

DOI: 10.3901/JME.2022.12.130

# 含索段连接器和金属反射丝网的索网形态分析\*

杜雪林<sup>1</sup> 葛东明<sup>2</sup> 杜敬利<sup>1</sup>

(1. 西安电子科技大学电子装备结构设计教育部重点实验室 西安 710071;

2. 北京空间飞行器总体设计部 北京 100094)

**摘要:** 在现有可展开天线索网形态分析的研究中,往往不计金属反射丝网的影响,且忽略了索段连接器,将其简化为节点进行处理。实际上,索网结构由索段和索段连接器组成,索网结构上还铺设金属反射丝网,因此索网结构的形态分析中应考虑反射网和索段连接器所带来的影响。基于四元数来描述索段连接器的姿态,引入各向等应力薄膜单元,推导了索段连接器中心的力平衡方程和力矩平衡方程,建立考虑索段连接器的索膜结构形态优化模型。分别对考虑索段连接器和不考虑索段连接器的索膜结构进行形态分析,讨论索段连接器对分析结果的影响。最后,建立了索膜结构的有限元模型,对形态分析的结果进行验证。结果表明,建立的形态优化模型能够进一步提高所设计索膜结构的型面精度。

**关键字:** 索网; 索段连接器; 薄膜; 形态分析

**中图分类号:** V443

## Form-state analysis of Cable Net with Cable Segment Connector and Wire Mesh Reflector

DU Xuelin<sup>1</sup> GE Dongming<sup>2</sup> DU Jingli<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design of Ministry of Education,

Xidian University, Xi'an 710071;

2 Beijing Institute of Spacecraft System Engineering, Beijing 100094)

**Abstract:** In the current research on the form-state analysis of the deployable antenna cable net, the influence of the metal reflective wire net was often ignored, and the cable segment connector was ignored, which was simplified as a node for processing. The cable net structure of deployable antenna is composed of cable segment and cable segment connector, and the front cable net is covered with wire reflective net, so the influence of reflective net and cable segment connector should be considered in the form-state analysis of cable net structure. Based on quaternion to describe the attitude of cable segment connector, introducing the membrane element with equal stress in all directions, the force balance equation and moment balance equation of cable segment connector center are derived, and then the shape optimization model of cable membrane structure considering cable segment connector is established. The cable membrane structures with and without cable segment connectors are analyzed, and the influence of cable segment connectors on the analysis results is discussed. Finally, the finite element model of cable membrane structure is established, and the results of form-state analysis are verified. The results show that the established form-state optimization model can further improve the surface accuracy of the designed cable-membrane structure.

**Key words:** cable net; cable segment connector; thin membrane; form-state analysis

## 0 前言

由于现代卫星技术的不断发展,对天线的高频

段、高增益及大口径提出了越来越高的要求<sup>[1-5]</sup>。比如为了提高天线的增益和数据传输速率,中继卫星的频段选在 Ku 段,天线增益要求不小于 50 dB,因此天线的口径需要增大至 5 m<sup>[3]</sup>。由于现有火箭整流罩尺寸与发射费用的限制,要求星载天线不仅轻且收拢体积要小,故大口径星载天线必须做成可展开的形式,即发射时收拢于火箭整流罩内,入轨后自

\* 国家自然科学基金资助项目(51675398)。20210922 收到初稿,20220128 收到修改稿

动展开到位。网状反射面天线是目前最理想的大型卫星天线的形式之一, 其采用周边桁架展开结构和柔性网面构成, 结构形式简单, 在一定范围内增大天线的口径而不改变结构形式, 质量也不会随之成比例的增加, 天线的口径更是可以达到  $6 \sim 150 \text{ m}^{[3-4]}$ 。网状反射面天线由可展开桁架、金属反射丝网和索网结构组成<sup>[6-8]</sup>, 如图 1 所示, 其中索网结构挂接在外部桁架上。满足天线工作状态的情形应当是, 其内部索段都张紧后, 达到平衡状态且使前索网保持特定的抛物面型面。丝网反射面附于前索网背部, 完成电波的反射任务。

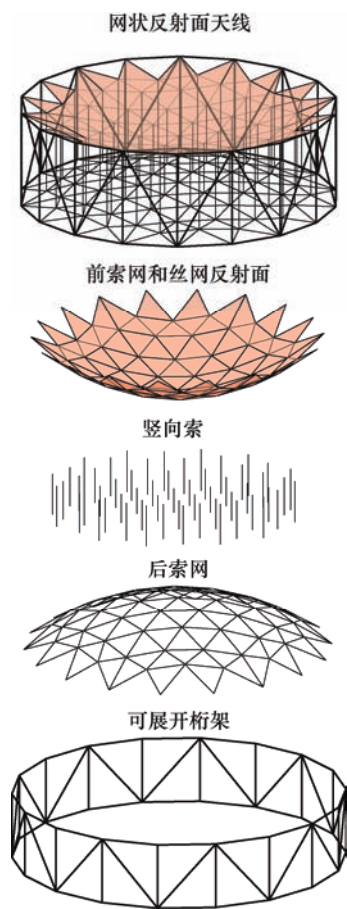


图 1 网状反射面天线的结构图

天线反射面的型面精度非常依赖于索网结构的几何构型, 索网结构同刚性结构有着很大的不同, 这是因为组成索网的索段本身不具有刚度和形状, 当索段本身被施加预张力后, 索网才能获得作为承载体系所需的刚度和形状。目前, 就纯索网结构的形态分析方法已经趋于成熟, 常见的方法<sup>[9]</sup>如力密度法<sup>[10]</sup>、动力松弛法<sup>[11]</sup>、平衡矩阵法<sup>[12]</sup>等, 基于这些方法, 可以对索网的“形”和“态”进行优化, 借以提高天线的设计精度。而实际上, 金属反射丝网可看作一类薄膜结构, 该膜结构的预应力状态会影响结构的受力性能, 膜内应力最终会传递到索网索段

之上, 因此在型面分析过程之中忽略膜的刚度贡献是不尽合理的。

天线上的丝网反射面柔性大, 抗弯刚度小, 常被等效为膜结构进行处理。反射面结构需要依靠膜内力和边界约束来抵抗荷载作用, 因此寻找满足平衡条件的膜面形状和相应的预应力分布, 是天线找形分析中关心的重要问题。等应力状态是膜结构的各种应力分布形式中的一种重要分布方式。这是因为等应力分布使得结构各处受力均匀, 且该状态下平衡形状具有最小表面积的特性。基于等应力状态分布, 已有不少学者对薄膜结构或索膜结构进行形态分析方面的工作<sup>[13-14]</sup>。

