DOI: 10.3901/JME.2015.18.204

基于线性松弛规划的系统可靠性分配决策分析*

张永进^{1,2} 孙有朝¹ 刘小弟²

(1. 南京航空航天大学民航学院 南京 211106;

2. 安徽工业大学数理科学与工程学院 马鞍山 243002)

摘要: 把产品系统设计要求的可靠性指标逐层分配到下一级系统或零部件是产品设计与管理的非常重要环节。从底层部件的工艺设计与顾客重要度偏好出发,考虑一种可靠性工艺水平对应一个实际生产成本,而不是一个精确的“成本-可靠性”函数关系。基于离散“重要度-可靠性-成本”数据集,以系统最低可靠性要求为基本约束条件,以底层部件工艺方案选取标识0与1为二元决策变量,应用非线性整数规划方法,建立成本与重要性权衡值最小时系统可靠性分配的0-1整数规划决策模型,分别给出等效串联与并联单一结构下部件优选方案及其等价的线性规划,以及等效串-并与并-串混合结构下部件优选方案及其线性松弛规划。为快速搜索混合结构产品的非线性规划的最优解,建立线性松弛规划的寻优路径及遗传算法流程。给出混合结构产品的算例分析,验证了决策方案的可行性及算法的有效性。

关键词: 可靠性分配; 重要度; 线性松弛; 0-1 整数规划; 遗传算法

中图分类号: TH122; TB114

Decision Analysis for the Allocation of System Reliability Based on Linear Relaxation-programming

ZHANG Yongjin^{1,2} SUN Youchao¹ LIU Xiaodi²

(1. College of Civil Aviation, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106;

2. School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Maanshan 243002)

Abstract: The requested reliability of products is allocated to the next level systems or components, is very important on the design of products and management. It is often more reasonable to consider the technological design and customer preference of the bottom components, and describe importance-reliability-cost relationships via discrete data sets, not via functions to relate cost and reliability. Considering such situations, where each component with different importance is available at several reliability levels with corresponding costs. Based on the discrete “importance-reliability-cost” data set and the minimum cost of production, the requested reliability is considered as the basic constraint conditions, and the selection identifications 0 and 1 of the bottom components are considered as the binary decision variable, the 0-1 integer programming models for reliability assignment is studied by means of the nonlinear integer programming. The optimal scheme of components which comprise the equivalent series and parallel structure system and its equivalent linear programming, and the equivalent series-parallel and parallel-series system and their linear relaxation-programming, are presented respectively. For quickly searching the optimal solutions of nonlinear programming, the search path and genetic algorithm for linear relaxations programming are given. Numerical examples are also given to illustrate the feasibility of decision program and effectiveness of presented algorithm.

Key words: reliability assignment; important value; linear relaxations; 0-1 integer programming; genetic algorithm

0 前言

可靠性分配是把整机的可靠性指标逐层分配到系统、分系统、设备,使各级设计人员明确自己

的可靠性设计目标,如在核电站、航空航天等复杂系统的研制阶段,研发人员需要知道每一级子系统或重要零部件的基本可靠性指标与造价,因此,系统可靠性分配是系统可靠性设计与管理的一个重要环节^[1]。

从目前研究文献来看,关于可靠性指标分配的研究可以分为两类^[2]。一类是从冗余设计^[3-4]、类似系统设计的专家经验^[5-7]、失效后果与频率^[8]等出发

* 国家自然科学基金委员会与中国民用航空局联合 (U1333119, U1333118, 60979019, 60572171)、国防基础科研计划 (JCKY201360513002)和工信部民机专项(MFF-2011-33)资助项目。
20141015 收到初稿, 20150410 收到修改稿

对系统可靠性指标进行分配，这类问题没有对成本与可靠性给出限制性的函数关系，但是过于依赖历史数据与经验。另一类则假定部件成本可描述为可靠性的增长函数，基本可靠性约束下系统费用最小^[9]以及一定费用约束下系统可靠性最大^[10]时的可靠性分配都可以转化为一定约束条件下的最优规划问题^[11-16]。然而这种函数关系是未知且难于构造，事实上，假设的函数关系多数也是为了使优化问题变得更加容易，没有足够的理由说明这样的函数关系是合理的，而且这样的函数量化关系总有些偏离工程实际情况。不管从哪一类针对系统可靠性指标分配的研究而言，目前文献并未涉及到底层部件重要性对决策者的偏好问题。

