; 若代入的 j 均不成立, 则有 n 根弹簧被压缩。将式(20)代入式(22), 求得的 j 值即为花键在扭矩 M 作用下的啮合齿数。图 7 为花键啮合齿数的计算流程图。

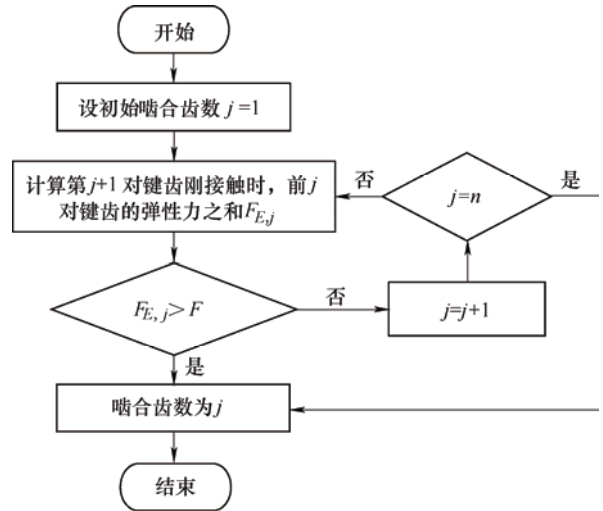


图 7 花键啮合齿数判断流程图

研究发现, 采用 CURA 等^[23]提出的方法计算花键单键刚度时, 由加工误差导致的齿形差异对齿刚度的影响甚微。因此, 为计算方便, 认为花键各单键刚度均为理想齿形下的刚度。则综合式(20)、(21)、(22), 判断花键啮合齿数的不等式可简化为

$$K \left[ja_{(j+1)} - \sum_{i=1}^j a_{(i)} \right] \geq \frac{2M}{D} \quad 1 \leq j < n \quad (23)$$

1.2.3 啮合齿数分布函数

由式(23)可知, 花键啮合齿数与啮合刚度、外载荷、分度圆直径和齿侧间隙的分散性有关。对于

任意花键副, 由于载荷波动和齿侧间不确定性的影响, 花键的啮合齿数为随机变量, 文中以 J 表示。下面根据式(23)计算花键啮合齿数的分布函数。

(1) 0 对花键齿啮合。当花键无齿啮合时, 也即为内、外花键不能安装在一起, 则花键最小齿侧间隙小于零, 其概率为

$$P(J=0)=P(a_{(1)}<0) \quad (24)$$

由次序统计量的分布知, $a_{(1)}$ 的概率密度为

$$f(a_{(1)})=n[1-F(a)]^{n-1}f(a) \quad (25)$$

式中, $f(a_{(1)})$ 为花键第 i 对齿侧隙的概率密度, $F(a)$ 为侧隙的分布函数。

因此, 花键没有齿啮合的概率为

$$P(J=0)=\int_{a_{(1)}<0} f(a_{(1)})da_{(1)} \quad (26)$$

(2) 1 对花键齿啮合。当花键仅有 1 对齿啮合时, 结合式(23)知其概率为

$$P(J=1)=P\left(a_{(2)}-a_{(1)}\geq\frac{2M}{DK}\right) \quad (27)$$

根据 $(a_{(1)}, a_{(2)})$ 的联合概率密度函数 $f(a_{(1)}, a_{(2)})$, 可知仅有 1 对齿啮合的概率为

$$P(J=1)=\iint_{a_{(2)}-a_{(1)}\geq\frac{2M}{DK}} f(a_{(1)}, a_{(2)})da_{(1)}da_{(2)} \quad (28)$$

(3) k 对花键齿啮合($1<k<n$)。当花键有 k 对齿啮合时, 由式(23)知其满足边界条件

$$ka_{(k+1)}-\sum_{i=1}^ka_{(i)}\geq\frac{2M}{DK} \quad (29)$$

当花键有 k 对齿啮合时, 根据力学关系, 前 $k-1$ 对花键齿发生变形 $(k-1)a_{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}a_{(i)}$ 时所对应的载荷小于名义切向力之和 F , 也即

$$(k-1)a_{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}a_{(i)}<\frac{2M}{DK} \quad (30)$$

因此, 花键有 k 对齿啮合的概率为

$$P(J=k)=\int \cdots \int_{(k+1)a_{(k)}-\sum_{i=1}^{k-1}a_{(i)}<\frac{2M}{DK}\leq ka_{(k+1)}-\sum_{i=1}^ka_{(i)}} f(a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots, a_{(k+1)})da_{(1)}da_{(2)}\cdots da_{(k+1)} \quad (31)$$

