

DOI: 10.3901/JME.2022.14.241

# 基于能量密度等效和三维尺寸的 I 型裂纹试样 弹塑性问题的半解析求解\*

肖怀荣 蔡力勋 于思淼 包 陈  
(西南交通大学力学与工程学院 成都 610031)

**摘要:** I 型裂纹是工程中最常见也是最主要的裂纹类型, 半个世纪以来, 弹塑性断裂力学多是基于平面的 I 型裂纹问题展开的。然而, 对于含有限尺寸三维约束的断裂力学 I 型裂纹问题, 具有解析表征的三维 I 型裂纹试样的  $J$  积分求解至今仍然是难题。基于能量密度等效方法, 针对具有三维尺寸的 I 型裂纹试样, 分别提出了用于描述载荷- $J$  积分关系和载荷-位移关系的半解析模型, 模型的 7 个理论常数可以由有限元分析简单获得。针对 6 种 I 型裂纹试样进行了三维有限元分析, 结果表明, 新模型对不同材料、不同构形、不同尺寸的受载试样预测的载荷- $J$  积分曲线和载荷-位移曲线与有限元分析结果密切吻合, 之间的比较优度均超过 0.94。新模型可用于发展包括小试样试验的断裂性能非传统试验方法。

**关键词:** I 型裂纹;  $J$  积分; 能量密度等效; 延性材料; 解析模型

**中图分类号:** O346

## Semi-analytical Elastoplastic Solutions for Mode-I-Crack Specimens Based on Energy Density Equivalence and Three-dimensional Sizes

XIAO Huairong CAI Lixun YU Simiao BAO Chen  
(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

**Abstract:** Mode-I-crack is the main type of cracks in engineering structure components. In the last half century, elastoplastic fracture mechanics mainly focused on plane problem of mode-I-crack. However, for three-dimensional specimens of the ductile materials with mode-I-crack, it is still very difficult to obtain analytical expressions for the  $J$ -integral. Based on the energy density equivalence, for mode-I-crack specimens with three-dimensional sizes of ductile materials, two novel semi-analytical models are proposed to describe the load vs.  $J$ -integral relation and load vs. displacement relation, respectively, and the seven theoretical constants of the two model can be simply determined by three-dimensional elastoplastic finite element analysis (FEA). Three-dimensional finite element analysis for six types of mode-I-crack specimens with different materials and different dimensional sizes were carried out. It shows that the results predicted by the novel models for the load vs.  $J$ -integral curves and load vs. displacement curves of different types of the specimens with different materials and different sizes are closely consistent with those from FEA, and the fit goodness between the curves predicted by the model and those from FEA are greater than 0.94. The new model can be used to develop fracture performance test methods of non-traditional specimen.

**Key words:** mode-I-crack;  $J$ -integral; energy density equivalence; ductile materials; analytical model

## 0 前言

材料断裂韧性( $K_{IC}$ 、 $J_{IC}$ )是压力容器、管道等承

压设备安全评价的重要指标, 目前针对金属材料的断裂韧性测试主要立足于应力强度因子理论、Griffith 能量理论<sup>[1]</sup>为基础的线弹性断裂力学和以  $J$  积分为基础的弹塑性断裂力学。在实际工程中, 当材料发生较大或不可忽略的塑性变形时, 须采用临界  $J$  积分来表征含裂纹材料启裂破坏的断裂韧性。

1968 年, RICE<sup>[2-3]</sup>引入  $J$  积分来度量裂纹尖端

\* 国家自然科学基金资助项目(12072294)。20210116 收到初稿, 20210925 收到修改稿

区域应力应变场的强度。假定有一个带裂纹的均质板在外力作用下产生裂尖应力应变场, 围绕裂纹尖点按逆时针方向做一闭合路径, 沿此路径可以定义  $J$  积分

$$J = -\frac{\partial U}{B\partial a} \quad (1)$$

式中,  $U$  为应变能,  $B$  为厚度,  $a$  为裂纹长度。

1971 年, BEGLEY 等<sup>[4]</sup>指出:  $J$  积分可以作为含裂纹材料的弹塑性断裂失效判据。1981 年, 美国电力研究院提出了  $J$  积分工程估算的 EPRI 方法<sup>[5-7]</sup>, 其中, 与试样尺寸、载荷、材料纯塑性幂律本构关系参数相关的  $J$  积分方程并非由解析意义下的显式函数构成,  $J$  积分的计算要靠一系列的复杂表格进行插值计算实现。1981 年, 中国制定了国际上首个以  $J$  积分为基础的断裂韧性试验方法国家标准<sup>[8-9]</sup>, 1991 年、2014 年, 分别参考 ASTM E1820 标准<sup>[10]</sup>和 ISO 12135 标准<sup>[11]</sup>并结合我国的独立研究<sup>[12-15]</sup>提出了 GB2038—1991 金属材料延性断裂韧性  $J_{IC}$  试验方法<sup>[16]</sup>和 GB/T 21143—2014 金属材料准静态断裂韧度的统一试验方法<sup>[17]</sup>, 这些测试方法被广泛应用于工程实践, 并取得了突出的成效。即便如此, 现行标准中的  $J$  积分多适合于平面应变断裂问题, 三维有限尺寸弹塑性 I 型裂纹问题的  $J$  积分理论表征少有涉及, 通常为经验公式且计算繁冗, 针对不同裂纹试样的  $J$  积分计算难以具有普适性。

$J$  积分的理论表征难度很大, 国际上至今未有类似于应力强度因子手册的  $J$  积分手册,  $J$  积分的相关计算也大多基于 EPRI 方法及国标中所推荐的方法<sup>[18-23]</sup>。当  $J$  积分的三维理论表征出现困难时, 人们借助弹塑性有限元分析方法和数字图像相关技术来测算  $J$  积分<sup>[24-27]</sup>。特别是, 仅依靠有限元分析的方法或由此得到的类似于 EPRI 方法的繁杂表格计算阻碍了三维断裂问题的延性材料断裂韧性测试和安全评价进程, 因此, 建立三维尺寸下弹塑性断裂问题的统一理论表征十分必要。

2016 年, CHEN 等<sup>[28-30]</sup>引入材料代表性体积单元(Representative volume element, RVE)提出了用于表征受载试样基本参数及几何尺寸之间半解析关系的能量密度中值等效原理。2018 年, 贺屹等<sup>[31]</sup>、PENG 等<sup>[32-33]</sup>继而建立了求解 I 型裂纹试样  $J$  积分的半解析方法, 其中, 文献[31-33]的方法本质上属于平面问题, 未考虑载荷-位移、载荷- $J$  积分关系的三维约束效应, 不便于包括小试样的非传统试验方法采用, 也不便于小试样到大试样试验结果之间的等效分析。

