

DOI: 10.3901/JME.2022.14.126

# 面向轮毂磨抛的手腕偏置机器人 运动学快速求解方法<sup>\*</sup>

刘志恒 赵立军 李瑞峰 葛连正 夏毅 朱奎  
(哈尔滨工业大学机器人技术与系统国家重点实验室 哈尔滨 150000)

**摘要:** 为了提高轮毂加工的质量和效率,设计并研制手腕偏置的磨抛机器人,该手腕机构关节5可实现360°旋转、提高了末端灵活性。但机器人不满足Pieper准则,逆运动学方程复杂、高度非线性、耦合性强,有效准确地求解逆运动学困难。为解决这一问题,提出了一种逆运动学快速求解方法,该方法构建了新型的非线性方程,将传统的六个关节角度求解简化为三个关节角度求解。基于该方程,提出了由粗到精的两步法求解逆运动学,第一步估算多组关节角度初始值,基于当前关节角度选取初始值,可避免局部最优问题,提高求解稳定性;第二步根据初始值精确求解所有关节角度值,并对4、6轴共线时的多组解问题,给出了机器人特殊状态的解析解。仿真试验从精度、效率、多组解等指标验证了逆运动学算法满足轮毂磨抛加工要求,并在轮辐加工路径中进一步证明了其有效性。

**关键词:** 磨抛机器人; 手腕偏置; 逆运动学; 轮毂加工; 非线性方程

**中图分类号:** TP242

## Fast Solution Method for the Kinematics of Wrist Offset Robot Oriented to Wheel Hub Grinding and Polishing

LIU Zhiheng ZHAO Lijun LI Ruifeng GE Lianzheng XIA Yi ZHU Kui  
(State Key Laboratory of Robotics and System, Harbin Institute of Technology, Harbin 150000)

**Abstract:** In order to improve the quality and efficiency of wheel hub processing, a grinding and polishing robot with an offset wrist is designed. The wrist mechanism joint 5 can realize 360-degree rotation and improve the flexibility. But the robot does not meet Pieper's criteria. The inverse kinematics equations are complex, highly nonlinear, and strongly coupled, which makes it difficult to solve inverse kinematics effectively and accurately. To solve this problem, a fast solving method of inverse kinematics is proposed. This method constructs a new type of nonlinear equation, which simplifies the traditional six-joint angle solution to three-joint angle solution. Based on this equation, a two-step method from coarse to fine is proposed to solve inverse kinematics. The first step is to estimate the initial values of multiple sets of joint angles and select the initial values based on the current joint angles. It can avoid local optimal problems and improve the stability of the solution. The second step is to accurately solve all the joint angle values according to the initial values. For the multi-group solution problem when the 4 and 6 axes are collinear, the analytical solution of the special state of the robot is given. In terms of accuracy, efficiency, and multiple solution indicators, simulation experiments verify that the inverse kinematics algorithm meets the requirements of wheel hub grinding and polishing. Its effectiveness is further proved in the spoke processing path.

**Key words:** grinding and polishing robot; wrist offset; inverse kinematics; wheel hub processing; nonlinear equation

<sup>\*</sup> 国家重点研发计划“智能机器人”重点专项资助项目(2018YFB1308900)。  
20210412收到初稿,20211101收到修改稿

## 0 前言

轮毂表面磨抛由于轮毂种类繁多、磨抛面多为异型面等缺点, 自动化加工较难。相比数控加工中心, 机器人加工具有灵活性好、适应性强、造价便宜等优点, 采用机器人夹持工具对轮毂表面磨抛加工的方式, 可提高加工产线的柔性<sup>[1]</sup>。由于轮毂表面多为异型加工面, 表面曲率变化较大, 需要机器人在轮毂磨抛区域具有较好的灵活性, 在末端工具移动速度恒定的情况下, 姿态能较快的进行调整。传统六轴机器人末端设计为欧拉手腕, 后三个关节相交于一点, 末端旋转角度较小, 轮毂磨抛加工时容易处于奇异状态附近, 灵活性较差。因此, 设计手腕偏置结构的机器人<sup>[2]</sup>, 用于轮毂表面磨抛加工, 但偏置手腕的三个关节不交于一点, 其运动学没有解析解, 逆运动学快速求解困难。