(4) n 对花键齿啮合。当花键有 n 对齿啮合时, 也即前 $n-1$ 对键齿变形到刚接触第 n 对键齿时, 其键齿变形产生的弹性力仍不能将外载荷分配完全, 则满足不等式

$$(n-1)a_{(n)}-\sum_{i=1}^{n-1}a_{(i)}<\frac{2M}{DK} \quad (32)$$

$(a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots, a_{(n)})$ 的联合概率密度为

$$f(a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots, a_{(n)})=n!\prod_{i=1}^nf(x_{(i)}) \quad (33)$$

花键有 n 对齿啮合的概率为

$$P(J=n)=\int \cdots \int_{(n-1)a_{(n)}-\sum_{i=1}^{n-1}a_{(i)}<\frac{2M}{DK}} f(a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots, a_{(n)})da_{(1)}da_{(2)}\cdots da_{(n)} \quad (34)$$

以上得到了花键啮合齿数的概率计算公式, 则花键啮合齿数的数学期望为

$$E(J)=\sum_{q=1}^nq\cdot P(J=q) \quad (35)$$

花键啮合齿数的标准差为

$$Var(J)=\sqrt{\sum_{q=1}^n[q-E(J)]^2P(J=q)} \quad (36)$$

根据以上花键啮合齿数概率的计算方法可知, 随着花键齿数的增加, 需要积分的复杂性也相应提高, 计算量增大, 因此本文通过 Monte Carlo 随机抽样的方法, 计算花键啮合齿数的概率值。具体计算流程如图 8 所示。首先, 根据式(18)确定花键在一定加工精度时的分布参数, 并利用 Matlab 生成 U 组满足该分布的侧隙, 用以模拟含有加工误差的 U 个花键; 其次, 依据式(23)判断含有不同间隙花键的啮合齿对数; 统计有 0 对, 1 对, \cdots , n 对齿啮合的花键数量并分别存储于 U_0, U_1, \cdots, U_n 中。最终得到花键含有 i 对齿啮合的概率为

$$P(J=i)=\frac{U_i}{U} \quad (37)$$

以 30 齿花键为例, 计算花键啮合齿数的概率。设扭转载荷 $M=200\text{ N}\cdot\text{m}$, 花键的材料为 40CrNiMoA, 具体参数性能如表 1、2 所示。计算的花键啮合齿数概率如图 9 所示。

表 1 40CrNiMoA 的常规力学性能

屈服强度 $\sigma_{0.2}/\text{MPa}$	抗拉强度 σ_b/MPa	弹性模量 E/GPa	泊松比 μ	硬度 HB
835	980	209	0.28	269