在以往的索网形态分析研究中, 往往忽略了索段连接器的尺寸, 将其简化为节点。MITSUGI<sup>[15]</sup>指出, 索段连接器的尺寸对网面精度的影响不应被忽略, 因为索段连接器的尺寸往往是网面精度的十倍以上(C 频段的天线要求形面精度不高于  $1 \text{ mm}$ )。索段连接器的姿态和尺寸均会对天线的形态分析带来影响, 使索网偏离原来的平衡状态, 因此应该在形态分析中, 予以考虑。为了对索段连接器的姿态进行描述, 需要借助描述刚体姿态的四元数表示。与传统的欧拉角相比, 四元数对姿态转动的描述更简洁, 并且四元数方程是线性微分方程, 具有速度快、精度高及不会出现奇异的优点<sup>[16]</sup>。

本文基于四元数法, 考虑索段连接器的尺寸和姿态, 结合等应力膜单元模型, 建立了索膜结构形态分析模型。随后, 分别在考虑索段连接器和不考虑索段连接器的情形下, 对索膜结构模型进行形态优化。通过对考虑索段连接器和不考虑索段连接器的结果的对比研究, 分析了索段连接器的存在对形态分析结果的影响。最后, 将不考虑索段连接器的结果在有限元软件 ANSYS 中建模分析, 验证了结果的正确性。

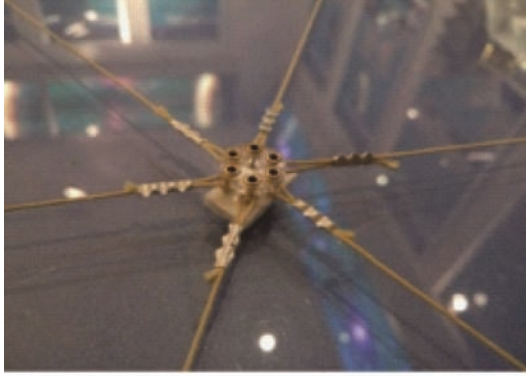
## 1 索膜结构中索网和薄膜的平衡方程

### 1.1 考虑索段连接器的索网结构平衡方程

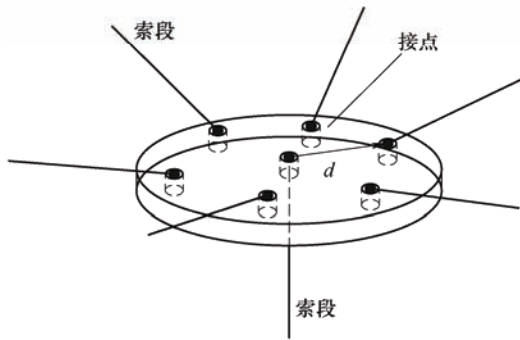
索网中的索段经由索段连接器首尾连接, 最后形成特定的网状结构, 如图 2 所示, 为索段连接器的实物图和示意图。在进行索网的找形分析时, 研究者常常习惯将索段连接器简化为一节点, 即索段都连接在该节点上。而本文将索段连接器看作刚体, 各索段连接在该刚体的边缘位置上, 刚体的位置和姿态决定了索段连接端点的位置。

对索网进行型面分析时, 传统的方法基于节点

位置进行型面精度的计算和索段张力的配置。索段连接器的尺寸达厘米级,而对丝网反射面的网面精度要求往往在亚毫米级,因此将索段连接器简化为节点可能会导致设计结果不够理想。索段连接器如图 2b 所示,连接器上的接点和连接器的中心点的距离为  $d$ ,大小往往在 5 mm 以上,对分析结果影响较大。



(a) 实物图



(b) 示意图

图 2 索段连接器实物图

可将索段连接器视为刚体,引入四元数<sup>[15-16]</sup>确定索段连接器的空间姿态,从而对索段连接器接点的位置进行准确的描述。如图 3 所示,索段连接器  $i$  和  $j$  的中心点位置分别为  $\mathbf{x}_i$  和  $\mathbf{x}_j$ ,连接器上的接点  $a$  和  $b$  的位置为  $\mathbf{X}_{i,a}$  和  $\mathbf{X}_{j,b}$  (本文中,  $a=1,2,\dots,6$ ,  $b=1,2,\dots,6$ )。

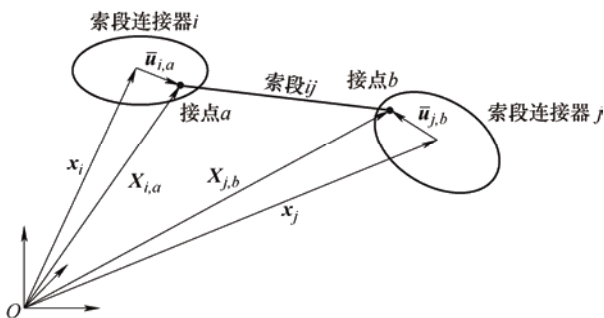


图 3 索段的连接方式

索段在连接器上的接点位置  $\mathbf{X}_{i,a}$ ,可以由中心点位置  $\mathbf{x}_i$ ,对应的四元数  $\mathbf{p}_i=(\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^T$  组成的方向余弦矩阵  $\mathbf{A}_i$  和接点在自身刚体坐标系上的位置矢量  $\bar{\mathbf{u}}_{i,a}$  进行表示

$$\mathbf{X}_{i,a} = \mathbf{x}_i + \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{u}}_{i,a} \quad (1)$$

假设索段  $ij$  的张力为  $T_{ij}$ ,则索段作用在点  $a$  上的力矢量写作

$$\mathbf{T}_{ij} = \frac{\mathbf{X}_{i,a} - \mathbf{X}_{j,b}}{l_{ij}^c} T_{ij} \quad (2)$$

式中,  $l_{ij}^c = \sqrt{(\mathbf{X}_{i,a} - \mathbf{X}_{j,b})^T (\mathbf{X}_{i,a} - \mathbf{X}_{j,b})}$ ,  $l_{ij}^c$  为索段  $ij$  的长度。