本文基于能量密度等效原理, 建立适用于不同尺寸、不同三维约束的 I 型裂纹试样的载荷- $J$  积分、载荷-位移的半解析统一模型。

## 1 I 型裂纹试样应变能

假定材料连续均匀、各向同性且应变率无关, 其等效应力应变关系可用 Ramberg-Osgood 律描述

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{e-eq} + \varepsilon_{p-eq} = \frac{\sigma_{eq}}{E} + \left( \frac{\sigma_{eq}}{K} \right)^N \quad (2)$$

式中,  $E$ 、 $K$ 、 $N$  分别为弹性模量、应变强化系数和应力强化指数,  $\sigma_{eq}$ 、 $\varepsilon_{eq}$ 、 $\varepsilon_{e-eq}$  和  $\varepsilon_{p-eq}$  分别为总应力、总应变、等效弹性应变和等效塑性应变。

根据积分中值定理, 受单向加载的任意试样有效变形区域内存在一个能量密度中值点  $M$ <sup>[28]</sup>, 使试样总应变能可以表示为

$$U = u_M V_{eff} \quad (3)$$

式中,  $u_M$  为  $M$  点材料 RVE 的应变能密度,  $V_{eff}$  为受载试样有效变形域的体积。根据 Mises 等效原理, 对于受载试样能量密度中值点  $M$  的材料 RVE, 有

$$u_M = \int_0^{\varepsilon_{ij-M}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{eq-M}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \quad (4)$$

式中,  $\sigma_{ij}$  和  $\varepsilon_{ij}$  分别为复杂应力状态下任一点 RVE 的应力张量和应变张量,  $\varepsilon_{ij-M}$  和  $\varepsilon_{eq-M}$  分别为特定变形状态下  $M$  点 RVE 的应变张量和等效应变。

由式(3)和式(4), 可以得到受载试样应变能的解析表达式

$$U = V_{eff} \int_0^{\varepsilon_{eq-M}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \quad (5)$$

对于不同几何构型的试样, 其无量纲有效变形体积和无量纲位移之间存在良好的幂律关系<sup>[5-7]</sup>, 则 I 型裂纹试样的无量纲有效变形域体积可以表示为

$$\frac{V_{eff}}{V^*} = k_1 \left( \frac{h}{h^*} \right)^{k_2} \quad (6)$$

式中,  $V^*$  为试样有效变形域特征体积且有  $V^* = A^* h^*$ ,  $h^*$  为特征位移且  $h^* = W$ ,  $k_1$  及  $k_2$  为待定参数, 可由少量有限元计算获得。

受载试样有限变形域体积与几何尺寸相关, 为使模型适用于不同三维尺寸并满足量纲原理, 假定

$$V^* = W^2 B \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{m_1} \left( \frac{B}{W} \right)^{m_2} \quad (7)$$

式中,  $m_1$  及  $m_2$  为待定参数, 可由少量有限元计算获得。则受载试样的应变能  $U$  可以表示为

$$\begin{cases} U = V^* k_1 \left( \frac{h}{h^*} \right)^{k_2} \int_0^{\varepsilon_{eq-M}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \\ V^* = W^2 B \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{m_1} \left( \frac{B}{W} \right)^{m_2} \end{cases} \quad (8)$$

在弹塑性条件下, 受单向加载的 I 型裂纹试样总应变能  $U$  可以表示为纯弹性变形时的应变能  $U_e$  与纯塑性变形时的应变能  $U_p$  之和

$$U(P, h) = U_e(P, h_e) + U_p(P, h_p) \quad (9)$$

由式(2)、式(8)和式(9), 可得塑性应变能  $U_p$

$$U_p = \frac{NKV^*}{N+1} k_1 \left( \frac{h_p}{h^*} \right)^{k_2} \varepsilon_{P-eqM}^{1+1/N} \quad (10)$$

假定

$$\varepsilon_{P-eqM} = k_3 \left( \frac{h}{h^*} \right)^{k_4} \quad (11)$$

得到塑性应变能  $U_p$  关于位移的表达式

$$\begin{cases} U_p = KV^* \xi_p \left( \frac{h_p}{h^*} \right)^{m_p+1} \\ \xi_p = \frac{Nk_1 k_3^{1/N+1}}{N+1} \\ m_p = \frac{k_4}{N} + k_4 + k_2 - 1 \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $k_3$  和  $k_4$  为待定参数, 可由少量有限元计算获得。同理, 可以得到弹性应变能  $U_e$  关于位移的表达式

$$U_e = \frac{EV^* k_0}{2} \left( \frac{h_e}{h^*} \right)^2 \quad (13)$$

式中,  $k_0$  为无量纲线弹性变形系数。整理得

$$\begin{cases} \frac{U}{U^*} = \frac{U_e}{U^*} + \frac{U_p}{U^*} \\ \frac{U_e}{U^*} = \xi_e \left( \frac{h_e}{h^*} \right)^2 \\ \frac{U_p}{U^*} = \xi_p \left( \frac{h_p}{h^*} \right)^{m_p+1} \end{cases} \quad (14)$$

式中

$$\begin{cases} U^* = KV^* = KW^2 B \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{m_1} \left( \frac{B}{W} \right)^{m_2} \\ \xi_e = \frac{Ek_0}{2K} \\ \xi_p = \frac{Nk_1 k_3^{1/N+1}}{N+1} \\ m_p = \frac{k_4}{N} + k_4 + k_2 - 1 \end{cases} \quad (15)$$

## 2 I 型裂纹试样半解析统一模型

在弹塑性条件下, 受单向加载的 I 型裂纹试样在变形过程中的总位移可以由工程叠加原理获得<sup>[15, 30]</sup>

$$h(P) = h_e(P) + h_p(P) \quad (16)$$

由功能原理和式(14), 可以得到 I 型裂纹试样载荷-位移半解析模型

$$\begin{cases} \frac{h}{h^*} = \frac{1}{2\xi_e} \left( \frac{P}{P^*} \right) + \left( \frac{1}{(1+m_p)\xi_p} \left( \frac{P}{P^*} \right) \right)^{\frac{1}{m_p}} \\ P^* = KA^* = KWB \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{m_1} \left( \frac{B}{W} \right)^{m_2} \\ \xi_e = \frac{Ek_0}{2K} \\ \xi_p = \frac{Nk_1 k_3^{1/N+1}}{N+1} \\ m_p = \frac{k_4}{N} + k_4 + k_2 - 1 \end{cases} \quad (17)$$

弹塑性条件下, I 型裂纹试样的  $J$  积分也可由工程叠加原理获得

$$J = \left( -\frac{\partial U_e}{B \partial a} \right) + \left( -\frac{\partial U_p}{B \partial a} \right) = J_e + J_p \quad (18)$$