表 2 花键模型参数

齿数 n	模数 m	标准压力角 $\alpha_D/(\circ)$	接触长度 l/mm	公差等级	配合类别
30	1.25	30	10	4	H/h

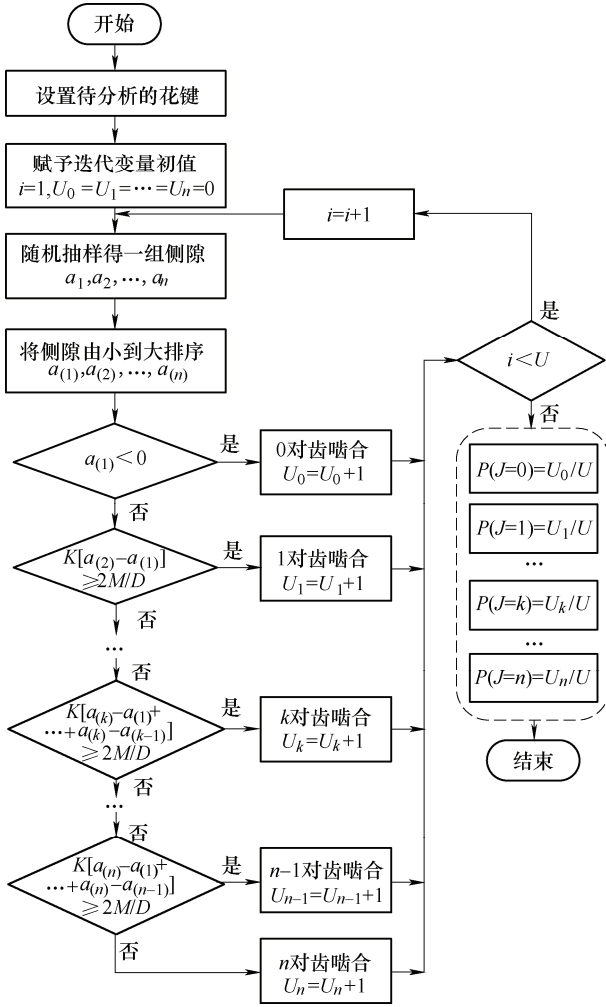


图8 基于随机抽样的花键啮合齿数概率计算流程

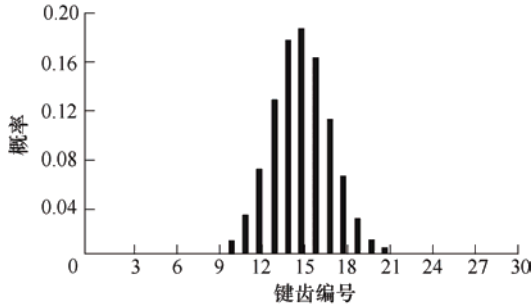


图9 花键啮合齿数概率分布

由图9可知,对于该30齿花键,当其加工精度为H/h时,在扭转载荷200 N·m作用下,啮合齿数服从正态分布,啮合齿数的均值为15,标准差为2.093 6。进一步分析扭矩对啮合齿数标准差的影响,如图10所示。

由图10可见,随着扭转载荷增大,花键啮合齿数的标准差先增大再减小。当扭矩较小时,载荷由少数几个侧隙小的齿即可承担,因此啮合齿数受到间隙分散性的影响较小;当外载荷增大时,越来越多的齿参与啮合,不确定性的齿侧间隙使花键啮合齿数分散性增加;当花键齿上载荷增加到一定程度

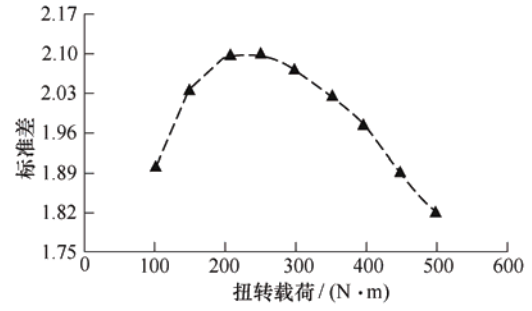


图10 不同扭转载荷下的花键啮合齿数标准差

时,侧隙的不均匀性已无法对花键啮合齿数及齿上分配的载荷产生较大影响,因此随着扭转载荷增大,花键啮合齿数的分散性逐渐降低。

1.3 花键齿上名义切向力计算

花键侧隙的不均匀性导致分配在各齿上的名义切向力不同。根据等效力学模型,各弹簧上分配的载荷等效为花键各齿上的力。设在外载荷 F 作用下有 j 根弹簧被压缩,最后一根弹簧的压缩量为 b ,由力学平衡关系知,各弹簧实际弹性变形产生的弹性力与外载荷 F 相等,如式(38)所示

$$K_1(a_{(j)} - a_{(1)} + b) + K_2(a_{(j)} - a_{(2)} + b) + \dots + K_{j-1}(a_{(j)} - a_{(j-1)} + b) + K_j b = F \quad (38)$$

可得

$$b = \frac{F + \sum_{p=1}^j K_p a_{(p)}}{\sum_{p=1}^j K_p} - a_{(i)} \quad (39)$$

任意弹簧 $i(i=1,2,\dots,j)$ 上的弹性力 $F_{e,j}$ 为

$$F_{e,j} = K_i(a_{(j)} - a_{(i)}) + K_i b = K_i \left[\frac{F + \sum_{p=1}^j K_p a_{(p)}}{\sum_{p=1}^j K_p} \right] - K_i a_{(i)} \quad (40)$$

将式(20)代入式(40),可得在扭转载荷 M 作用下,花键齿 $i(i=1,2,\dots,j)$ 上的名义切向力为

$$F'_i = K_i \left[\frac{\frac{2M}{D} + \sum_{p=1}^j K_p a_{(p)}}{\sum_{p=1}^j K_p} \right] - K_i a_{(i)} \quad (41)$$

若不考虑齿形差异对花键单键刚度的影响,则花键齿 $i(i=1,2,\dots,j)$ 上的名义切向力为

$$F_i = \frac{2M}{jD} + \frac{1}{j} K \sum_{p=1}^j a_{(p)} - K a_{(i)} \quad (42)$$

由于承受载荷最大的齿最易首先发生疲劳失

效, 因此计算花键齿上的最大载荷是关键所在。由式(42)可知, 当间隙 $a_{(i)} = a_{(1)}$ 时, F_i 有最大值, 如式(43)所示

$$F_{\max} = \frac{2M}{jD} + \frac{1}{j} K \sum_{p=1}^j a_{(p)} - Ka_{(1)} \quad (43)$$

由式(43)可见, 对于任意确定模数与齿数的花键, 花键齿上最大力 F_{\max} 的不确定性与扭转载荷 M 、花键副实际啮合齿数 j 以及齿侧间隙 a 有关; 而由式(23)可见, 花键实际啮合齿数也是载荷与侧隙的函数, 因此 F_{\max} 的分布类型由扭转载荷 M 和花键间隙共同决定, 各影响因素如图 11 所示。