作用在索段连接器  $i$  接点  $a$  上的张力矢量  $\mathbf{T}_{ij}$  可被等效为作用在连接器  $i$  中心的主矢  $\mathbf{T}_{ij}^*$  和主矩  $\mathbf{M}_{ij}$ ,即

$$\mathbf{T}_{ij}^* = \mathbf{T}_{ij} \quad (3)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{u}}_{i,a} \times \mathbf{T}_{ij} = \tilde{\mathbf{n}}_{i,a} \mathbf{T}_{ij} \quad (4)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{n}}_{i,a}$  为斜对称矩阵,且  $\mathbf{n}_{i,a} = \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{u}}_{i,a}$ 。

索段连接器  $i$  和连接器  $j$  通过索段  $ij$  连接起来,连接器  $i$  处的平衡方程写作

$$\sum_{j \in N_i^c} \frac{T_{ij}}{l_{ij}^c} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j + \mathbf{n}_{i,a} - \mathbf{n}_{j,b}) = \mathbf{F}_i \quad (5)$$

$$\sum_{j \in N_i^c} \frac{T_{ij}}{l_{ij}^c} \tilde{\mathbf{n}}_{i,a} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j + \mathbf{n}_{i,a} - \mathbf{n}_{j,b}) = \mathbf{M}_i \quad (6)$$

式中,  $N_i^c$  为与索段连接器  $i$  相连接的其他索段连接器的集合,  $\mathbf{F}_i$  为节点  $i$  处的外力矢量,  $\mathbf{M}_i$  为节点  $i$  处的外力矩。

实际上正交转换矩阵  $\mathbf{A}_i$  又可以表示为

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{H}_{i,a} \mathbf{L}_{i,a}^T \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{H}_{i,a}$  和  $\mathbf{L}_{i,a}$  为  $3 \times 4$  的矩阵,形式为

$$\mathbf{H}_{i,a} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = (-\lambda_u \quad \tilde{\lambda}_u + \lambda_0 \mathbf{I}) \quad (8)$$

$$\mathbf{L}_{i,a} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} = (-\lambda_u \quad -\tilde{\lambda}_u + \lambda_0 \mathbf{I}) \quad (9)$$

式中,  $\lambda_u = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^T$ 。

因此,变量  $\mathbf{n}_{i,a}$  又可以写作

$$\mathbf{n}_{i,a} = \mathbf{H}_{i,a} \mathbf{L}_{i,a}^T \bar{\mathbf{u}}_{i,a} = \mathbf{H}_{i,a} \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_u^T \\ -\tilde{\lambda}_u^T + \lambda_0 \mathbf{I} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{i,a} = \mathbf{H}_{i,a} \begin{pmatrix} -\lambda_u^T \bar{\mathbf{u}}_{i,a} \\ -\tilde{\lambda}_u^T \bar{\mathbf{u}}_{i,a} + \lambda_0 \mathbf{I} \bar{\mathbf{u}}_{i,a} \end{pmatrix} \quad (10)$$

由于  $\tilde{\lambda}_u^T = -\tilde{\lambda}_u$  和  $\tilde{\lambda}_u \bar{\mathbf{u}}_{i,a} = -\tilde{\bar{\mathbf{u}}}_{i,a} \lambda_u$ , 则有

$$\mathbf{n}_{i,a} = \mathbf{H}_{i,a} \begin{pmatrix} -\lambda_u^T \bar{\mathbf{u}}_{i,a} \\ \tilde{\lambda}_u \bar{\mathbf{u}}_{i,a} + \lambda_0 \mathbf{I} \bar{\mathbf{u}}_{i,a} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{i,a} \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\mathbf{u}}_{i,a}^T \\ \bar{\mathbf{u}}_{i,a} & -\tilde{\bar{\mathbf{u}}}_{i,a} \end{pmatrix} \mathbf{p}_i = \mathbf{H}_{i,a} \mathbf{O}_{i,a} \mathbf{p}_i \quad (11)$$

$$\text{式中, } \mathbf{O}_{i,a} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{\mathbf{u}}_{i,a}^T \\ \bar{\mathbf{u}}_{i,a} & -\tilde{\bar{\mathbf{u}}}_{i,a} \end{pmatrix}.$$

当所有的索段连接器的中心位置不变, 但是索段连接器的姿态不确定时, 对于整个索网的所有索段连接器, 可以写出总的平衡方程为

$$\{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C})\} \mathbf{x} + \{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C}_0)\} \mathbf{O} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\mathbf{N}_p^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{Q}_q \mathbf{C}) \mathbf{x} + \mathbf{N}_p^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{Q}_q \mathbf{C}_0) \mathbf{O} \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_f^T \quad \mathbf{x}_g^T)^T$ , 连接器的中心的位置矢量为  $\mathbf{x}_f$ , 约束节点的位置矢量为  $\mathbf{x}_g$ ;  $\mathbf{C}$  为  $m \times n$  阶的结构拓扑矩阵,  $m$  为索单元的数目,  $n$  为索网节点数目, 依据自由节点和约束节点的位置矢量, 可将拓扑矩阵  $\mathbf{C}$  分割为  $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_f \quad \mathbf{C}_g)$ ;  $\mathbf{C}_0$  为  $m \times 6n_f$  阶的结构拓扑矩阵, 其中  $n_f$  为自由节点的数目;  $\mathbf{N}_p$  为  $3m \times 3n_f$  阶的结构矩阵;  $\mathbf{Q}_q = \langle T_{ij} / l_{ij}^c \rangle$  为索单元张力和长度比值的对角阵,  $\langle \bullet \rangle$  为组成对角矩阵;  $\mathbf{O} = \text{diag} (\mathbf{H}_1 \mathbf{O}_1 \quad \mathbf{H}_2 \mathbf{O}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{H}_{n_f} \mathbf{O}_{n_f})$ , 其中  $\mathbf{H}_i \mathbf{O}_i = (\mathbf{O}_{i,1}^T \mathbf{H}_{i,1}^T \quad \mathbf{O}_{i,2}^T \mathbf{H}_{i,2}^T \quad \cdots \quad \mathbf{O}_{i,6}^T \mathbf{H}_{i,6}^T)^T$ ;  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵;  $\mathbf{p}$  为索段连接器的四元数集合。

当不考虑索段连接器的尺寸和姿态时, 式(12)退化为我们熟悉的力密度方程的形式

$$\{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C})\} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (14)$$