结合  $J$  积分的能量形式<sup>[3]</sup>, 由式(14)可以得到 I 型裂纹试样载荷- $J$  积分半解析模型

$$\begin{cases} \frac{J}{J^*} = \left\{ \frac{m_1}{4\xi_e} \left( \frac{P}{P^*} \right)^2 + m_1 \xi_p^{-1/m_p} \left[ \frac{1}{(1+m_p)} \left( \frac{P}{P^*} \right) \right]^{1+1/m_p} \right. \\ \left. m_1 \xi_e \left( \frac{h_e}{h^*} \right)^2 + m_1 \xi_p \left( \frac{h_p}{h^*} \right)^{m_p+1} \right\} \\ \begin{cases} J^* = KW \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{m_1-1} \left( \frac{B}{W} \right)^{m_2} \\ P^* = KA^* = KWB \left( 1 - \frac{a}{W} \right)^{m_1} \left( \frac{B}{W} \right)^{m_2} \\ \xi_e = \frac{Ek_0}{2K} \\ \xi_p = \frac{Nk_1 k_3^{1/N+1}}{N+1} \\ m_p = \frac{k_4}{N} + k_4 + k_2 - 1 \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

式中, 模型参数均可通过有限元分析获得。  $k_0$  与材料弹性模量  $E$  和应变强化系数  $K$  相关,  $k_1 \sim k_4$  与材料应力强化指数  $N$  相关, 均为材料属性相关参数;

$m_1$  和  $m_2$  分别与试样初始裂纹长度  $a$  和试样厚度  $B$  相关, 为试样几何模型参数。

### 3 模型参数的确定方法

本文中的模型参数均可以通过有限元计算得到, 标定方法如图 1 所示。首先利用有限元软件进行纯塑性分析, 分别计算分析得到受载试样在不同  $a/W$  和  $B/W$  下的载荷-位移曲线, 确定参数  $m_1$  和  $m_2$  使  $P/P^*-h/h^*$  曲线归一化, 进而通过在不同  $N$  (其他参数固定) 下的载荷-位移曲线确定参数  $k_1 \sim k_4$ , 之后利用有限元软件进行线弹性分析确定参数  $k_0$ 。文中模型单元全部采用 SOLID185 单元, 弹性模量  $E$  取

200 GPa, 泊松比  $\nu$  取 0.3。表 1 给出了不同试样的有限元模型及模型适用尺寸。

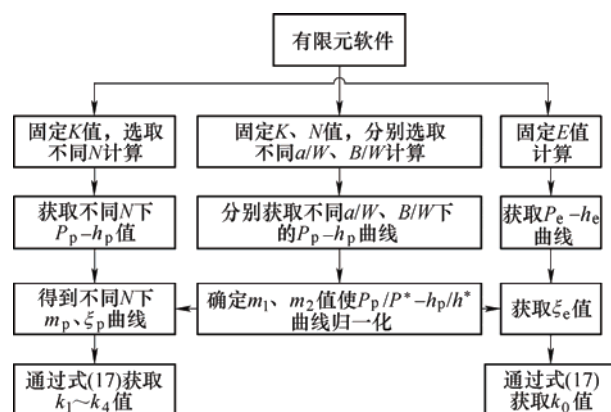


图 1 模型参数标定流程

表 1 试样 FEA 模型及尺寸

试样	构形示意图	FEA 模型	单元数	节点数	模型尺寸		
					W/mm	a/W	B/W
SEB			27 511	34 087	40	0.4~0.8	0.3~0.7
CT			28 518	34 279	40	0.5~0.8	0.4~0.7
CIET			13 776	16 515	9	0.5~0.8	0.3~0.6
SET			54 336	64 988	20	0.4~0.8	0.3~0.9
CCT			47 526	56 448	20	0.4~0.8	0.3~0.9
DECT			47 526	56 448	20	0.4~0.7	0.3~0.7

为了排除有限元网格对计算结果的影响, 本文对有限元分析获得的不同网格密度下的载荷-位移曲线进行了对比, 图 2 给出了 SEB 试样在不同网格密度下有限元分析得到的无量纲载荷-位移曲线对比。结果表明, 在不同网格密度下有限元分析结果基本一致。为节省计算时间, 本文在满足精度要求的前提下, 选用较疏的模型进行计算。表 2 给出了 6 种试样的模型参数标定结果。

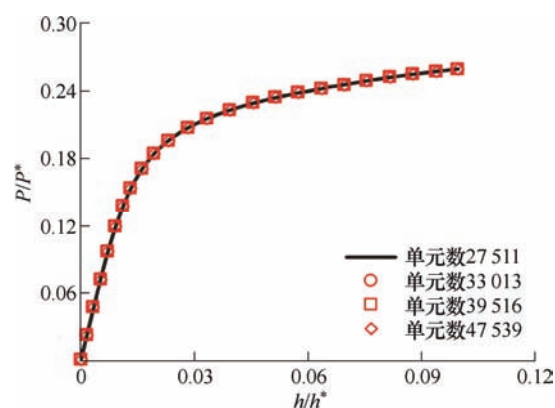


图 2 SEB 试样有限元模型网格验证

表 2 模型参数标定结果

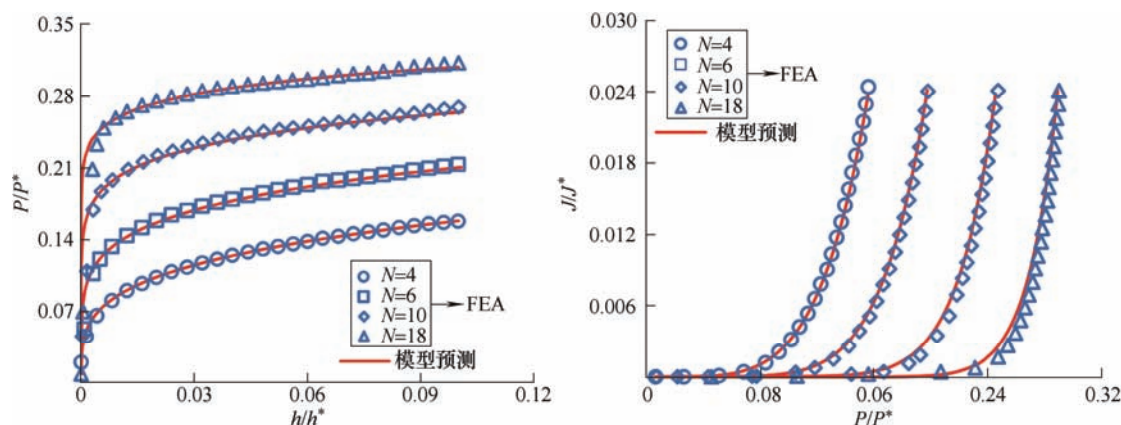
试样	$m_1$	$m_2$	$k_0$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$
SEB	1.910	0.120	0.064 5	1.213	0.043 0	0.316 2	0.977 6
CT	2.105	0.118	0.101 0	1.641	-0.032 6	0.346 4	1.032 5
CIET	1.995	0.125	0.030 9	1.119	0.005 9	0.237 3	0.994 3
SET	0.804	0.030	0.200 8	2.734	0.003 0	0.383 4	0.997 4
CCT	0.853	0.031	0.737 1	2.596	0.000 5	0.808 0	0.999 2
DECT	0.748	0.035	0.684 4	5.374	0.000 8	0.439 7	0.999 2