对于没有解析解的偏置手腕机器人, 为了求解逆运动学, FU 等<sup>[3]</sup>将几何代数理论应用于运动学建模, 建立了封闭形式的运动学方程, 并用符号消元法将问题转化为一般特征值问题, 得到 16 个解, 但是求解过程计算量较大, 解算效率较低。刘志忠等<sup>[4]</sup>采用腕部偏置的平移补偿迭代方法, 计算过程较简单, 但是奇异位置时收敛较慢。一维搜索类求解算法较为简单, 通过几何法或数值法将逆运动求解简化为某一关节的一维搜索问题, 并运用反代换求解其他关节角度, 例如 TRINH-DUC 等<sup>[5]</sup>简化求解为六关节的搜索、WANG 等<sup>[6]</sup>简化求解为五关节的搜索、阮德善等<sup>[7]</sup>简化求解为一关节的搜索、KUCUK 等<sup>[8]</sup>简化求解为一关节的搜索, 计算效率过于依赖搜索的初始值, 计算过程不稳定。XU 等<sup>[9]</sup>改进一维搜索算法, 提出一种两步法, 首先引入联合约束迭代估算关节一的初始值, 然后通过搜索算法求解精确值, 求解过程比较稳定, 但是第一步初始值估算过程比较耗时。另外一些例如神经网络法<sup>[10]</sup>、模拟退火算法<sup>[11]</sup>和遗传算法<sup>[12]</sup>等用于逆运动学求解, 这些方法非常复杂, 且精度低, 耗时长。

数值迭代法常用于逆运动学解算, 求解精度较高, 牛顿-拉斐逊法<sup>[13]</sup>是非常有效的逆运动学求解方法, 但是需要逆雅可比矩阵, 当奇异位置时不能收敛, 且依赖初始值的选取。韩磊等<sup>[14]</sup>提出了一种改进的牛顿迭代法, 在奇异位置时较可靠, 但耗时较长。SUGIHARA<sup>[15]</sup>基于 Levenberg-Marquardt(LM)方法, 提出了一种鲁棒的逆运动学数值解法, 其中阻尼因子采用原方程残差的平方范数, 使计算对奇

异性问题具有快速收敛性, 但没有解决初始值选取的问题。XU 等<sup>[16]</sup>对于非球形手腕操纵器, 提出了统一的奇异性分析和计算有效的避免方法, 求解过程采用无奇异轨道的降阶方法和奇异参数优化方法, 计算效率较高, 但同样依赖初始值的选取。

本文分析偏置手腕的磨抛机器人几何构型, 提出一种逆运动学快速求解的方法。该方法首先建立新型的非线性方程, 使用三个关节角度代替六个关节角度的求解, 简化了其求解的难度。基于该方程, 提出两步法求解逆运动学, 第一步估算三个关节角度的初始值, 第二步精确求解三个关节角度, 并通过反代换求解其他关节角度。本求解方法能够快速得到运动学逆解, 仿真试验结果也表明逆运动学求解方法求解效率高、精度高, 能满足磨抛机器人控制系统使用要求。

## 1 轮毂磨抛机器人分析

### 1.1 偏置手腕机器人构型分析

机器人对轮毂表面进行磨抛加工时, 末端磨抛工具需要贴合轮辐表面进行加工, 要求手腕姿态变化范围较大, 且加工过程姿态变化灵活性高。传统的欧拉手腕属于球形腕, 如图 1a 所示, 关节 5 运动范围较小, 且奇异位置不可消除, 相较偏置手腕灵活性较差, 难以满足使用要求。

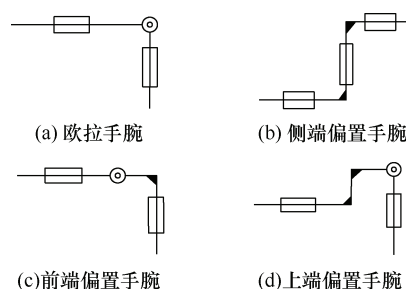


图 1 几种类型机器人手腕结构简图

根据文献[2]可知, 偏置手腕结构一般分为侧端偏置、前端偏置和上端偏置, 如图 1 所示, 图 1b 中关节 4、5 和关节 5、6 相交于两点, 图 1c 中关节 5、6 不想交, 图 1d 中关节 4、5 不相交, 基本涵盖了所有的手腕偏置情况。图中三种偏置手腕结构都不同程度的增加了手腕的灵活性, 其中侧端偏置手腕的关节 5 能实现 360° 的旋转, 在各个方向的灵活性较好, 可用于曲率变化较大的轮毂表面加工。因此, 设计磨抛专用机器人用于轮毂磨抛, 采用侧端偏置手腕结构, 如图 2 所示。



图 2 偏置手腕机器人本体

## 1.2 偏置手腕机器人建模

偏置手腕机器人有 6 个旋转关节, 可实现机器人末端 6 自由度运动。采用 D-H 法建模, 定义各关节为 1, 2, ..., 6 号, 如表 1 所示, 各关节间的连杆形态和位置参数。如图 3 所示, 基坐标系 {B} 到末端坐标系 {E} 之间的转换关系, 齐次变换矩阵为

$${}^B T_E = {}^B T_1 {}^1 T_2 {}^2 T_3 {}^3 T_4 {}^4 T_5 {}^5 T_E = \begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & P_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中,  ${}^{i-1} T_i$  表示关节  $i$  到关节  $i-1$  的齐次变换矩阵,  $R_{3 \times 3}$  表示末端坐标系的旋转矩阵,  $P_{3 \times 1}$  表示末端坐标系的位置矩阵。