为便于理解, 将  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{C}_0$  和  $\mathbf{N}_p$  的矩阵形式进一步说明, 如索段  $k$  分别连接在索段连接器  $i$  和  $j$  的接点  $a$  和  $b$  上, 则有

$$\mathbf{C}(k, p) = \begin{cases} 1 & p = i \\ -1 & p = j \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_0(k, 6(p-1) + q) = \begin{cases} 1 & p = i \quad q = a \\ -1 & p = j \quad q = b \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}_p(3k-2:3k, 3p-2:3p) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{n}}_{i,a}^T & p = i \\ -\tilde{\mathbf{n}}_{j,b}^T & p = j \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{n}}_{i,a}$  和  $\tilde{\mathbf{n}}_{j,b}$  中的  $a$  和  $b$  的值取决于索段在索段连接器上的接点位置。

## 1.2 薄膜结构的平衡方程

实际上, 丝网反射面是依据索网的网格形状进行裁剪并缝制到前索网上的, 因此采用前索网的网格将薄膜划分为众多三角形单元<sup>[17]</sup>, 任取一三角形单元, 如图 4 所示。设膜面各个方向的应力均为  $\sigma$ , 即等应力分布状态<sup>[14]</sup>, 并且膜面厚度为  $t$ , 三条边的边长为  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$ , 和三条边对应的内角为  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$  和  $\alpha_3$ , 三条边上的线拉力为  $T_1$ 、 $T_2$  和  $T_3$ 。现以节点 1 为例, 建立平衡方程为

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & 1 \\ 1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sigma t \sin \alpha_1 \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

求解得

$$T_3 = \frac{1}{2} \sigma t \frac{(L_2 - L_3 \cos \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{1}{2} \sigma t \frac{L_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1} \quad (19)$$

由正弦定理, 式(19)可进一步简化作

$$T_3 = \frac{1}{2} \sigma t \frac{L_3 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3} = \frac{\sigma t L_3}{2 \tan \alpha_3} \quad (20)$$

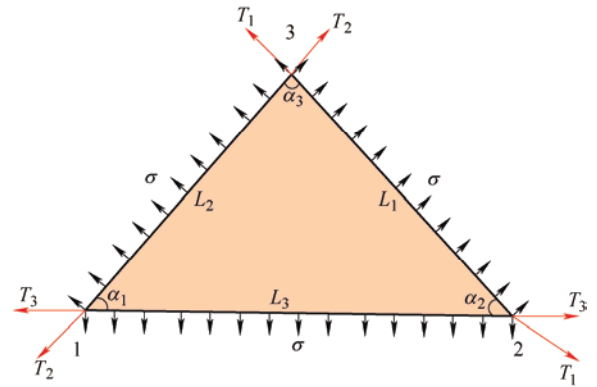


图 4 三角形膜单元

同理, 三角形单元上的线拉力可写作

$$T_i = \frac{\sigma t L_i}{2 \tan \alpha_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (21)$$

取三角形斜边的力密度为  $q_i = T_i / l_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), 假设单元处于平衡状态, 定义三个顶点处的外力矢量分别为  $\mathbf{F}_1$ 、 $\mathbf{F}_2$  和  $\mathbf{F}_3$ , 则有

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(q_2 + q_3) \mathbf{I} & q_3 \mathbf{I} & q_2 \mathbf{I} \\ q_3 \mathbf{I} & -(q_1 + q_3) \mathbf{I} & q_1 \mathbf{I} \\ q_2 \mathbf{I} & q_1 \mathbf{I} & -(q_1 + q_2) \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$



式(22)为三角形膜单元的力密度方程, 将单元力密度矩阵装配成全局力密度矩阵, 得到

$$\mathbf{G}\mathbf{x}_u = \mathbf{F}_m \quad (23)$$

式中,  $\mathbf{G}$  为全局力密度矩阵,  $\mathbf{F}_m$  为外力矢量,  $\mathbf{x}_u \in \mathbf{x}$  为前索网的节点位置矢量。

## 2 索膜优化模型的建立

将整个反射面按照前索网的网格划分为若干三角形膜单元, 进行分析。各三角形单元的顶点位于索段连接器的中心, 如图 5 所示。由于三角形膜单元的顶点位于连接器的中心, 因此三角形单元的顶点坐标不受连接器的姿态调整的影响。已由式(23)可知反射面的平衡方程, 现将式(23)代入式(12), 即可得到索膜结构的总的力平衡方程

$$\{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C}) + \mathbf{G}_e\} \mathbf{x} + \{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C}_0)\} \mathbf{Op} = \mathbf{0} \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{G}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_d \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_d$  为后索网节点的位置矢量。

又因为膜单元三个顶点位于索段连接器的中心, 从而不会对连接器的转动产生影响。

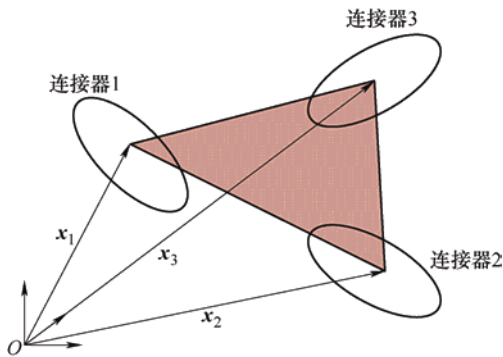


图 5 三角形膜单元顶点位置

最后对应式(24)和(13), 改写成如下的简约形式

$$\mathbf{B}_t \mathbf{x} + \mathbf{B}_n \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\mathbf{D}_t \mathbf{x} + \mathbf{D}_n \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_t = \{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C}) + \mathbf{G}_e\} \quad \mathbf{D}_t = \mathbf{N}_p^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{Q}_q \mathbf{C})$$

$$\mathbf{B}_n = \{\mathbf{I} \otimes (\mathbf{C}_f^T \mathbf{Q}_q \mathbf{C}_0)\} \mathbf{O} \quad \mathbf{D}_n = \mathbf{N}_p^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{Q}_q \mathbf{C}_0) \mathbf{O}$$

现考虑索段连接器, 对索膜结构进行形态分析。将索膜结构边界固定在刚性桁架上, 预先设计好索网上各个索段连接器的中心位置, 但允许索段连接器围绕其中心转动。以索段的张力、索段连接器姿