## 4 模型正确性验证

### 4.1 纯塑性验证

由于本文提出的载荷-位移半解析模型和载荷- $J$ 积分半解析模型都是基于工程叠加原理提出的,

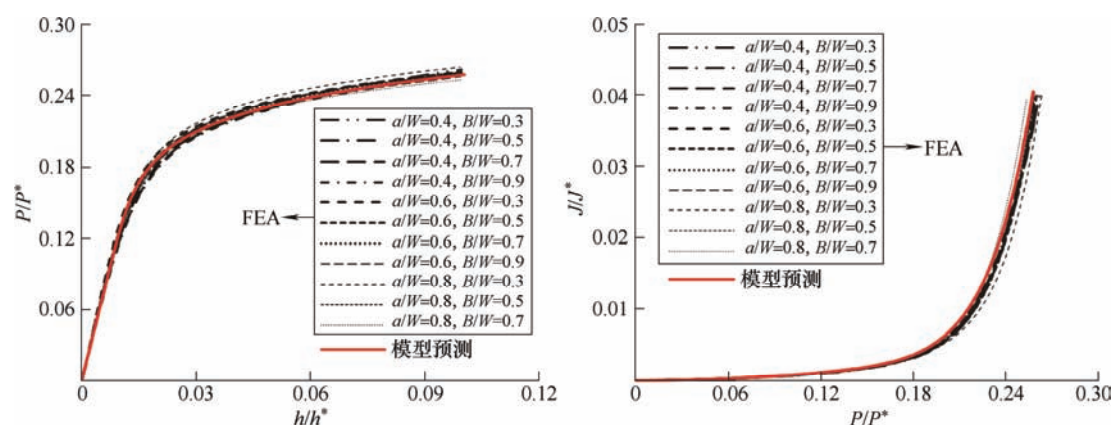
所以表 1 中的参数对于纯塑性材料仍然适用。图 3 给出了在纯塑性条件下, SEB 试样有限元结果和模型预测结果的对比。结果表明, 模型预测的  $P/P^* \sim h/h^*$  曲线和  $J/J^* \sim P/P^*$  曲线与有限元分析获得的曲线之间的优度分别为 0.991 和 0.984(优度用于描述同类曲线之间的符合程度)。

图 3 SEB 试样纯塑性曲线验证( $K=1000$  MPa,  $a/W=0.5, B/W=0.5$ )

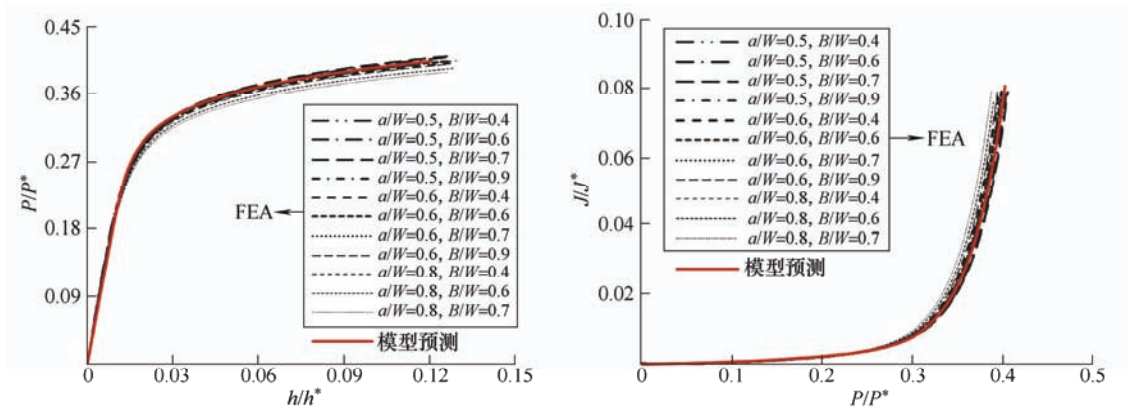
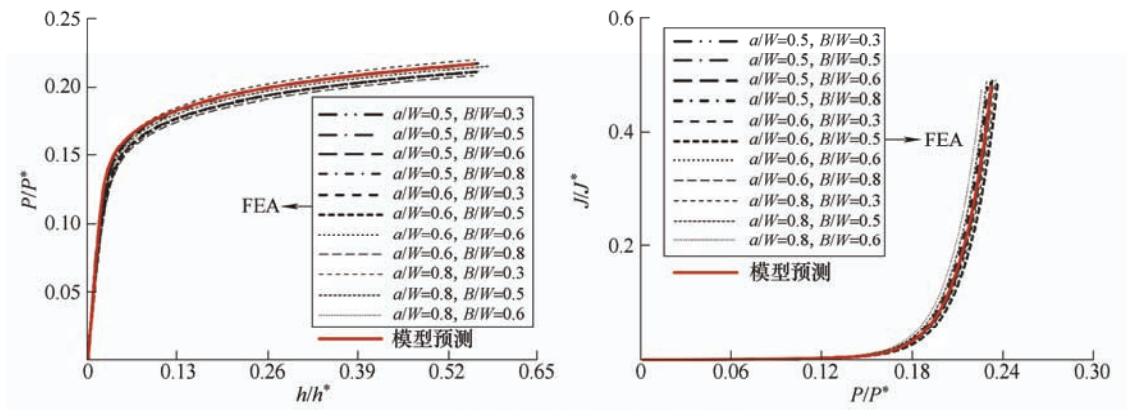
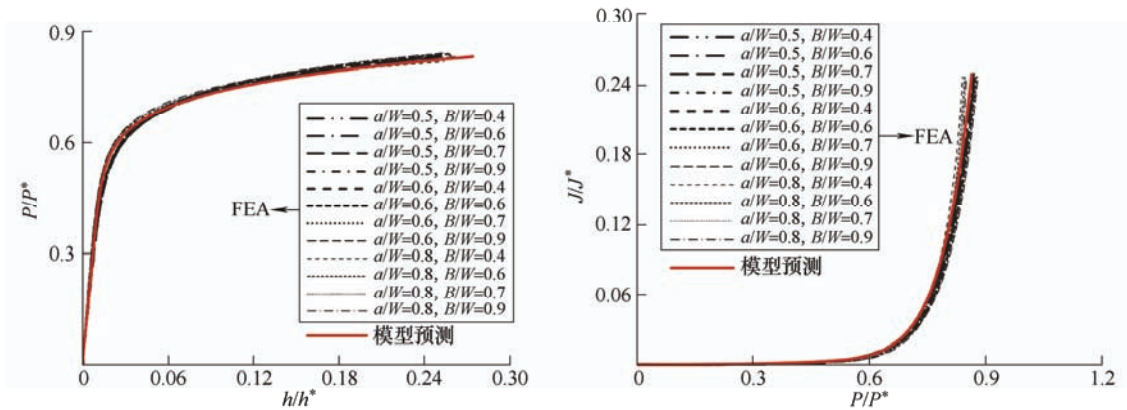
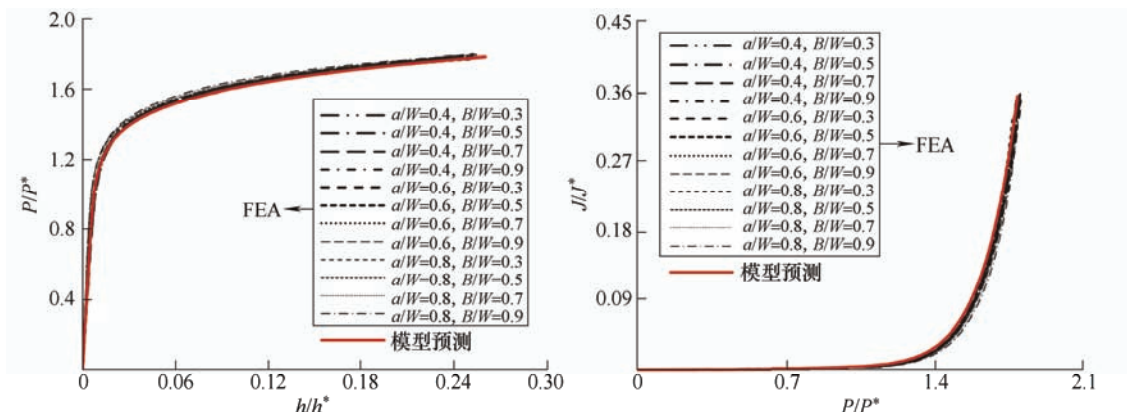
### 4.2 弹塑性验证