为避免过度依赖历史数据与经验，本文从底层部件的工艺设计角度出发，考虑一种可靠性工艺水平对应一个实际生产成本，而不是一个精确的“成本-可靠性”函数关系，考虑系统部件具有重要度，以系统最低可靠性要求为基本约束条件，以底层部件工艺方案(选取记为 1, 否则为 0)为二元决策变量，研究满足成本最小与重要权衡值最大情况下比值最小时的 0-1 混合整数可靠性分配问题，当最小费用相同时，依据重要度大小顺序选取底层部件的设计方案。由于所建立的分配方案为非线性规划，很难直接用数值方法找到最优解，本文采用线性松弛手段把非线性规划问题转化为线性问题，提出松弛线性规划快速搜索原问题最优解的遗传算法。为验证模型和方法的有效性，最后给出了算例分析。

1 系统可靠性分配 0-1 规划决策模型

分配系统部件的可靠性指标，首先要确定系统的结构。不妨设系统由 K 个子系统构成，其中第 i 个子系统共有 n_i 个部件($i=1,2,\dots,K$)，该子系统的第 j 个部件有 m_{ij} 种工艺水平，其可靠性为 R_{ij} ($j=1,2,\dots,n$)。根据系统结构函数 φ ，系统设计的可靠性 R 满足

$$R = \varphi(R_{ij}) \geq R_0 \quad (1)$$

式中， R_0 为系统设计要求的可靠性下限。

由于同一可靠性水平可以使用不同等级材料，采用不同的系统结构与设计等工艺来满足，于是存在着顾客对部件集成的优选偏好问题^[17-18]。不妨记

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{选取子系统 } i \text{ 中部件 } j \text{ 的第 } k \text{ 种工艺} \\ 0 & \text{选取其他工艺} \end{cases} \quad (2)$$

而每个零部件最终只能设计选取一种工艺，故对每个零部件而言必然有

$$\sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} = 1 \quad (3)$$

记 R_{ijk} 表示子系统 i 中部件 j 的第 k 种工艺可靠性水平，故第 i 个子系统的第 j 个部件的可靠性可表示为

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} R_{ijk} \quad i \in \{1,2,\dots,K\} \quad j \in \{1,2,\dots,n_i\}$$

设 C_{ijk} 表示子系统 i 中部件 j 的第 k 种工艺生产成本，根据式(2)、(3)，该设计方案下产品的总生产成本为

$$T = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} x_{ijk} \quad (4)$$

不妨设 k_{ij} 为子系统 i 中部件 j 的工艺等级值， λ_{ij} 为第 i 个子系统的第 j 个部件的重要度，故重要性权值可取为

$$I_V = \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij} \lambda_{ij} \quad (5)$$

为满足顾客及生产商的各自偏好，生产商生产成本越低越好，顾客要求的重要性权值越大越好。从而根据式(4)、(5)，考虑部件重要度时，满足基本可靠性约束 R_0 ，以最低权衡值为目标的可靠性分配规划方案为 F

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} x_{ijk} / \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij} \lambda_{ij} \right] \\ \text{s.t. } & R = \varphi(R_{ij}) \geq R_0 \\ & \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 1 \quad x_{ijk} \in X \end{aligned} \quad (6)$$

$$i \in \{1,2,\dots,K\} \quad j \in \{1,2,\dots,n_i\} \quad R_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} R_{ijk}$$

$$X = \left\{ x_{ijk} \mid x_{ijk} \in \{0,1\}, \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} = 1 \right\} \quad k_{ij} \in \{1,2,\dots,m_{ij}\}$$

特殊地，若不考虑部件重要度，则以最低成本为目标的可靠性分配方案为 F_0

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} x_{ijk} \\ \text{s.t. } & R = \varphi(R_{ij}) \geq R_0 \\ & x_{ijk} \in X \end{aligned} \quad (7)$$

下面从不同系统结构分析规划方案 F 。

1.1 等效串联结构下可靠性分配方案

在工程实际中，一些结构相对简单的大系统可以等效为多个部件串联，或者多个部件并联连接形

式的结构, 这类结构往往易于工程设计管理, 也易于评价其可靠性。对于 K 个部件串联连接形式的结构, 其简易结构如图 1 所示。

图 1 串联结构简图

对应结构函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \cdots x_K$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{元件 } i \text{ 正常} \\ 0 & \text{元件 } i \text{ 失效} \end{cases} \quad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{系统正常} \\ 0 & \text{系统失效} \end{cases}$$

于是部件优选规划方案 F_1

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^K \left[\sum_{k=1}^{m_{i1}} C_{ilk} x_{ilk} / k_{i1} \lambda_{i1} \right] \\ \text{s.t. } & R = \prod_{i=1}^K R_{i1} \geq R_0 \\ & x_{ilk} \in X \\ & \sum_{i=1}^K \lambda_{i1} = 1 \quad k_{i1} \in \{1, 2, \dots, m_{i1}\} \end{aligned} \quad (8)$$