表 1 偏置手腕机器人关节参数表

关节 $i$	关节角 $\theta_i(^{\circ})$	连杆偏移量 $d/\text{mm}$	连杆长度 $a/\text{mm}$	扭转角 $\alpha_i(^{\circ})$
1	0	$d_1=570$	$a_1=145$	-90
2	-90	0	$a_2=870$	0
3	0	0	$a_3=210$	-90
4	90	$d_4=1\,023$	0	90
5	0	$d_5=183$	0	-90
6	0	$d_6=189$	0	0

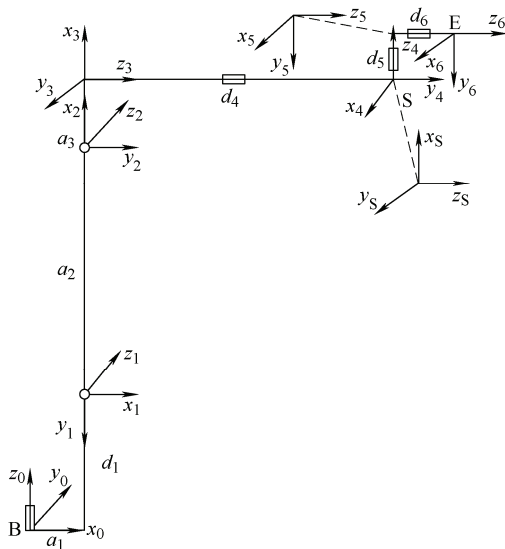


图 3 偏置手腕机器人关节坐标系

偏置手腕机器人在手腕处  $S$  点处切断, 前 3 个关节采用常规的拟人臂结构, 提供末端三自由度空间位置, 构成机器人的工作空间; 后 3 个关节采用球形腕的侧端偏置结构, 即偏置手腕, 提供末端三自由度的空间姿态。相较于球形手腕, 偏置手腕在末端三个关节没有相交于一点, 造成末端位置和姿态不解耦, 运动学逆解没有封闭解。

分析机器人偏置手腕的位置和姿态空间, 在手腕  $S$  点处, 建立辅助坐标系 {S}, 其姿态与坐标系 {3} 相同, 如图 2 所示, 辅助坐标系 {S} 到末端坐标系 {E} 的齐次变换矩阵为

$${}^S T_E = {}^S T_4 {}^4 T_5 {}^5 T_E = \begin{pmatrix} R^S & P^S \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^S = \begin{pmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & -c_4 s_5 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & -s_4 s_5 \\ s_5 c_6 & -s_5 s_6 & c_5 \end{pmatrix}$$

$$P^S = (s_4 d_5 - c_4 s_5 d_6 \quad -c_4 d_5 - s_4 s_5 d_6 \quad c_5 d_6)^T \quad (2)$$

式中,  $c_4$  代表  $\cos\theta_4$ ,  $s_4$  代表  $\sin\theta_4$ , 其余关节依次类推。由于末端手腕的偏置结构, 在  $S$  点处的末端位置空间不是一个完整的球, 如图 4a 所示, 需要前三关节的位置参与, 因此末端位置不解耦; 由于末端三个关节相互垂直, 在  $S$  点处的末端姿态空间是完整的球, 如图 4b 所示, 可提供全方位的姿态, 灵活性较好。

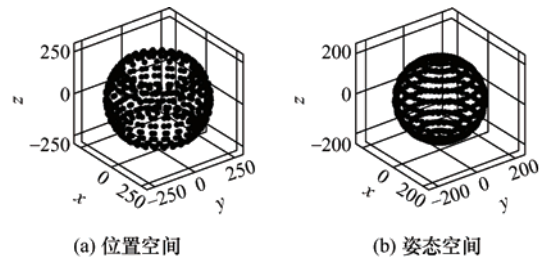


图 4 手腕偏置结构的位姿空间

## 2 逆运动学求解

### 2.1 运动学求解过程分析

机器人运动学逆解是给定机器人末端位置和姿态, 求解机器人各关节的关节变量, 本质上是求解非线性方程组。对于 6 自由度机器人, 需要求解 6 个关节变量, 至少需要构建 6 个非线性方程。对于不满足 Pieper 准则的机器人结构, 没有解析解, 非线性方程组为超越方程, 不能通过解析法进行逆运动求解。