图 4 给出了 6 种试样在不同  $a/W$  和  $B/W$  下  $P/P^* \sim h/h^*$ 、 $J/J^* \sim P/P^*$  的几何无关弹塑性验证曲线。

图中结果表明, 本文提出的半解析模型能较好地适用于各类单向受载的含裂纹试样在不同几何尺寸下  $P/P^* \sim h/h^*$  曲线和  $J/J^* \sim P/P^*$  曲线的预测。

(a) SEB 试样( $K=1\ 000$  MPa,  $N=10$ )



(b) CT试样( $K=1\,000\text{ MPa}$ ,  $N=10$ )(c) CIET试样( $K=1\,000\text{ MPa}$ ,  $N=10$ )(d) SET试样( $K=1\,000\text{ MPa}$ ,  $N=10$ )(e) CCT试样( $K=1\,000\text{ MPa}$ ,  $N=10$ )

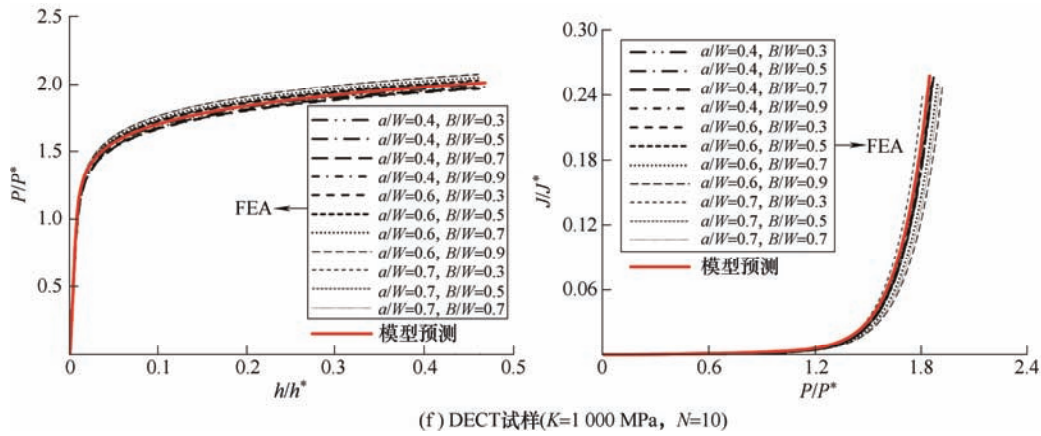
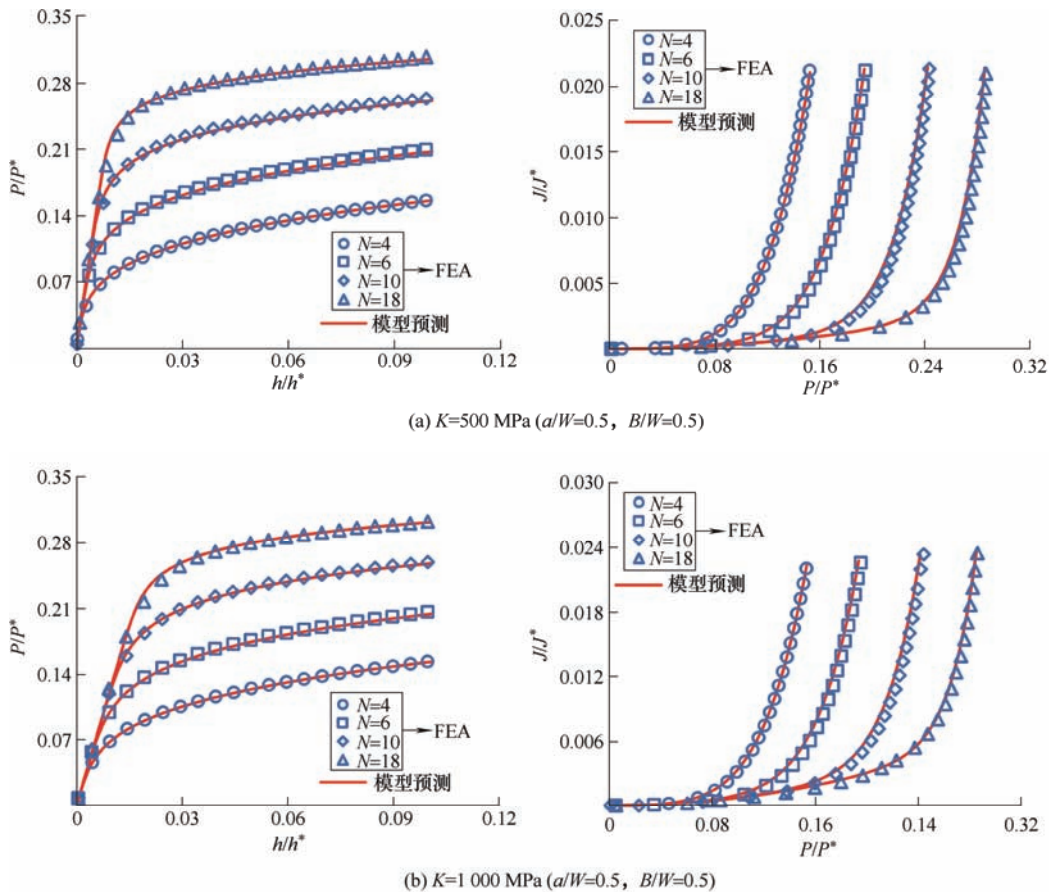