图 11 花键最大名义切向力影响因素

2 花键疲劳寿命预测方法

花键的疲劳破坏一般属于高周疲劳过程, 而名义应力法对预测零构件的高周疲劳寿命有较好的适用性。本文借助于名义应力法, 以计算花键齿根弯曲疲劳寿命为例, 分析花键考虑侧隙不确定时的疲劳寿命计算过程。

2.1 花键齿根弯曲应力计算方法

参考 GB/T 17855—2017 中关于花键齿上载荷的计算方法, 已知花键齿 i 上的名义切向力 F_i , 齿根弯曲应力为

$$S = \frac{6hF_i}{S_F^2 l} \quad (44)$$

式中, h 为花键的全齿高, l 为花键轴向接触长度, S_F 为花键渐开线起始圆上的弦齿厚。

将 n 齿花键视作一个串联系统, 花键任意齿失效, 该串联系统即失效。由于花键疲劳失效首先发生在最弱齿上, 则花键的疲劳寿命即为最弱花键齿的疲劳寿命^[24]。针对本文分析的花键模型, 花键最弱齿对应承载力最大的花键齿。结合式(43), 花键承载最大齿的齿根弯曲应力为

$$S_{\max} = \frac{6h}{S_F^2 l} \left(\frac{2M}{jD} + \frac{1}{j} K \sum_{p=1}^j a_{(p)} - Ka_{(1)} \right) \quad (45)$$

2.2 花键疲劳寿命预测方法

2.2.1 花键疲劳寿命曲线拟合

已知花键材料在不同应力集中系数时的 $S-N$ 曲

线, 通过查表或有限元仿真获得花键齿根处的理论应力集中系数 K_T , 再借助于牛顿插值法求 K_T 时材料的 $S-N$ 曲线。在获得上述材料的 $S-N$ 曲线的基础上, 需将其转化为本文分析的花键齿根弯曲疲劳寿命 $S-N$ 曲线。材料的 $S-N$ 曲线应力 σ_a 与零构件的 $S-N$ 曲线应力 S_a 之间的关系^[25]如式(46)所示

$$S_a = \frac{\sigma_a}{K_f} \varepsilon \beta C_L \quad (46)$$

式中, ε 为尺寸系数, β 为表面质量系数, C_L 表示加载方式, K_f 为疲劳缺口系数。

将以上寿命数据代入到常用描述 $S-N$ 曲线的幂函数公式^[25], 可拟合求得花键齿根疲劳寿命 N 与应力 S 的关系式为

$$\lg N = p + q \cdot \lg S \quad (47)$$

式中, p 、 q 为与材料相关的系数。

2.2.2 花键疲劳寿命计算

设花键在载荷循环 i 时的最大扭矩为 M_{\max}^i , 最小扭矩为 M_{\min}^i , 与该两个扭矩极值对应的齿根弯曲应力分别为 S_{\max}^i 和 S_{\min}^i , 则应力幅值 S_a^i

$$S_a^i = \frac{S_{\max}^i - S_{\min}^i}{2} = \frac{3h}{S_F^2 l} \left(\frac{2M_{\max}^i}{j_{\max}^i D} + \frac{1}{j_{\max}^i} K \sum_{p=1}^{j_{\max}^i} a_{(p)} - \frac{2M_{\min}^i}{j_{\min}^i D} + \frac{1}{j_{\min}^i} K \sum_{p=1}^{j_{\min}^i} a_{(p)} \right) \quad (48)$$

式中, j_{\max}^i 和 j_{\min}^i 为花键传递扭矩 M_{\max}^i 和 M_{\min}^i 时的啮合齿数。

平均应力 S_m^i 为

$$S_m^i = \frac{S_{\max}^i + S_{\min}^i}{2} = \frac{3h}{S_F^2 l} \left(\frac{2M_{\max}^i}{j_{\max}^i D} + \frac{1}{j_{\max}^i} K \sum_{p=1}^{j_{\max}^i} a_{(p)} + \frac{2M_{\min}^i}{j_{\min}^i D} + \frac{1}{j_{\min}^i} K \sum_{p=1}^{j_{\min}^i} a_{(p)} - 2Ka_{(1)} \right) \quad (49)$$

利用 Goodman 平均应力修正, 得等效应力幅值 S_e^i 为

$$S_e^i = S_a^i \cdot \frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m^i} \quad (50)$$

式中, σ_b 为材料的抗拉强度极限。

将等效应力幅值代入式(47), 可得花键在载荷循环 i 时的寿命 N_i , 如式(51)所示

$$N_i = 10^{p+q \cdot \lg \left(S_a^i \frac{\sigma_b}{\sigma_b - S_m^i} \right)} \quad (51)$$