事实上, 第 i 个部件的可靠性 R_{i1} 满足 $R_{i1} \in \{R_{ilk}\}$ 且等价于 $\ln R_{i1} \in \{\ln R_{ilk}\}$ 。又由于每个零部件在生产时必须选取其中一种工艺方案, 从而对 $\forall i \in X$, $x_{i11}, x_{i12}, \dots, x_{i1m_{i1}}$ 中有且仅有一个取值为 1, 所以

$$R_{i1} = \sum_{k=1}^{m_{i1}} x_{ilk} R_{ilk}$$

等价于

$$\ln R_{i1} = \sum_{k=1}^{m_{i1}} (x_{ilk} \ln R_{ilk}) \quad i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (9)$$

根据式(8)中约束条件有

$$\prod_{i=1}^K R_{i1} \geq R_0$$

即

$$\prod_{i=1}^K \ln R_{i1} \geq \ln R_0$$

从而由式(9)有

$$\sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{m_{i1}} (x_{ilk} \ln R_{ilk}) \geq \ln R_0$$

故方案 F_1 可以转化为 0-1 整数线性规划问题

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^K \left[\sum_{k=1}^{m_{i1}} C_{ilk} x_{ilk} / k_{i1} \lambda_{i1} \right] \\ \text{s.t. } & \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{m_{i1}} (x_{ilk} \ln R_{ilk}) \geq \ln R_0 \\ & x_{ilk} \in X \end{aligned} \quad (10)$$

显然式(10)可以找到最优解 x_{ilk} , 若最低成本相同时, 按照重要度大小选取底层部件方案。

1.2 等效并联结构下可靠性分配方案

在由 n_1 个不同单元构成的系统中, 至少一个单元正常工作, 系统就可以正常工作, 这样的系统称为并联结构系统, 其简易结构如图 2 所示。

图 2 并联结构简图

该系统的结构函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{n_1} (1 - x_j)$$

于是在方案 F 中取 $K=1$, 则并联结构下部件优选规划方案为 F_2

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^{n_1} \left[\sum_{k=1}^{m_{1j}} C_{1jk} x_{1jk} / k_{1j} \lambda_{1j} \right] \\ \text{s.t. } & 1 - \prod_{j=1}^{n_1} (1 - R_{1j}) \geq R_0 \\ & x_{1jk} \in X \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1j} = 1 \quad k_{1j} \in \{1, 2, \dots, m_{1j}\}$$

对于并联结构系统, 第 j 个部件的可靠性满足 $R_{1j} \in \{R_{1jk}\}$ 且等价于 $\ln R_{1j} \in \{\ln R_{1jk}\}$ 。

同理对于每一个部件 j , 只能选取一种生产方案, 即 $x_{1j1}, x_{1j2}, \dots, x_{1jm_{1j}}$ 中有且仅有一个取值 1, 其他取值均为 0, 从而

$$R_{1j} = \sum_{k=1}^{m_{1j}} x_{1jk} R_{1jk}$$

等价于

$$\ln(1 - R_{1j}) = \sum_{k=1}^{m_{1j}} [x_{1jk} \ln(1 - R_{1jk})] \quad j \in \{1, 2, \dots, n_1\} \quad (12)$$

从而优选方案 F_2 中的可靠性约束取对数为

$$\sum_{j=1}^{n_1} \ln(1 - R_{1j}) \leq \ln(1 - R_0)$$

根据式(12)有

$$\sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k=1}^{m_{1j}} [x_{1jk} \ln(1 - R_{1jk})] \leq \ln(1 - R_0)$$

从而部件优选方案可以转化为一个等价的 0-1 整数线性规划问题

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^{n_i} \left[\sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{1jk} x_{1jk} / k_{1j} \lambda_{1j} \right] \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} [x_{1jk} \ln(1 - R_{1jk})] \leq \ln(1 - R_0) \\ & x_{1jk} \in X \end{aligned} \quad (13)$$

显然系统可靠性分配方案式(13)容易找到最优解, 若最低成本相同时, 工艺方案按照重要度大小选取。事实上, 许多大型复杂结构系统, 不能简单地划分为单一结构形式, 可以应用串联和并联原理, 将混联系统中的串联和并联部分简化成等效单元, 把一些复杂结构系统划分为串-并系统和并-串系统两种结构。

1.3 等效串-并混合结构下可靠性分配方案

在实际工程中, 有一类产品系统可以等效划分为由 K 个子系统串联构成, 且每一个子系统是由 n_i ($i=1, 2, \dots, K$) 个子单元并联构成, 简称为串-并联系统, 其简易逻辑框图如图 3 所示。

图 3 串-并联结构系统框图

该系统的结构函数

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^K \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - x_j) \right\}$$