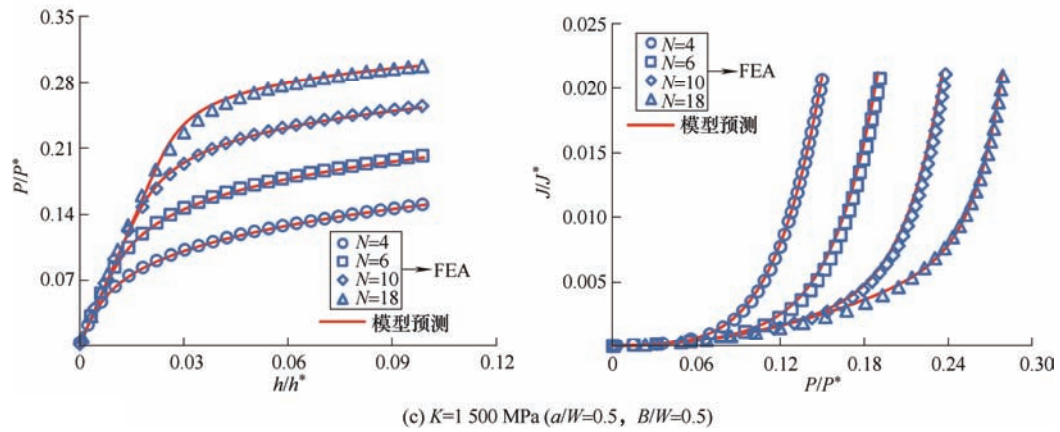
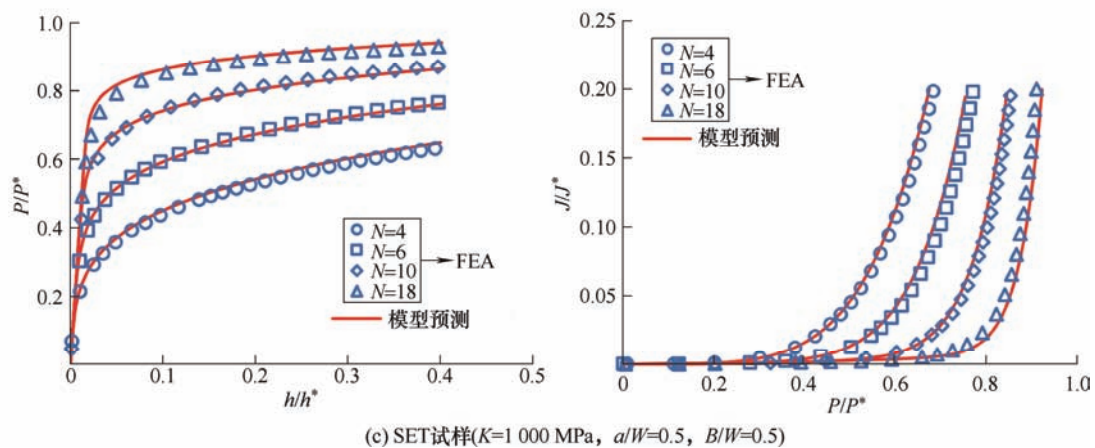
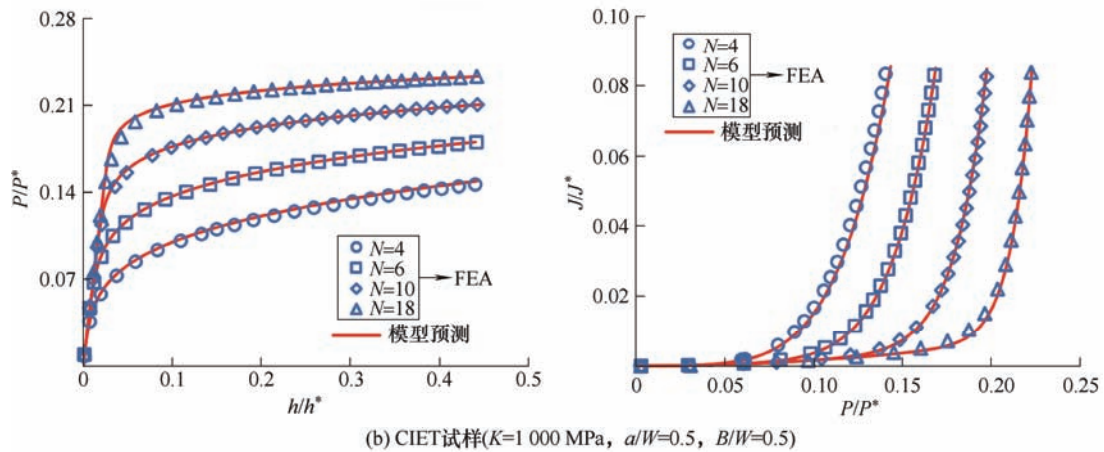
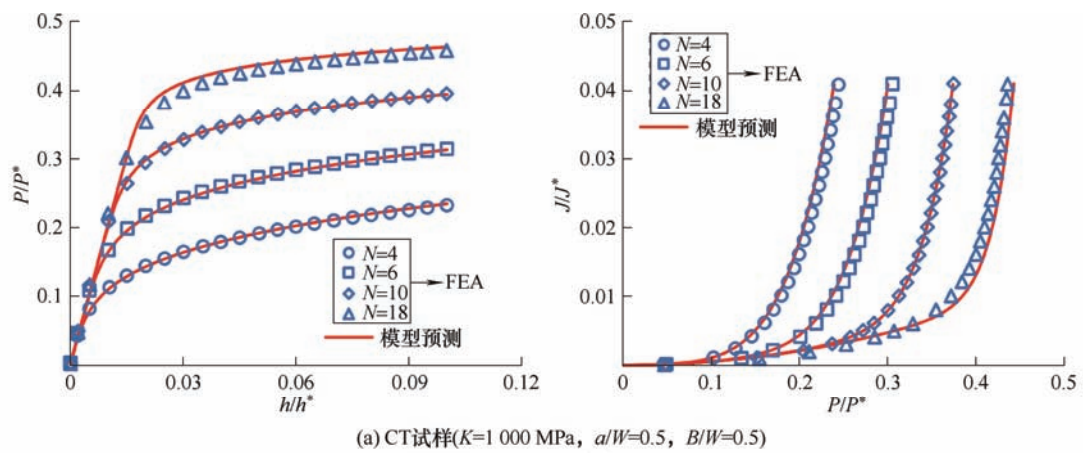
图 4 6 种试样弹塑性几何无关  $P/P^* \sim h/h^*$ 、 $J/J^* \sim P/P^*$  曲线验证

图 5 给出了 SEB 试样在不同应变强化系数  $K$ 、不同应力强化指数  $N$  下模型预测结果与有限元结果的对比, 在  $K=500\ \text{MPa}$ 、 $1\ 000\ \text{MPa}$  和  $1\ 500\ \text{MPa}$  时, 模型预测的  $P/P^* \sim h/h^*$  曲线与有限元分析获得的曲线之间的优度分别为 0.992、0.996 和 0.997,  $J/J^* \sim P/P^*$  曲线的优度分别为 0.990、0.988 和 0.988。