3 案例分析

3.1 花键齿根弯曲应力计算

花键的啮合齿数直接影响了齿上应力的分布, 现有计算花键啮合齿数的方法主要包括: 与总齿数成比例法、数值迭代法以及有限元方法。其中有限元方法由于耗时长, 计算效率低而难以应用于大批量花键啮合齿数的判断。因此本文分别按照与总齿数成比例法和提出的迭代法计算花键啮合齿数, 在此基础上计算花键齿上的应力。

本部分的案例分析仍以表 1 和表 2 所示参数的花键为例, 假设作用在花键上的扭矩 M 随时间服从正弦函数变化, 平均扭转载荷为 $350 \text{ N}\cdot\text{m}$, 载荷幅值为 $150 \text{ N}\cdot\text{m}$, 循环周期为 t 。

3.1.1 国标及传统方法计算花键齿根弯曲应力

国标^[12]中计算含有不均匀侧隙花键的齿上应力时, 通过引入分配系数修正许用应力值, 但在计算齿上的实际载荷时认为各齿同时受载且各齿上的力相同。CEDOZ 等^[10]和 NIEMANN^[11]认为花键啮合齿数分别占总齿数的 50% 和 75%, 且载荷在各已啮合齿上相同。因此, 当 n 齿花键的啮合齿数占比为 ξ , 分圆直径为 D 时, 在扭转载荷 M 作用下, 各齿上分配的名义切向力为

$$F_{\xi} = \frac{2M}{D \cdot [\xi \cdot n]} \quad (52)$$

式中, $[\xi \cdot n]$ 表示对 $\xi \cdot n$ 向下取整。

利用式(52)分别计算当花键啮合齿数占总齿数的 50%、75% 及 100% (国标方法) 时, 在交变扭

转载荷 M 作用的齿上名义切向力 F_{ξ} 、齿根弯曲应力 σ_F 及平均应力 S_m 和应力幅值 S_a , 结果如表 3 所示。

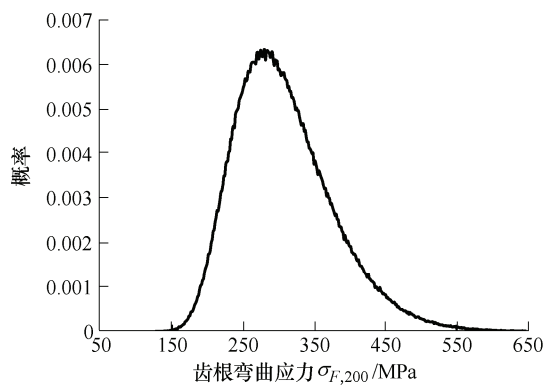
由表 3 可见, 采用不同的啮合齿数计算方法计算花键齿根应力时, 结果有较大差异。传统方法中显然未考虑扭转载荷变化可能引起花键啮合齿数发生改变, 忽视了各齿上的载荷之间的差异性, 因此通过传统方法计算的花键齿根应力与实际情况相差较大。

表 3 花键在不同啮合齿数时键齿上的载荷值

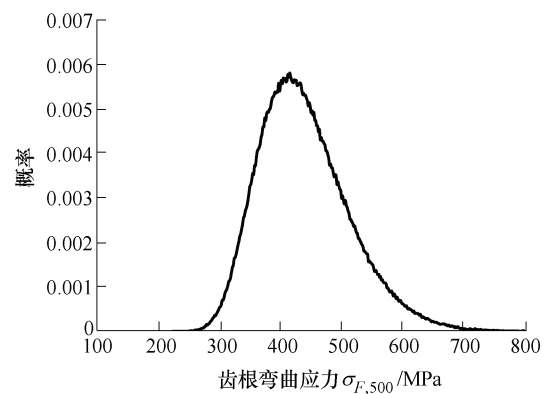
占比 $\xi(\%)$	扭转载荷 $M/(\text{N}\cdot\text{m})$	切向力 F_{ξ}/N	应力 σ_F/MPa	平均应力 S_m/MPa	应力幅值 S_a/MPa
100	200	356	48.5	84.9	36.4
	500	889	121.3		
50	200	711	97.0	169.8	72.8
	500	1 778	242.5		
75	200	485	66.1	115.8	49.6
	500	1 212	165.4		

3.1.2 不确定啮合齿数计算花键齿根弯曲应力

下面计算 100 万个含有不确定性间隙的花键齿根弯曲应力。设花键各误差均服从正态分布, 利用 Matlab 生成满足表 2 所示参数的分度误差和齿厚/齿槽宽误差, 再按式(16)计算花键齿侧间隙。结合以上获得的花键齿侧间隙, 根据图 7 判断交变扭转载荷 M 作用时的实际啮合齿数 j , 由式(43)计算花键齿上的最大名义切向力 F_{\max} , 再由式(45)计算花键承载 $200 \text{ N}\cdot\text{m}$ 和 $500 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时的最大齿根弯曲应力 $\sigma_{F,200}$ 和 $\sigma_{F,500}$, 以及应力均值 S_m 和应力幅值 S_a , 结果如图 12 所示。