从而根据规划方案 F , 可靠性分配方案为 F_3

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} x_{ijk} / \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij} \lambda_{ij} \right] \\ [A]: \text{ s.t. } & \prod_{i=1}^K \left[1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}) \right] \geq R_0 \\ & x_{ijk} \in X, \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad j \in \{1, 2, \dots, n_i\} \quad k_{ij} \in \{1, 2, \dots, m_{ij}\}$$

很明显, 系统可靠性分配方案 F_3 不像 F_1 和 F_2 那么简单, 它并不能通过一定的等价转换成 0-1 线性规划问题。为此, 引入对应优化方案的线性松弛, 将可靠性分配的约束条件 A 转化成一个新的线性松弛规划约束 A_0 。下面给出方案 F_3 的松弛规划 F_3^0 的松弛约束 A_0

$$[A_0]: \begin{cases} \prod_{i=1}^K \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}) \leq (1 - R_0^{1/K})^K \\ \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 1 \quad x_{ijk} \in X \end{cases} \quad (15)$$

定理 1 线性松弛约束条件 A_0 是非线性约束条件 A 的松弛, 即可靠性分配决策规划方案 F_3 中每一个可行解都是松弛规划方案 F_3^0 的可行解, 但反之不一定成立。

证明: 记 R_i 为第 i 个并联子系统的可靠性, 则

$$R_i = 1 - \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (16)$$

从而式(14)约束条件 A 可简化为

$$R = \prod_{i=1}^K R_i \geq R_0$$

由均值不等式

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K R_i \geq \left(\prod_{i=1}^K R_i \right)^{1/K} \geq R_0^{1/K}$$

有

$$1 - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K R_i \leq 1 - R_0^{1/K}$$

即

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (1 - R_i) \leq 1 - R_0^{1/K}$$

又因为

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (1 - R_i) \geq \left[\prod_{i=1}^K (1 - R_i) \right]^{1/K}$$

故有

$$\sum_{i=1}^K (1 - R_i) \leq (1 - R_0^{1/K})^K$$

即

$$\prod_{i=1}^K \prod_{j=1}^{n_i} (1 - R_{ij}) \leq (1 - R_0^{1/K})^K \quad (17)$$

产品设计的每个部件只是选取一种工艺方案, 即当 $k=1, 2, \dots, K_{ij}$, $i \in \{1, 2, \dots, K\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n_i\}$ 时有且仅有一个 x_{ijk} 取值为 1, 故

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} R_{ijk} \quad \text{且} \quad 1 - R_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} (1 - R_{ijk})$$

等价地

$$\ln(1 - R_{ij}) = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} \ln(1 - R_{ijk}) \quad (18)$$

从而根据式(18), 不等式(17)等价变形为线性约束

条件

$$\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} \ln(1 - R_{ijk}) \leq K \ln(1 - R_0^{1/K}) \quad (19)$$

故由式(17)得到规划 F_3 的松弛规划 F_3^0 , 即式(15), 该松弛规划可以转化为线性约束规划问题来处理。

由式(19)知, 松弛规划 F_3^0 可以等价转换为一个松弛的 0-1 整数线性规划问题。由于约束条件 A_0 是约束 A 的松弛, 从而规划 F_3 中每一个可行解都是规划 F_3^0 的可行解, 但反之不一定成立。

事实上, 规划 F_3^0 的松弛约束 A_0 还可以压缩, 因为对于 $\forall R_i \in [0, 1]$, 约束 $R = \prod_{i=1}^K R_i \geq R_0$ 包含条件 $R_i \geq R_0$, 等价地

$$\ln(1 - R_i) \leq \ln(1 - R_0) \quad i = 1, 2, \dots, K$$

从而根据式(16)、(18)有

$$\ln(1 - R_i) = \sum_{j=1}^{n_i} \ln(1 - R_{ij}) = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} \ln(1 - R_{ijk})$$

于是在松弛约束 A_0 中需要增加 K 个约束

$$\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} \ln(1 - R_{ijk}) \leq \ln(1 - R_0) \quad i = 1, 2, \dots, K$$

虽然该松弛可以减少算法循环次数, 但约束条件增加, 减少了每次循环的运算速度。

1.4 等效并-串混合结构下可靠性分配方案

事实上, 一些复杂工程系统也可以等效视作由 K 个子系统并联, 而每个子系统由等效的 n_i 个单元串联而成, 即为并-串联结构系统, 其简易逻辑结构框图可表述为图 4 所示。

图4 并-串联结构系统框图

该并-串联结构系统的结构函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^K \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{n_i} x_j \right\}$$

从而根据规划方案 F , 分配决策方案为 F_4

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{m_{ij}} C_{ijk} x_{ijk} / \sum_{j=1}^{n_i} k_{ij} \lambda_{ij} \right] \\ [B]: \quad \text{s.t.} & \prod_{i=1}^K \left(1 - \prod_{j=1}^{n_i} R_{ij} \right) \leq 1 - R_0 \\ & \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 1, x_{ijk} \in X \\ & i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad j \in \{1, 2, \dots, n_i\} \quad k_{ij} \in \{1, 2, \dots, m_{ij}\} \end{aligned} \quad (20)$$