态的四元数为设计变量, 建立索膜结构的优化模型。在索膜结构的优化过程中, 需要保证如下的原则,

(1) 为了防止索网内的索段出现松弛或者变形过大, 约束索段张力的取值范围

$$[T]_{\min} \leq T_{ij} \leq [T]_{\max} \quad (27)$$

式中,  $[T]_{\min}$  和  $[T]_{\max}$  分别为索段允许的最小和最大张力值。

(2) 为了保证在复杂的热环境中, 索网形态的稳定, 需要保证索网内索段张力的均匀性。假设前索网、后索网和竖向索的张力均值分别为  $T_{k1}$ 、 $T_{k2}$  和  $T_{k3}$ , 且前索网、后索网和竖向索的索段数目分别为  $n_{cu}$ 、 $n_{cl}$  和  $n_{cv}$ , 则

$$\psi = \sqrt{\frac{\sum_{ij=1}^{n_{cu}} (T_{ij} - T_{k1})^2 + \sum_{ij=1}^{n_{cl}} (T_{ij} - T_{k2})^2 + \sum_{ij=1}^{n_{cv}} (T_{ij} - T_{k3})^2}{n_{cu} + n_{cl} + n_{cv}}} \quad (28)$$

综合上述条件, 假设薄膜离散的三角形薄膜单元膜内应力为  $\sigma$ , 索网的一组张力矢量为  $\mathbf{T}$ , 索段连接器的四元数集合为  $\mathbf{p}$ , 建立如下优化模型

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{T}, \mathbf{p} \\ & \min \quad \psi \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{B}_t \mathbf{x} + \mathbf{B}_n \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_t \mathbf{x} + \mathbf{D}_n \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i - 1 = 0 \\ [T]_{\min} \leq T_{ij} \leq [T]_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

当我们不考虑索段连接器的尺寸, 而将索段连接器简化为一个节点时, 可以得到简化的索膜结构优化模型为

$$\begin{aligned} & \text{find } \mathbf{T} \\ & \min \quad \psi \\ & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{B}_t \mathbf{x} = \mathbf{F} \\ [T]_{\min} \leq T_{ij} \leq [T]_{\max} \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

上述优化模型属于有约束的最优化问题, 可基于信赖域法、有效集法、内点法和序列二次规划等进行求解。

## 3 算例分析

本文以 3 m 口径可展开天线为例, 进行优化计算, 如图 1 所示, 索网由 415 根索段和 146 个节点组成, 其中竖向索段 55 根, 前索网或后索网上的节点数目和索段数目分别为 73 和 180。采用前后不对

称的索网结构，具体的设计参数如表 1 所示。

表 1 索网组成部件的设计参数

参数名	索网部分
材料	芳纶
弹性模量/GPa	24
泊松比	0.3
密度/(kg/m <sup>3</sup> )	1 685
半径/mm	0.5
前网面焦距/m	2.812 5
后网面焦距/m	5.625
垂跨比 <sup>[18]</sup>	0.1

薄膜铺设在前网面上，薄膜材料的厚度为 0.025 mm，弹性模量为 2.10 GPa，泊松比为 0.3，整个薄膜反射面由 108 个三角形单元组成。

为方便讨论，取 1/6 索膜结构进行讨论，如图 6 所示，其中括号前数字为前索网索段编号，括号内数字为后索网索段编号，圆圈内数字为竖向索索段编号，薄膜三角形中心处带下划线数字为膜单元的编号。

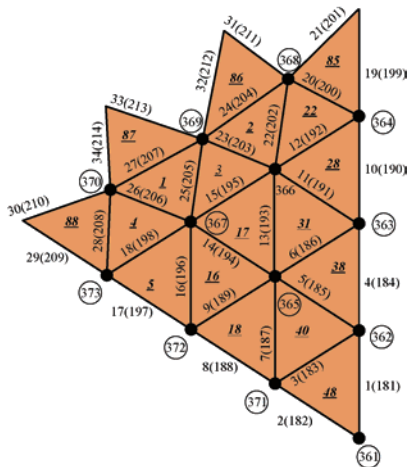


图 6 1/6 索膜结构拓扑图

索网的自由节点处为一直径 15 mm 的索段连接器，索段连接器的边缘对称分布有六个接点，用以固定索段。基于式(29)和(30)，在分别考虑索段连接器和不考虑索段连接器的情形下，进行索膜结构的形态优化分析，选取索力的上限为 150 N，下限为 1 N。

天线在轨时，反射面需要承受横向加速度，因此在对网面应力进行设置时，应确保反射面表面不会出现松弛和褶皱。在以往的研究中，通常网格应力为 0.05~0.1 MPa<sup>[19]</sup>，本例中取三角形单元的应力  $\sigma=0.1$  MPa。

求解时，由于求解非线性方程的效率具有较强的初值敏感性，因此四元数的初值是由索段连接器中心点所在抛物面的法线方向转化而来，将求得的索段的张力和不考虑连接器时的索段张力进行对比，见图 7。经观察得知，当分析模型中不考虑索段连接器和考虑索段连接器时，索段张力的分布基本一致。这说明索段连接器的存在并没有破坏原有索段张力分布的均匀性，也就是说，索网的结构拓扑受到当前连接器姿态的影响是有限的。