(a) $M=200 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时的应力分布



(b) $M=500 \text{ N}\cdot\text{m}$ 时的应力分布

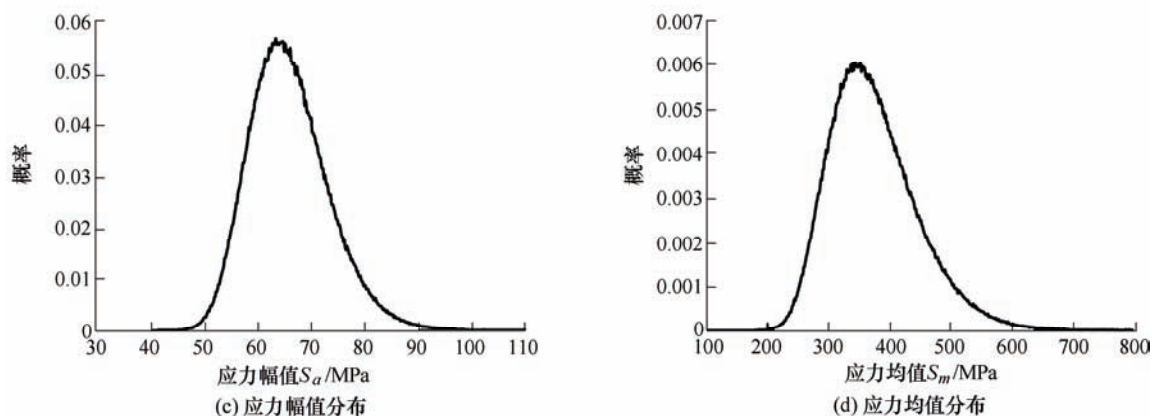


图 12 花键齿根弯曲应力概率分布

3.2 花键疲劳寿命曲线拟合

借助于有限元仿真, 确定花键的齿根理论应力集中系数为 $K_T=2.3$ 。根据室温条件下 40CrNiMoA 材料在应力比 $R=-1$ 时的 $S-N$ 曲线数值点, 通过牛顿插值可得 $K_T=2.3$ 时材料 $S-N$ 曲线的各数值点, 如表 4 所示。

表 4 $R=-1$ 、 $K_T=2.3$ 时 40CrNiMoA 的 $S-N$ 曲线数值点

K_T	寿命 N				
	10^5	5×10^5	10^6	5×10^6	10^7
2.3	345	289	273	268	266

取花键尺寸系数 $\varepsilon=0.95$, 表面质量系数 $\beta=0.95$, 加载方式 $C_L=0.85$, 根据式(46)计算花键材料的 $S-N$ 曲线中 σ_a 与花键齿根弯曲疲劳寿命的 $S-N$ 曲线中 S_a 之间的对应关系为

$$S_a = 0.475\,53\sigma_a \quad (53)$$

将表 4 数据代入式(53), 可得花键齿根在弯曲载荷作用下的 $S-N$ 曲线数值点, 如表 5 所示。

表 5 花键弯曲疲劳 $S-N$ 曲线

寿命 N	10^5	5×10^5	10^6	5×10^6	10^7
S_a/MPa	164	137	130	127	126

采用 EM 法则对渐开线花键的 $S-N$ 曲线进行修正, 利用表 5 所示数值点, 通过式(47)拟合得花键疲劳寿命公式为

$$\lg N = 38.548\,4 - 15.209\,6 \cdot \lg S \quad (54)$$

3.3 花键疲劳寿命计算结果

表 5 给出的是平均应力 S_m 为零的 $S-N$ 曲线, 而表 3 和图 12 所示的载荷实际平均应力并不为零。利用 Goodman 直线模型对齿根弯曲疲劳应力谱进行等效, 得到按照国标及传统方法和本文方法计算的花键齿根等效弯曲应力 S_e , 如表 6、图 13 所示。