图 6 给出了其余 5 种试样在同一应变强化系数  $K$ 、不同应力强化指数  $N$  下的验证结果, 且模型预

测的  $P/P^* \sim h/h^*$  曲线与有限元分析获得的曲线之间的优度分别为: CT 试样 0.981, CIET 试样 0.998, SET 试样 0.980, CCT 试样 0.984, DECT 试样 0.964;  $J/J^* \sim P/P^*$  曲线的优度分别为: CT 试样 0.972, CIET 试样 0.997, SET 试样 0.968, CCT 试样 0.966, DECT 试样 0.940。实际上, 对于应变强化系数  $K=500 \sim 1\ 500\ \text{MPa}$ 、应力强化指数  $N=4 \sim 18$  的材料, 本文提出的 I 型裂纹试样半解析统一模型预测所得到的结果与有限元结果都具有较好的吻合性。



图 5 SEB 试样弹塑性  $P/P^* \sim h/h^*$ 、 $J/J^* \sim P/P^*$  曲线验证



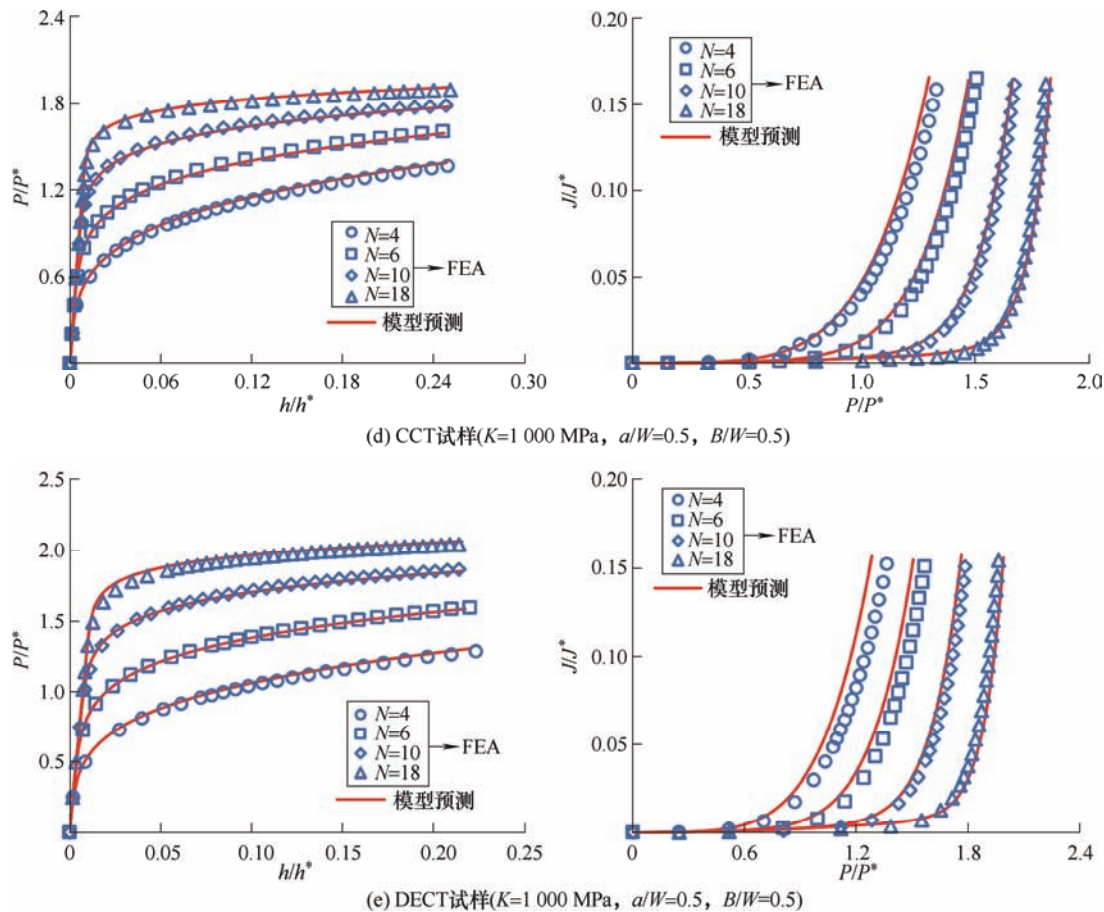


图 6 其余 5 种试样弹塑性  $P/P^* \sim h/h^*$ 、 $J/J^* \sim P/P^*$  曲线验证

结果表明，本文所提出的 I 型裂纹试样半解析统一模型能够较好地预测不同尺寸、不同材料试样的载荷- $J$  积分关系和载荷-位移关系。各类试样的载荷-位移曲线、载荷- $J$  积分曲线的模型预测结果与有限元结果之间的优度评价由表 3 给出。

表 3 6 种试样载荷-位移曲线、载荷- $J$  积分曲线优度评价表

试样	SEB	CT	CIET	SET	CCT	DECT
载荷-位移	优+	优+	优+	优+	优+	优
载荷- $J$ 积分	优+	优	优+	优	优	优-

5 结论

(1) 基于能量密度等效原理，建立了考虑三维约束的、用于 I 型裂纹弹塑性问题表征的半解析理论模型，新模型可解析描述包含三维几何尺寸、材料本构关系参数的载荷与  $J$  积分及载荷与位移的关系，可广泛应用于各类非标准 I 型裂纹试样的断裂力学试验和结构完整性评价。

(2) 针对不同几何尺寸和不同材料的 6 种构形试样进行了有限元分析，对本文模型的预测能力进行了广泛的比对评价。结果表明，有限元分析结果

与模型预测结果之间密切吻合。

(3) 新模型可用于发展包括小试样试验的断裂性能非传统试验方法。

参 考 文 献

[1] GRIFFITH A A. The phenomena of rupture and flow in solids[J]. Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences, 1921, 221(182-593): 163-198.

[2] RICE J R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks[J]. Journal of Applied Mechanics, 1964, 35(2): 379-388.

[3] RICE J R, ROSENGREN G F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16(1): 1-12.

[4] BEGLEY J A, LANDES J D. The  $J$ -integral as a fracture criterion[J]. Fracture Toughness Proceedings of the National Symposium on Fracture Mechanics Part II ASTM, 1971, 514: 1-20.