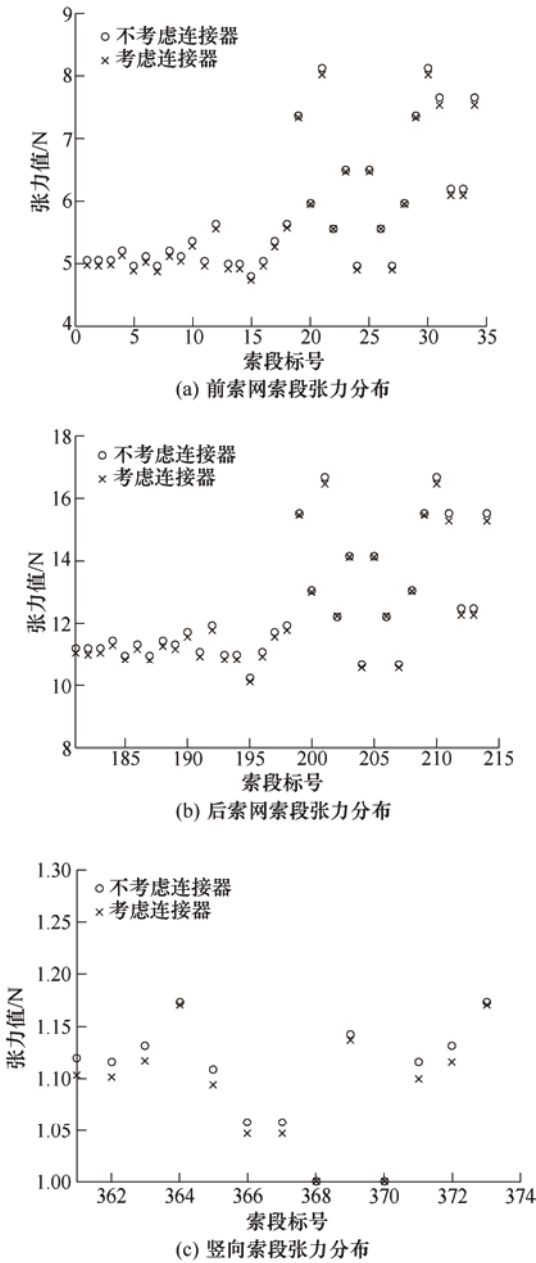


图 7 1/6 索膜结构索段的张力分布

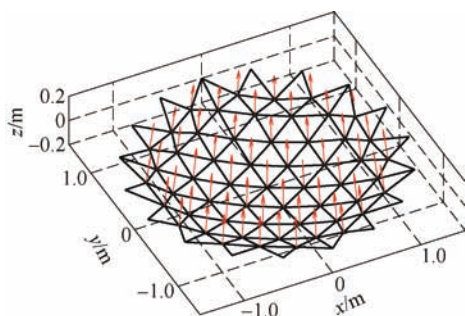
索网中的索段连接在索段连接器的接点之上，因此考虑索段连接器和不考虑索段连接器时，索段的长度是不同的，部分索段的长度列于表 2。经过分析发现，索网边缘与桁架连接的索段，如 19、21、

29、30~34 等, 索段长度的差值为 0.007 3~0.007 5 m, 而其他内部的索段长度的差值为 0.014 6~0.015 m, 即相当于半个或一个索段连接器的直径长度。前文中已经证实, 索段连接器的存在并没有对索段的张力和索网的拓扑造成明显的影响, 而考虑索段连接器和不考虑索段连接器时, 索段的长度发生了明显的改变。

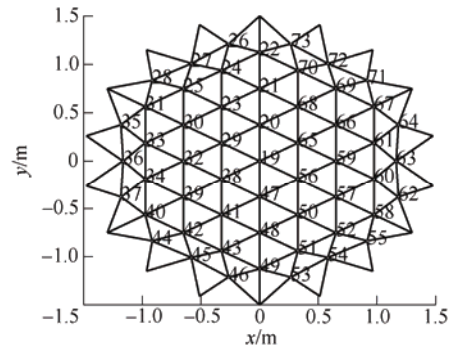
表 2 考虑索段连接器和不考虑索段连接器时的索段长度

索段	无连接器索段长度/m	有连接器索段长度/m	差值/m	索段	无连接器索段长度/m	有连接器索段长度/m	差值/m
1	0.375 2	0.360 2	0.015 0	18	0.375 8	0.360 8	0.015 0
2	0.375 2	0.360 2	0.015 0	19	0.385 1	0.377 6	0.007 5
3	0.375 0	0.360 0	0.015 0	20	0.280 6	0.265 8	0.014 8
4	0.376 9	0.361 9	0.015 0	21	0.395 8	0.388 5	0.007 3
5	0.375 8	0.360 8	0.015 0	22	0.286 3	0.271 7	0.014 6
6	0.375 2	0.360 2	0.015 0	23	0.269 2	0.254 6	0.014 6
7	0.375 8	0.360 8	0.015 0	24	0.377 7	0.362 7	0.015 0
8	0.376 9	0.361 9	0.015 0	25	0.269 2	0.254 6	0.014 6
9	0.375 2	0.360 2	0.015 0	26	0.286 3	0.271 7	0.014 6
10	0.380 2	0.365 2	0.015 0	27	0.377 7	0.362 7	0.015 0
11	0.376 9	0.361 9	0.015 0	28	0.280 6	0.265 8	0.014 8
12	0.375 8	0.360 8	0.015 0	29	0.385 1	0.377 6	0.007 5
13	0.378 3	0.363 3	0.015 0	30	0.395 8	0.388 5	0.007 3
14	0.378 3	0.363 3	0.015 0	31	0.322 4	0.315 1	0.007 3
15	0.375 0	0.360 0	0.015 0	32	0.414 6	0.407 2	0.007 4
16	0.376 9	0.361 9	0.015 0	33	0.414 6	0.407 2	0.007 4
17	0.380 2	0.365 2	0.015 0	34	0.322 4	0.315 1	0.007 3

接下来对索段连接器的姿态进行分析, 为了能够形象地表达索段连接器的姿态, 在图 8a 中给出了前索网索段连接器的法向矢量。可以观察到索段连接器的姿态和抛物面贴合紧密, 所有索段连接器的位置基本关于圆心对称。



(a) 前索网索段连接器法向矢量



(b) 前索网索段连接器的编号

图 8 前索网索段连接器

虽然索段连接器的法向矢量图能够形象地观察到前索网各连接器的法线指向, 但如若要详细地讨论比较索段连接器的姿态, 则需要给出具体的矢量坐标, 为此首先在图 8b 中给出了前网面上的索段连接器的标号。随机分别选取两条主轴上的标号为 19、47、48、49 和 19、56、57、58, 以及内部 50、51、53、54 的连接器, 这些连接器的法向矢量列与表 3 中。

表 3 部分索段连接器的法向矢量

连接器的编号	本例的分析结果			连接器中心点处抛物面法向矢量		
	X	Y	Z	X	Y	Z
19	-0.000 0	-0.000 0	1.000 0	0.000 0	0.000 0	1.000 0
47	-0.000 0	0.066 5	0.997 8	0.000 0	0.066 5	0.997 8
48	0.000 0	0.132 2	0.991 2	0.000 0	0.132 2	0.991 2
49	-0.000 0	0.199 0	0.980 0	0.000 0	0.196 1	0.980 6
50	-0.057 4	0.099 4	0.993 4	-0.057 4	0.099 3	0.993 4
51	-0.054 8	0.163 0	0.985 1	-0.056 9	0.164 1	0.984 8
53	-0.043 5	0.207 3	0.977 3	-0.046 0	0.210 6	0.976 5
54	-0.105 0	0.181 9	0.977 7	-0.101 4	0.175 6	0.979 2
56	-0.057 6	0.033 3	0.997 8	-0.057 6	0.033 3	0.997 8
57	-0.114 5	0.066 1	0.991 2	-0.114 5	0.066 1	0.991 2
58	-0.172 3	0.099 5	0.980 0	-0.169 8	0.098 1	0.980 6