由上述部件优选规划方案 F_4 的约束条件 B 的形式知, 该约束条件不能等价转化为线性约束问题。若想快速找到 0-1 非线性整数规划 F_4 问题的最优解, 需要寻找线性松弛等算法。下面引入对应方案的松弛规划 F_4^0 的约束条件 B_0

$$[B_0]: \begin{cases} a^{I_i \theta} \prod_{j=1}^{n_i} R_{ij} \geq 1 - (1 - R_0)^{1/K} \\ \sum_{i=1}^K I_i \leq K - 1, I_i \in \{0, 1\} \\ \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} = 1 \quad x_{ijk} \in X \end{cases} \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, K \quad a > 1 \quad \theta > 0$$

定理2 线性松弛约束条件 B_0 是非线性约束条件 B 的松弛, 即可靠性分配决策规划方案 F_4 中每一个可行解都是松弛规划方案 F_4^0 的可行解, 但反之不一定成立。

证明: 下证规划 F_4^0 的约束条件 B_0 为线性约束。对约束条件 B_0 两边取对数有

$$\theta I_i \ln a + \sum_{j=1}^{n_i} \ln R_{ij} \geq \ln [1 - (1 - R_0)^{1/K}]$$

由部件设计方案选取的唯一性知

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} R_{ijk}$$

等价于

$$\ln R_{ij} = \sum_{k=1}^{m_{ij}} x_{ijk} \ln R_{ijk}$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, K \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

由于条件 $\sum_{i=1}^K I_i \leq K - 1, I_i \in \{0, 1\}$, 从而至少有一个 $I_i = 0$ 。从而根据式(21)的第一个约束条件, 记串联子系统的可靠性

$$R_i = \prod_{j=1}^{n_i} R_{ij}$$

则至少有一个 $i \in \{1, 2, \dots, K\}$, 使得

$$R_i \geq 1 - (1 - R_0)^{1/K} \quad (22)$$

由 $0 < a^{I_i \theta} \leq 1$ 知, B_0 包含条件式(22)。

考虑方案 F_4 中约束条件 B , 其简化为

$$\prod_{i=1}^K (1 - R_i) \leq 1 - R_0 \quad (23)$$

则式(23)意味着至少有一个 $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 使得 $R_i > 1 - (1 - R_0)^{1/K}$ 。若不然, 假设式(23)成立且对任

意 $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 都有 $R_i < 1 - (1 - R_0)^{1/K}$, 即

$$(1 - R_i)^K > 1 - R_0 \quad (24)$$

从而由不等式(23)及(24)有

$$\prod_{i=1}^K (1 - R_i) < (1 - R_l)^K \quad l = 1, 2, \dots, K \quad (25)$$

将式(25)中 K 个不等式对应相乘, 则

$$\left[\prod_{i=1}^K (1 - R_i) \right]^K < (1 - R_1)^K (1 - R_2)^K \dots (1 - R_K)^K =$$

$$\left[(1 - R_1)(1 - R_2) \dots (1 - R_K) \right]^K =$$

$$\left[\prod_{i=1}^K (1 - R_i) \right]^K$$

从而导致矛盾, 即不等式(23)意味着至少存在一个 $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 使得

$$R_i > 1 - (1 - R_0)^{1/K}$$

故若决策方案 F_4 的约束条件 B 成立, 则至少有一个 $i \in \{1, 2, \dots, K\}$ 使得 B_0 成立, 即 F_4 的可行域中每一个可行解必然是线性松弛方案 F_4^0 的可行解。

2 最优决策解的遗传算法流程

由于新的规划约束 A_0 / B_0 为线性约束, 自然希望通过求解 F_3^0 / F_4^0 来寻找规划 F_3 / F_4 的最优解, 下面给出一个松弛规划求解思路。

设 x_{ijk}^* 是规划 F_3^0 / F_4^0 的一个最优解, 记 $I^* = \{(i, j, k) | x_{ijk}^* = 1\}$, 则有

$$\sum_{(i,j,k) \in I^*} x_{ijk} = \|I^*\|$$

若最优解 x_{ijk}^* 不满足约束条件 A/B , 即不是规划 F_3 / F_4 的可行解, 则该最优解不满足控制条件

$$\sum_{(i,j,k) \in I^*} x_{ijk} = \|I^*\| - 1$$

从而从规划 F_3^0 / F_4^0 中划去该最优解并不影响寻找原规划 F_3 / F_4 的最优方案。根据约束 A/B 的线性松弛结论知, 属于规划 F_3^0 / F_4^0 的可行解而不属于规划 F_3 / F_4 的可行解个数是有限的, 而每次迭代除去一个解, 故该算法只需要循环有限次便能够找到 A/B 的最优解。