表 6 花键齿根弯曲等效应力

啮合齿数占比(%)	100	50	75
S_e/MPa	39.8	88.0	56.3

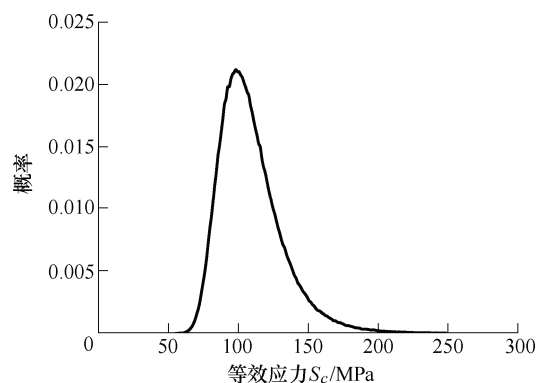


图 13 本文方法计算的花键等效应力分布

将表 6 和图 13 所示的花键齿根弯曲等效应力代入式(54), 可得按照不同方法计算的花键齿根弯曲疲劳寿命, 结果如表 7 和图 14 所示。

表 7 花键齿根弯曲疲劳寿命计算结果

啮合齿数占比 $\lg N$			本方法的寿命均值
$\zeta=100\%$	$\zeta=50\%$	$\zeta=75\%$	
14.21	8.97	11.93	7.69

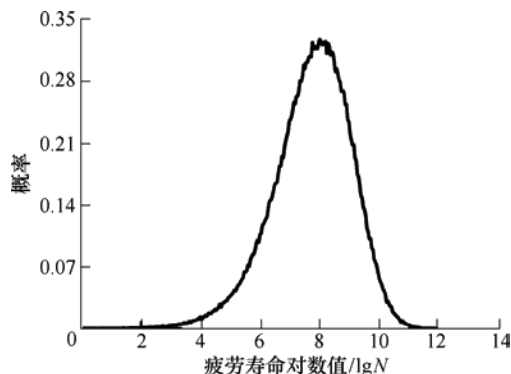


图 14 本文方法计算的花键疲劳寿命分布

由表 7 可知, 按照国标方法计算的花键疲劳寿命是啮合齿数占比为 $\xi=75\%$ 的 190 倍, 根据传统方法校核的花键疲劳寿命之间存在极大差异。而花键在实际工程使用中并没有确定的寿命, 往往在一定载荷循环周期前后发生故障。由图 14 可知, 通过考虑间隙不确定性校核的花键疲劳寿命存在分散性, 花键的寿命均值为 10^8 个载荷循环, 花键在 $2 \times 10^7 \sim 7 \times 10^8$ 个载荷循环内发生疲劳破坏的概率达到 50%。在花键的整个寿命分布区间内, 难以达到采用国标方法所校核的 10^{14} 个载荷循环而不发生疲劳破坏。基于本文提出的花键疲劳寿命预测方法, 能够通过模拟加工误差导致的不确定性间隙, 得到花键的寿命分布, 为更真实预测花键疲劳寿命和可靠性分析等研究提供理论依据。

4 结论

(1) 基于国标对花键各误差的要求, 推导了一定加工精度时花键侧隙的公差及其分布, 在此基础上通过随机抽样的方法获得了花键的侧隙, 为研究含加工误差的花键齿上载荷分布规律奠定基础。

(2) 依据齿的小变形弹性假设, 研究了花键载荷分配建模方法。提出的理论模型可通过数值迭代和概率统计两种方法预测花键的实际啮合齿数, 并根据侧隙大小计算花键各齿上实际分配的载荷。模型显示, 花键啮合齿数与侧隙分布、齿啮合刚度、外载荷及花键基本参数有关, 而在此基础上计算的花键齿上最大名义切向力与最小侧隙有关。

(3) 案例分析结果表明, 按照国标及一般传统方法计算花键啮合齿数时, 无法将外载荷和材料参数等各影响因素综合考虑, 且获得的疲劳寿命是确定的唯一值。本文基于所提出的侧隙分布及齿上载荷分配方法, 获得了花键在满足一定加工精度时的疲劳寿命分布, 更为接近花键的实际寿命情况。所提的花键寿命预测方法可为花键的剩余寿命校核和可靠性分析等研究奠定理论基础。

(4) 本文对考虑间隙不确定性的花键概率疲劳寿命预测方法进行了初步探索, 但未计及内、外花键过盈配合时由挤压而产生的预应力, 以及齿上应力沿轴向的不均匀性, 因此本文的寿命预测方法可应用于间隙配合及轴向接触长度较短的渐开线花键。