经过对表 3 中索段连接器法向矢量的分析和比较, 可以得知, 从沿主轴线方向的索段连接器矢量(如 19、47、48、49 和 19、56、57、58)来看, 经过优化分析得到的索段连接器空间姿态合理, 能够较好的贴合抛物反射面的形状。比如, 连接器 19 法向始终和  $z$  轴平行, 连接器 47、48 和 49 的法向矢量在  $x$  轴的分量始终为零。索段连接器的法向矢量和连接器中心处抛物面法向矢量基本一致, 仅存在部分连接器姿态的微小调整。

将索段连接器看作节点时, 天线的型面误差均方根 RMS 是基于这些节点的轴向误差计算而来的



$$\Delta z_i = z_i - (x_i^2 + y_i^2) / 4f, \text{ 即 } \text{RMS} = \left( \sum_{i=1}^{n_e} \Delta z_i^2 / n_e \right)^{1/2}.$$

式中,  $\mathbf{x}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$ ,  $f$  和  $n_e$  为前索网焦距和自由节点数目。而实际上考虑索段连接器的尺寸和姿态时, RMS 的计算应当基于索段连接器上的接点进行计算。经过计算可知, 考虑索段连接器情况下, 索网的型面误差 RMS 为 0.019 0 mm, 能够满足天线工作态的精度要求。

为了对结果的正确性进行验证, 最后, 取不考虑索段连接器时的优化结果, 将薄膜转化的线张力作为前索网中相应索段的附加张力, 结合获得的索网的预张力, 在 ANSYS 中建立周边固定的索网结构有限元模型, 如图 9 所示。利用 Link10 单元来模拟索网中各个索段, 施加预张力后进行求解。

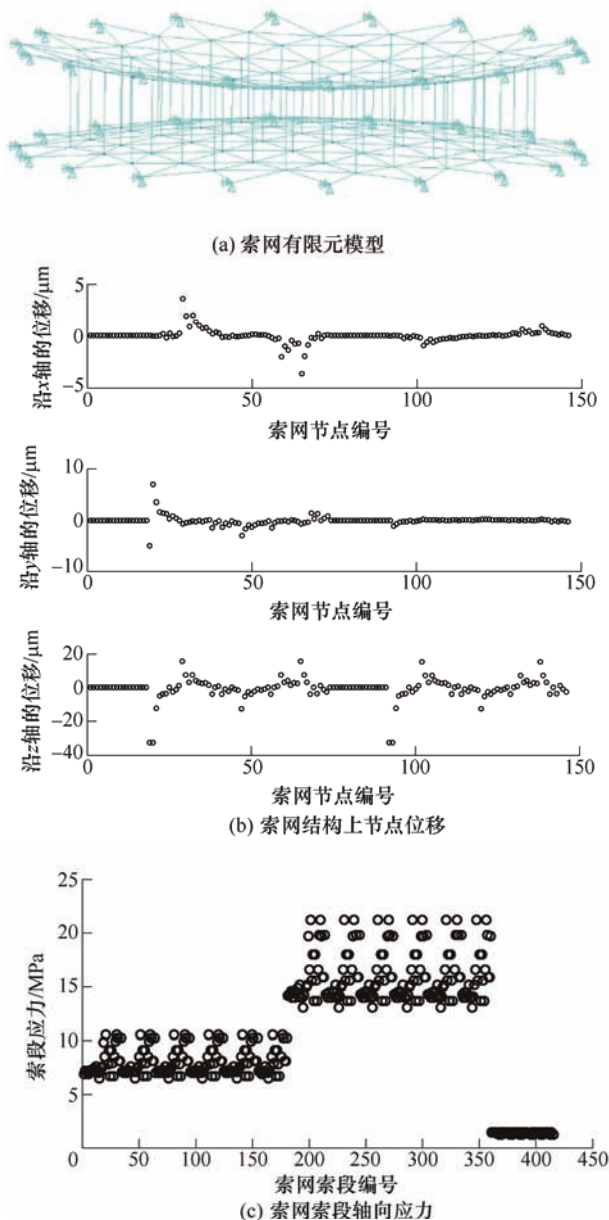


图9 索网结构有限元模型

在有限元模型中, 将薄膜转化的线张力施加于索段之后, 对索段的弹性模量进行相应的调整。当索段未被张紧时, 膜内的应力恰好为零, 而索膜结构平衡时, 膜内的应力和索段的张力为获得的优化量。在索膜结构的变形过程中, 平衡状态时满足最小势能原理, 因此, 可以认为变形过程中膜单元能够维持等应力的状态, 索膜结构的变形满足线性弹性关系。可将膜单元近似看做三个索单元构成的网格, 假设所有相关膜单元转化到三个边上的线张力合力为  $T_{c1}$ ,  $T_{c2}$  和  $T_{c3}$ , 与膜单元连接的三个索网索段的张力为  $T_{c1}$ ,  $T_{c2}$  和  $T_{c3}$ , 索段的弹性模量为  $E_c$ 。此时, 索段的弹性模量应为考虑索段和薄膜之后的等效弹性模量, 如

$$E_{n1} = E_c \left( 1 + \frac{T_{c1}}{T_{c1}} \right) \quad (31)$$

类似地, 将所有前索网索段弹性模量更新为等效弹性模量, 即可考虑薄膜的影响, 进行索网结构的变形分析。对静力学分析后的结果进行分析, 索网上所有节点的位移和所有索段的轴向应力分别如图 9b 和 9c 所示。

由于 ANSYS 的分析结果用于对本文结果进行验证, 首要关心的是节点是否偏离设计位置和应力是否均匀。比较节点沿坐标轴方向的位移, 可以发现整个索网结构内部的位移较小, 最大值沿  $z$  轴方向约为  $-3.8 \times 10^{-5} \text{ m}$ , 变形量在合理的范围之内。从索网的轴向应力云图分析来看, 轴向应力的取值范围为 1.29~21.5 MPa, 折算为索段的轴向张力为 1.023~17.057 N, 索段张力分布均匀, 因此本文索膜结构的型面优化分析方法可行, 求解结果也是可信的。