下面给出由求解松弛规划 A_0 / B_0 来获得规划 A/B 的最优解的流程图(图 5)。

针对本文提出的松弛规划 A/B 算法流程图, 采用遗传算法对混合型 0-1 整数松弛规划方案进行编码和寻优计算。图 6 为规划 F_3^0 / F_4^0 的遗传算法流程,

图 5 松弛规划 A/B 算法流程图

具体地, 下面给出遗传算法程序及流程图相关说明。

(1) 程序模式共两种: 第一种为是否考虑部件重要度, 通过控制变量 opt1 进行选择, 其中 1 表示考虑重要度, 0 表示不考虑重要度; 第二种为对应可靠性水平下是否均有设计, 因为实际加工工艺限制某些可靠性水平下的部件无法加工, 通过控制变量 opt2 进行选择, 其中 1 表示每个工艺水平下均有设计, 0 表示部分可以设计。

(2) 生成的初始种群采用实数编码(数字 1~4), 最终输出结果为一组 1~4 数字的组合。不满足约束条件的个体, 对其相应的成本目标函数自定义一极大值 9 999.00。

图 6 规划 F_3^0 / F_4^0 的可行解遗传算法流程图

(3) 考虑部件重要度时, 在初始种群时对初始种群进行了修正, 在之后变异的过程中, 对变异程序进行了修正, 以便可以直接变异出具有一定重要度表征的种群。

(4) 结束条件为是否进行到最大遗传代数。

为验证算法的有效与可行性, 下面给出串-并和并-串两类混联系统的算例分析。

3 算例分析

假定产品要求的基本可靠度为 $R_0 = 0.99$, 该产品由 4 个子系统 I、II、III、IV, 以及每个子系统由 5 个部件组成, 每个部件在加工时可达到最多 4 个等级的可靠性水平, 且同一部件的加工成本随着可靠性递增, 具体数据如表 1~4 所示。

下面对应表格中空格划“—”处为对应部件的工艺缺失, 假设表中数据来自并-串与串-并结构产品系统, 其对应离散数据值为“部件重要度-可靠性水平等级-设计成本”。

表 1 子系统 I 的成本-可靠性数据($i=1$)

部件 j (重要度 λ_{1j})	工艺 k (可靠性水平 R_{ijk})			
	1	2	3	4
1(0.10)	63.45	180.65	—	411.15
2(0.45)	119.75	—	319.45	550.25
3(0.05)	88.85	291.75	379.15	531.35
4(0.15)	107.41	148.85	218.75	550.55
5(0.25)	121.55	177.36	379.85	—

表 2 子系统 II 的成本-可靠性数据($i=2$)

部件 j (重要度 λ_{2j})	工艺 k (可靠性水平 R_{ijk})			
	1	2	3	4
1(0.15)	101.25	132.15	286.67	—
2(0.15)	94.76	185.35	268.35	441.45
3(0.20)	126.65	148.68	—	371.15
4(0.30)	105.95	139.95	244.65	314.55
5(0.20)	138.65	160.25	221.15	—

表 3 子系统 III 的成本-可靠性数据($i=3$)

部件 j (重要度 λ_{3j})	工艺 k (可靠性水平 R_{ijk})			
	1	2	3	4
1(0.05)	93.45	117.45	—	525.35
2(0.20)	108.25	190.75	382.85	—
3(0.10)	101.75	189.15	374.15	562.45
4(0.05)	75.15	94.35	351.25	—
5(0.60)	90.45	181.85	329.35	668.85

表 4 子系统 IV 的成本-可靠性数据($i=4$)

部件 j (重要度 λ_{4j})	工艺 k (可靠性水平 R_{ijk})			
	1	2	3	4
1(0.10)	77.67	90.35	129.79	491.25
2(0.10)	52.15	—	394.15	—
3(0.50)	89.15	168.65	261.95	422.85
4(0.20)	123.95	279.25	—	412.36
5(0.10)	79.65	90.35	130.75	457.92

以下为不同等级可靠性水平下遗传曲线及优选规划 F_3/F_4 设计方案。

(1) 若数据来自等效串-并产品结构系统, 且每个部件可达到 (0.60, 0.70, 0.80, 0.90) 4 个等级的可靠性水平。根据式(15)、算法流程图 5、6 及数据表

1~4, 有无考虑部件重要度时, 最优成本值随遗传代数变化的遗传曲线如图 7、8 所示。

图 7 考虑部件重要度串-并松弛规划遗传曲线变化图

图 8 不考虑部件重要度串-并松弛规划遗传曲线变化图

从图 7 观察到, 通过松弛规划算法, 应用 Matlab 实现了最优解的遗传算法, 考虑重要度时, 经过 100 余代遗传得到规划 F_3 的稳定最优解。而不考虑重要度时, 从图 8 可知, 约经过 80 余代遗传便能找到最优解。