[5] KUMAR V, GERMAN M D, SHIH C F. Engineering

- approach for elastic-plastic fracture analysis[R]. EPRI Topical Report, 1981.
- [6] KUMAR V, GERMAN M D. Development on elastic-plastic fracture analysis[R]. Research & Development Center of EPRI, 1984.
- [7] ZAHOR A. Ductile fracture handbook[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 1991, 48(1): 123-124.
- [8] 钢铁研究总院. GB2038-80 利用 JR 阻力曲线确定金属材料延性断裂韧度的试验方法[S]. 北京: 中国标准出版社, 1981.
- Central Iron and Steel Research Institute. GB2038-80 Test method for determining ductile fracture toughness of metallic materials using JR resistance curve[S]. Beijing: China Standard Press, 1981.
- [9] 洪颂贤. 我国首先公布世界上第一个  $J$  积分标准试验方法[J]. 有色金属材料与工程, 1982(1): 79.
- HONG Songxian. Our country first announced the world's first  $J$ -score standard test method[J]. Nonferrous Materials and Engineering, 1982(1): 79.
- [10] ASTM International. ASTM E1820-06 Standard test methods for measurement of fracture toughness[S]. West Conshohocken: ASTM International, 2006.
- [11] International Standard Organization. ISO 12135-2002 International standard of unified method of test for the determination of quasistatic fracture toughness[S]. Geneva: International Standard Organization, 2002.
- [12] BAO C, CAI L X. Estimation of the  $J$ -resistance curve for Cr2Ni2MoV steel using the modified load separation parameter  $S_{pb}$  method[J]. Zhejiang University-SCIENCE A, 2010, 11(10): 782-788.
- [13] 蔡力勋, 包陈. 用于延性断裂韧性测试的载荷分离方法与应用[J]. 北京科技大学学报, 2011, 33(7): 868-875.
- CAI Lixun, BAO Chen. Load separation method to determine the ductile fracture toughness of materials and its application[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2011, 33(7): 868-875.
- [14] 蔡力勋, 包陈. 金属材料延性断裂韧度测试中的柔度方法研究[J]. 航空学报, 2010, 31(10): 1974-1984.
- CAI Lixun, BAO Chen. Investigation on compliance test method for ductile fracture toughness of metallic materials[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2010, 31(10): 1974-1984.
- [15] 包陈. 材料力学测试技术中的理论与实验应用[D]. 成都: 西南交通大学, 2011.
- BAO Chen. Theoretical methods and experimental applications in material mechanics testing technology [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2011.
- [16] 国家技术监督局. GB/T 2038-91 金属材料延性断裂韧度  $J_{IC}$  试验方法[S]. 北京: 中国标准出版社, 1991.
- National Bureau of Technical Supervision. GB/T 2038-91 Metallic materials-Standard test method for  $J_{IC}$ , a measure of ductile fracture toughness[S]. Beijing: China Standard Press, 1991.
- [17] 中国国家标准化管理委员会. GB/T 21143—2014 金属材料准静态断裂韧度的统一试验方法[S]. 北京: 中国标准出版社, 2014.
- National Standardization Administration of China. GB/T 21143—2014 Metallic materials-Unified Test Method of test for determination of quasistatic fracture toughness [S]. Beijing: China Standards Press, 2014.
- [18] CARVALHO H S S, RUGGIERI C. Significance of the plastic eta factor in  $J$  estimation procedures for tensile SE(T) fracture specimens[C]//American Society of Mechanical Engineers. ASME 2010 Pressure Vessels and Piping Division/K-PVP Conference. Washington: ASME, 2010: 991-1000.
- [19] DONATO G H B, RUGGIERI C. Estimation procedure for  $J$  and CTOD fracture parameters using three-point bend specimens[C]//American Society of Mechanical Engineers. International Pipeline Conference. Alberta: ASEM, 2006: 149-157.
- [20] HUANG Y, ZHOU W, YAN Z. Evaluation of plastic geometry factors for SE(B) specimens based on three-dimensional finite element analyses[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2014, 123: 99-110.
- [21] YAGAWA G, UEDA H. Behavior of surface crack in plates subjected to tensile loads: analysis based on fully plastic solutions[J]. Nuclear Engineering and Design, 1989, 111(1): 189-196.
- [22] QIAN X, YANG W. A hybrid approach to determine fracture resistance for mode I and mixed-mode I and II fracture specimens[J]. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 2011, 34(5): 305-320.
- [23] PAROOL N, QIAN X, KOH C G. A modified hybrid method to estimate fracture resistance curve for pipes with a circumferential surface crack[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2018, 188: 1-19.
- [24] 陈惟珍, ALBRECHT G. 有限元方法计算  $J$  积分[J]. 计算机辅助工程, 2000(1): 59-64.
- CHEN Weizhen, ALBRECHT G. Computation of

- J*-integral with finite element method[J]. Computer Aided Engineering, 2000(1): 59-64.
- [25] 郭建章, 张选利, 王威强. 三维 *J* 积分有限元分析的曲面积分法[J]. 青岛化工学院学报(自然科学版), 2001, 22(3): 286-289.
- GUO Jianzhang, ZHANG Xuanli, WANG Weiqiang. Calculations of three dimensional *J*-integral by surface integral method in finite element analysis[J]. Journal of Qingdao Institute of Chemical Technology, 2001, 22(3): 286-289.
- [26] MOLTENO M R, BECKER T H. Mode I-III decomposition of the *J* integral from DIC displacement data[J]. Strain, 2015, 51(6): 492-503.
- [27] ERIC B, TOBIAS S, MICHAEL B, et al. Determination of stress intensity factors and *J* integral based on digital image correlation[J]. Fracture and Structural Integrity, 2019, 13(49): 12-25.
- [28] CHEN H, CAI L X. Theoretical model for predicting uniaxial stress-strain relation by dual conical indentation based on equivalent energy principle[J]. Acta Materialia, 2016, 121: 181-189.
- [29] QI S, CAI L X, BAO C, et al. Analytical theory for fatigue crack propagation rates of mixed-mode I-II cracks and its application[J]. International Journal of Fatigue, 2019, 119: 150-159.
- [30] CHEN H, CAI L X. Unified elastoplastic model based on a strain energy equivalence principle[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 52: 664-671.
- [31] 贺屹, 蔡力勋, 陈辉, 等. 求解 I 型裂纹试样 *J* 积分的半解析方法[J]. 力学学报, 2018, 50(3): 579-588.
- HE Yi, CAI Lixun, CHEN Hui, et al. A semi analytical method to solve *J*-integral for mode-I crack components[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(3): 579-588.
- [32] PENG Y Q, CAI L X, CHEN H, et al. A novel semi-analytical method based on equivalent energy principle to obtain *J* resistance curves of ductile materials[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 148: 31-38.
- [33] 彭云强. I 型裂纹准静态断裂的理论表征与延性断裂韧性试验新方法[D]. 成都: 西南交通大学, 2019.
- PENG Yunqiang. Theoretical characterization of quasi-static fracture for mode I crack and new testing method of ductile fracture toughness[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2019.

作者简介: 肖怀荣, 男, 1997 年出生。主要研究方向为材料测试的力学理论与方法。

E-mail: xiaohuairong@126.com

蔡力勋(通信作者), 男, 1959 年出生, 教授。主要研究方向为疲劳与断裂力学、材料测试的力学理论与方法。

E-mail: lix\_cai@263.net