## 4 结论

本文考虑了索段连接器的姿态和薄膜的应力影响, 建立了索网结构的形态分析模型。分别就考虑索段连接器和不考虑索段连接器情形下, 对索网结构进行了形态分析, 通过相应的算例, 验证了方法的准确性, 并得到如下结论。

(1) 与传统的索膜分析方法比较而言, 考虑索段连接器的形态分析方法未对索网张力的分布造成明显的影响, 但是部分索段长度的偏差不可忽略。也就是说, 当不考虑索段连接器进行索网设计并裁剪索段时, 会因为裁剪长度误差导致制作索网的精度下降。

(2) 将膜单元的应力转化为相应索段的线张



力,在天线的形态设计阶段,可以合理的配置反射面内应力和索段预紧力,以获得高精度的索膜结构。此外,本文方法还可以灵活扩展,通过引入非各向等应力膜单元的节点平衡方程,以相同的方式建立索膜结构的平衡方程。

文中没有考虑周边桁架的变形所导致的边界条件变化,而讨论边界节点变化对索段连接器姿态和索膜结构的褶皱和松弛的影响,进一步优化设计精度,是一个值得进一步研究的问题。

## 参 考 文 献

- [1] MIKULAS M M, THOMSON M. Flight-vehicle materials, structures, and dynamics: Assessment and future directions, Vol. 1: New and projected aeronautical and space systems, design concepts, and loads[M]. New York: ASME, 1994.
- [2] 段宝岩. 大型空间可展开天线的研究现状与发展趋势[J]. 电子机械工程, 2017, 33(1): 1-14.  
DUAN Baoyan. The state-of-the-art and development trend of large space-borne deployable antenna[J]. Electro-Mechanical Engineering, 2017, 33(1): 1-14.
- [3] 刘明治, 高桂芳. 空间可展开天线结构研究进展[J]. 宇航学报, 2003, 24(1): 83-88.  
LIU Mingzhi, GAO Guifang. Advances in the study on structure for space deployable antenna[J]. Journal of Astronautics, 2003, 24(1): 83-88.
- [4] 刘荣强, 田大可, 邓宗全. 空间可展开天线结构的研究现状与展望[J]. 机械设计, 2010, 27(9): 1-10.  
LIU Rongqiang, TIAN Dake, DENG Zongquan. Research actuality and prospect of structure for space deployable antenna[J]. Journal of Machine Design, 2010, 27(9): 1-10.
- [5] WANG Yan, DENG Zongquan, LIU Rongqiang, et al. Topology structure synthesis and analysis of spatial pyramid deployable truss structures for satellite SAR antenna[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(4): 683-692.
- [6] 杨东武, 保宏. 非对称索网抛物面天线力平衡特性及预拉力设计[J]. 机械工程学报, 2009(8): 314-318.  
YANG Dongwu, BAO Hong. Force balance characteristics and pretension design of asymmetric cable net parabolic antenna[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2009(8): 314-318.
- [7] 杜雪林, 杜敬利, 保宏, 等. 考虑桁架柔性的可展开天线动力学分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(7): 119-126.  
DU Xuelin, DU Jingli, BAO Hong, et al. Dynamic analysis of deployable antennas considering truss flexibility[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(7): 119-126.
- [8] SUN Yuantao, WANG Sanmin, JAMES K. et al. Kinematics and dynamics of deployable structures with scissor-like-elements based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2014, 27(4): 655-662.
- [9] Veenendaal D, Block P. An overview and comparison of structural form finding methods for general networks[J]. International Journal of Solids & Structures, 2012, 49(26): 3741-3753.
- [10] 杨癸庚, 杨东武, 杜敬利, 等. 一种基于力密度的网状可展开天线索网结构初始形态设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(11): 34-41.  
YANG Guigeng, YANG Dongwu, DU Jingli, et al. Method for deployable mesh antenna cable network structures' form-finding design based on force density[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(11): 34-41.
- [11] 毛国栋, 孙炳楠, 唐志山. 控制网格变形的动力松弛法膜结构找形分析[J]. 浙江大学学报, 2004, 38(5): 598-602.  
MAO Guodong, SUN Bingnan, TANG Zhishan. Form-finding of membrane structures by dynamic relaxation controlling mesh distortion[J]. Journal of Zhejiang University, 2004, 38(5): 598-602.
- [12] 尤国强, 张杰. 可展开天线中索网结构的形态分析与设计[J]. 工程力学, 2012, 29(11): 306-312.  
YOU Guoqiang, ZHANG Jie. Struceural analysis and design for cablenet of deployable antenna[J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(11): 306-312.
- [13] 易发安, 胡加珠, 岳艳芳. 索网和膜结构的最小曲面分析[J]. 工程力学, 2004(4): 172-176.  
YI Faan, HU Jiazhu, YUE Yanfang. The mininal surface analysis of cable nets and fabric structures[J]. Engineering Mechanics, 2004(4): 172-176.
- [14] YE Jihong, FENG Ruoqiang, ZHOU Shulu, et al. The modified force-density method for form-finding of membrane structures[J]. chinese journal of applied mechanics, 2012, 12(3): 299-310.
- [15] MITSUGI J. Static analysis of cable networks and their supporting structures[J]. Computers & Structures, 1994, 51(1): 47-56.
- [16] SHERIF K, NACHBAGAUER K, STEINER W. On the rotational equations of motion in rigid body dynamics when using Euler parameters[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(1-2): 343-352.

- [17] ZHANG Yiqun, ZHANG Hang, YANG Dongwu, et al. Form-finding design of cable-mesh deployable reflector antennas considering wire mesh properties[J]. AIAA Journal, 2019, 57(4): 1-15.
- [18] TIBERT A G, PELLEGRINO S. Deployable tensegrity reflectors for small satellites[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2002, 39(5): 701-709.
- [19] SÉBASTIEN M, MAURIN B, JÉRÔME Q, et al. Numerical form-finding of geotensoid tension truss for

mesh reflector[J]. Acta Astronautica, 2012, 76(4): 154-163.

---

作者简介：杜雪林，男，1984 年出生，博士，讲师。主要研究方向可展开天线。

E-mail: xldu\_1@stu.xidian.edu.cn

杜敬利(通信作者)，男，1977 年出生，博士，教授，博士研究生导师。主要研究方向机器人技术，可展开天线。

E-mail: jldu@mail.xidian.edu.cn