由遗传曲线图知, 应用 Matlab 实现了有无部件重要度下, 部分工艺缺失时最优解的遗传算法, 得到串-并系统规划 F_3 的稳定最优解, 即底层部件工艺优选方案 k 分别如表 5、6 所示。

表 5 考虑重要度串-并系统部件优选方案

子系统 i (编号)	部件编号 j				
	1	2	3	4	5
I(1)	1	3	1	2	2
II(2)	2	1	2	3	2
III(3)	2	2	2	2	3
IV(4)	2	1	3	1	2

表 6 不考虑部件重要度串-并系统部件优选方案

子系统 i (编号)	部件编号 j				
	1	2	3	4	5
I(1)	1	3	1	2	2
II(2)	1	1	1	4	1
III(3)	2	2	2	2	3
IV(4)	2	1	3	1	2

由表 5 中工艺优选方案，得到考虑部件重要性权衡值时，设计的产品系统可靠性水平为 0.990 493 5，此时部件制造成本为 2 971.35 个单位。而由表 6 中不考虑重要度时，工艺选择得到的整机设计系统可靠性水平为 0.990 096 5，此时部件制造成本为 2 966.12 个单位。

从算法结果知，不考虑重要度时的可靠性水平与制造成本均略低于考虑重要度的情况。根据表 5 与表 6 知，子系统 II 的优选方案有一定差异。若记有无重要性时权衡值分别为 I_{V1} 、 I_{V2} ，则由式(5)知， $I_{V1} = 2.15 > I_{V2} = 1.60$ ，即考虑重要度时顾客对购买产品的所得效用高于不考虑重要度的工艺设计情况，但总的成本值比不考虑重要度时多 5.32 个单位，与工程实际情况相符。

(2) 若数据来自等效并-串产品结构，且每个部件可达到(0.80, 0.90, 0.95, 0.99) 4 个等级的可靠性水平。根据式(20)，对应最优成本值随遗传代数变化的遗传曲线如图 9、10 所示。

图 9 考虑部件重要度并-串松弛规划遗传曲线变化图

从图 9 观察到，约经过 250 代遗传，最优解处于稳定状态，而从图 10 可知，不考虑重要度时约经过 180 代遗传便能够找到最优解。

图 10 不考虑部件重要度并-串松弛规划遗传曲线变化图

从而在并-串结构形式的系统下，通过遗传算法得到的基本要求可靠度的最优分配方案如表 7、8

所示。

由表 7 中工艺优选方案，得到考虑部件重要性权衡值时，设计的产品系统可靠性水平为 0.991 620 2，此时部件制造成本为 4 636.38 个单位。而由表 8 中不考虑重要度时，工艺选择得到的整机设计系统可靠性水平为 0.990 182 2，此时部件制造成本为 4 606.75 个单位。

表 7 考虑部件重要度并-串系统部件优选方案

子系统 <i>i</i> (编号)	部件编号 <i>j</i>				
	1	2	3	4	5
I(1)	2	4	1	2	2
II(2)	3	3	4	4	3
III(3)	2	2	2	2	3
IV(4)	3	1	4	4	2

表 8 不考虑部件重要度并-串系统部件优选方案

子系统(编号)	部件编号 <i>j</i>				
	1	2	3	4	5
I(1)	2	4	1	3	3
II(2)	2	3	4	4	3
III(3)	2	2	2	2	2
IV(4)	3	1	4	4	2

若记该并-串结构产品有无考虑重要性时的权衡值分别为 I_{VY} 、 I_{VN} ，则根据式(5)有

$$I_{VY} = 12.35 > I_{VN} = 12.00$$

即不考虑重要性时权衡值较低，且所耗成本比考虑重要度时少 29.63 个单位。

从表 5~8 中运算结果知，不管是串-并还是并-串结构形式系统，考虑部件重要性，可靠性分配后重要性权衡值均比不考虑时低，而且所耗成本也高些，主要原因是考虑重要度时，只需要满足最低可靠度 0.99 且成本达到最低时为最优，而考虑重要度时，不仅要满足最低可靠度而且要考虑重要度的权衡值。由遗传曲线图 7~10 可以观察到，随着遗传代数的增加，成本值逐渐降低，最终保持在某一恒定水平，表明遗传算法收敛于最优解，基于线性松弛规划，实现了利用遗传算法对系统部件进行优选的功能。

4 结论

针对产品的系统结构，基于“重要度-可靠性-成本”离散数据，考虑部件的重要性与成本权衡，达到指定的可靠性要求，对不同工艺元件进行选取管理，将产品要求的可靠性合理分配到子系统或部件具有一定的实际意义和有效性。