参 考 文 献

- [1] BROWN H W. A reliable spline coupling[J]. *Journal of Engineering for Industry*, 1979, 101(4): 421-426.
- [2] RAO S S, TJANDRA M. Reliability-based design of automotive transmission systems[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 1994, 46(2): 159-169.
- [3] LEEN S B, MCCOLL I R, RATSIMBA C H H, et al. Fatigue life prediction for a barreled spline coupling under torque overload[J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2003, 217(8): 123-141.
- [4] HOUGHTON D, WAVISH P M, WILLIAMS E J, et al. Multiaxial fretting fatigue testing and prediction for splined couplings[J]. *International Journal of Fatigue*, 2009, 31(11): 1805-1815.
- [5] PEDERSEN N L. Optimization of straight-sided spline design[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, 81(10): 1393-1407.
- [6] 薛向珍, 王三民, 袁茹. 渐开线花键副微动磨损疲劳寿命预估[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2016, 48(1): 147-151.
- [7] XUE Xiangzhen, WANG Sanmin, YUAN Ru. Fretting wear-fatigue predictions in spline couplings[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2016, 48(1): 147-151.
- [8] 李铭, 谢里阳, 张宇, 等. 齿轮的概率寿命预测与弯曲疲劳试验[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(18): 169-175.
- [9] LI Ming, XIE Liyang, ZHANG Yu, et al. Probabilistic life prediction and bending fatigue test for gear[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(18): 169-175.
- [10] CURA F, MURA A, ADAMO F. Fatigue damage in spline couplings: numerical simulations and experimental validation[J]. *Procedia Structural Integrity*, 2017, 5: 1326-1333.
- [11] CURA F, MURA A. Evaluation of the fretting wear damage on crowned splined couplings[J]. *Procedia Structural Integrity*, 2017, 5: 1393-1400.
- [12] CEDOZ R W, CHAPLIN M R. Design guide for involute splines[M]. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1994.
- [13] NIEMANN W. Elementi di machine[M]. Milano: Edizioni Scienza e Tecnica, 1983.
- [14] NIEMANN W. Machine elements[M]. Milano: Science and Technology Editions, 1983.
- [15] GB/T 17855—2017, 花键承载能力计算方法[S]. 北京: 中国标准出版社, 2017.
- [16] GB/T 17855—2017, Calculation of load capacity of spline[S]. Beijing: Standards press of China, 2017.
- [17] KAHN-JETTER Z L, WRIGHT S. Finite element analysis of an involute spline[J]. *Journal of Mechanical*

[1] BROWN H W. A reliable spline coupling[J]. *Journal of*

- Design, 2000, 122(2): 239-244.
- [14] TJERNBERG A. Load distribution and pitch errors in a spline coupling[J]. Materials & Design, 2001, 22(4): 259-266.
- [15] CURA F, MURA A, GRAVINA M. Load distribution in spline coupling teeth with parallel offset misalignment[J]. Proceedings of Institution of Mechanical Engineers. Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, 2012, 227(10): 2195-2205.
- [16] HONG J, TALBOT D, KAHRAMAN A. Load distribution analysis of clearance-fit spline joints using finite elements[J]. Mechanism & Machine Theory, 2014, 74(6): 42-57.
- [17] HONG J, TALBOT D, KAHRAMAN A. Effects of tooth indexing errors on load distribution and tooth load sharing of splines under combined loading conditions[J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(3): 032601.
- [18] GB/T 3478.1—2008, 圆柱直齿渐开线花键(米制模数, 齿侧配合)第 1 部分总论[S]. 北京: 中国标准出版社, 2008.
- GB/T 3478.1—2008, Straight cylindrical involute splines (Metric module, side fit) Part 1: Generalities[S]. Beijing: Standards Press of China, 2008.
- [19] GB/T 15758—2008, 花键基本术语[S]. 北京: 中国标准出版社, 2008.
- GB/T 15758—2008, Basic terminology of spline[S]. Beijing: Standards Press of China, 2008.
- [20] 傅耀先. 对花键分度误差的理解[J]. 机械工人: 冷加工, 1994(2): 19.
- FU Yaoxian. Understanding of spline pitch error[J]. Mechanical Workers: Cold Processing, 1994(2): 19.
- [21] SILVERS J, SORENSEN C D, CHASE K W. A new statistical model for predicting tooth engagement and load sharing in involute splines[C]//American Gear Manufacturers Association Fall Technical Meeting, October, 2010, Brigham Young University, Provo, Utah. Alexandria: AGMA, 2010: 1-17.
- [22] CHASE K W, SORENSEN C D, DECAIRES B J K. Variation analysis of tooth engagement and loads in involute splines[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2010, 7(4): 746-754.
- [23] CURA F, MURA A. Experimental procedure for the evaluation of tooth stiffness in spline coupling including angular misalignment[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2013, 40(2): 545-555.
- [24] 谢里阳. 机械可靠性理论、方法及模型中若干问题评述[J]. 机械工程学报, 2014, 50(14): 27-35.
- XIE Liyang. Issues and commentary on mechanical reliability theories, methods and models[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(14): 27-35.
- [25] 姚卫星. 结构疲劳寿命分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- YAO Weixing. Fatigue life prediction of structures[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003.

作者简介: 喻天翔, 男, 1977 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为飞行器可靠性工程, 飞行器结构设计和飞行器故障诊断与预测。

E-mail: tianxiangyu@nwpu.edu.cn

赵庆岩(通信作者), 男, 1993 年出生, 博士研究生。主要研究方向为飞行器可靠性。

E-mail: qyzhao@mail.nwpu.edu.cn