(1) 对于等效单一结构系统的非线性规划问题，可以等价转换成 0-1 整数线性规划问题。对于

等效混合结构系统的非线性分配问题,找到一种新的松弛规划,将原始约束条件适当放松,非线性的系统可靠性分配方案可以转化成 0-1 整数线性松弛规划问题来处理。

(2) 混合结构产品的原始规划方案的算法流程及松弛规划方案的遗传算法,能有效地将基本可靠性按照重要性与成本权衡方式分配至底层零部件。

(3) 通过算例分析知,虽然考虑重要性时所耗费成本比不考虑重要性时略高,但获得的重要性权衡效用值与整机可靠性都要高,对工艺设计具有实际指导意义。

参 考 文 献

- [1] FUGATE D L, HERNANDEZ E I, GREENBELT M D. A reliability allocation method for combination serial-parallel systems[C]//Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1992: 432-435.
- [2] KUO W, WAN R. Recent advances in optimal reliability allocation[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans, 2007, 37(2): 143-156.
- [3] KUO W, PRASAD V R, TILLMAN F A, et al. Optimal reliability design: Fundamentals and applications[M]. Cambridge: United Kingdom University Press, 2001.
- [4] LANIADO H, LILLO R E. Allocation policies of redundancies in two-parallel-series and two-series-parallel systems[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2014(63): 223-239.
- [5] SUBBA R V M, MILIND D, JAYANT R. Optimal reliability allocation with discrete cost-reliability data for components[J]. Operations Research, 1999, 47(6): 899-906.
- [6] WANG Y Q, RICHARD C M Y, ZUO M J, et al. A comprehensive reliability allocation method for design of CNC lathes[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2001, 72(3): 247-252.
- [7] 赵燕伟, 黄凤立, 张国贤. 基于模糊机会约束规划的可靠性优化设计[J]. 机械工程学报, 2005, 41(5): 89-93.
ZHAO Yanwei, HUANG Fengli, ZHANG Guoxian. Study on the problem of product reliability based on chance constrained programming[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(5): 89-93.
- [8] KYUNGMEER O K, YANG Y J, ZUO M J. A new reliability allocation weight for reducing the occurrence of severe failure effects[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 117: 81-88.
- [9] ELEBEDE A O C, CHU C B, ADJALLAH K H, et al. Reliability allocation through cost minimization[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2003, 52(1): 106-111.
- [10] YALAOUI A, CHU C, CHATELET E. Reliability allocation problem in a series-parallel system[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2005, 90(1): 55-61.
- [11] COIT D, SMITH A E. Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm[J]. IEEE Transaction on Reliability, 1996, 45(2): 254-260.
- [12] KUMAR R J, KAZUHIRO I, MASATAKA Y, et al. Multi-objective hierarchical genetic algorithms for multilevel redundancy allocation optimization[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2009, 94(4): 891-904.
- [13] JOSE E R M, DAVID W C. A heuristic for solving the redundancy allocation problem for multi-state series-parallel systems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2004, 83(3): 341-349.
- [14] SALAZAR D, ROCCO C M, GALVAN B J. Optimization of constrained multiple objective reliability problems using evolutionary algorithms[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2006, 91: 1057-1070.
- [15] JOSE E R M, CLAUDIO M R. Evolutionary optimization technique for multi-state two-terminal reliability allocation in multi-objective problems[J]. IIE Transactions, 2010, 42(8): 539-552.
- [16] KAVEH K D, ABTAHI A R, MADJID T. A new multi-objective particle swarm optimization method for solving reliability redundancy allocation problems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 111: 58-75.
- [17] 沈厚才, 徐进, 庞湛. 损失规避偏好下的定制件采购决策分析[J]. 管理科学学报, 2004, 7(6): 37-45.
SHEN Houcai, XU Jin, PANG Zhan. Decision analysis for order-specific component procurement with loss-averse utility[J]. Journal of Management Sciences in China, 2004, 7(6): 37-45.
- [18] 刘德顺, 黄良沛, 岳文辉, 等. 面向维护的系统可靠性模拟与设计优化[J]. 机械工程学报, 2009, 22(4): 594-601.
LIU Deshun, HUANG Liangpei, YUE Wenhui, et al. Simulation of system reliability and design optimization for maintenance oriented[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009, 22(4): 594-601.

作者简介: 张永进, 男, 1976 年出生, 博士研究生, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机械可靠性设计。

E-mail: zyjgtj@ahut.edu.cn

孙有朝(通信作者), 男, 1965 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为可靠性维修性安全性工程与管理、航空安全适航技术以及虚拟维修性设计验证等。

E-mail: sunyc@nuaa.edu.cn