手腕偏置的磨抛机器人没有解析解, 故采用数值法求解运动学, 即构建非线性方程并求解。为了满足机器人运动连续的要求, 需要快速求解机器人逆解, 在保证精度的情况下, 尽量减少求解过程的计算量。本文将逆运动学求解过程分为两步, 即关节角度初始值估算和关节角度精确值求解, 如图 5 所示。第一步, 采用偏置补偿迭代估算关节角度的初始值, 根据构建的非线性方程, 估算关节 1 的角度、关节 2+关节 3 的角度和、关节 6 的角度, 这里可以得到多组关节角度估算值, 根据最优原则选取一组作为关节角度初始值, 减少下一步精确求解的计算量; 第二步, 使用得到的关节角度作为迭代的初始值, 采用牛顿迭代对非线性方程的进行迭代求解, 由于上一步给出了较准确的关节角度初始值, 因此该步迭代收敛较快, 能快速得到相应的精确关节角度, 并计算其余关节角度值。通过正运动学计算末端位置和姿态, 判断是否满足精度要求, 如果不满足, 可通过调整误差参数来实现高精度的运动学求解。

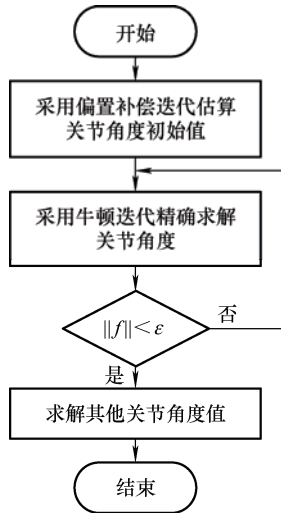


图 5 逆运动学解算流程图

## 2.2 新型非线性方程组构建

一般的构建非线性方程组方法, 是选取末端坐标系旋转矩阵  $\mathbf{R}_{3 \times 3}$  中的非线性相关的 3 个方程和位置矩阵  $\mathbf{P}_{3 \times 1}$  中的 3 个方程。设末端坐标系  $\{E\}$  的齐次变换矩阵为

$${}^B_E \mathbf{T} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

参考文献[14], 选取  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $o_z$ 、 $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$  构造非线性方程组  $X(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6) = 0$ , 具体如下

$$\begin{cases} c_1(a_1 + a_2c_2) + c_1c_{23}(a_3 + d_5s_4) - d_4c_1s_{23} - d_5s_1c_4 - p_x = 0 \\ s_1(a_1 + a_2c_2) + s_1c_{23}(a_3 + d_5s_4) - d_4s_1s_{23} + d_5c_1c_4 - p_y = 0 \\ d_1 - d_4c_{23} - s_{23}(a_3 + d_5s_4) - a_2s_2 - p_z = 0 \\ -s_5(s_1s_4 + c_1c_{23}c_4) - c_1s_{23}c_5 - a_x = 0 \\ s_5(c_1s_4 - s_1c_{23}c_4) - s_1s_{23}c_5 - a_y = 0 \\ s_6(c_{23}s_5 + s_{23}c_4c_5) + s_{23}s_4c_6 - o_z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式(4)较为复杂, 包含 6 个关节角度, 计算量较大, 为减小计算量, 分析偏置手腕机器人几何模型, 构建新型逆运动学非线性方程组。一般的球形手腕机器人采用几何法求逆运动学时, 先计算手腕  $S$  点的位置  $\mathbf{p}_S$

$$\mathbf{p}_S = \mathbf{p}_6 - d_6\mathbf{a}_6 \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{p}_6$  为末端坐标系的位置矢量,  $\mathbf{a}_6$  是末端坐标系的  $Z$  向矢量。该计算过程中,  $\mathbf{p}_6$ 、 $\mathbf{a}_6$ 、 $d_6$  皆是已知量, 进而将机器人末端位置转换为手腕处位置, 实现位置和姿态的解耦。同理, 对于偏置手腕机器人, 可以得到手腕  $S$  点的位置  $\mathbf{p}_S$

$$\mathbf{p}_S = \mathbf{p}_6 - d_6\mathbf{a}_6 + d_5(\mathbf{n}_6 \cdot \mathbf{s}_6 + \mathbf{o}_6 \cdot \mathbf{c}_6) \quad (6)$$

式中,  $\mathbf{n}_6$ 、 $\mathbf{o}_6$  分别为末端坐标系的  $X$ 、 $Y$  向矢量。

设  $S$  点的位置坐标为  $(p_x^S, p_y^S, p_z^S)$ , 如图 6 所示, 根据机器人二、三关节在同一平面的特点, 则可以得到关节角度  $\theta_1$  和  $S$  点位置的关系式

$$p_x^S \cdot s_1 - p_y^S \cdot c_1 = 0 \quad (7)$$

将式(6)代入式(7), 可得到关节角度  $\theta_1$  和  $\theta_6$  的非线性方程。

如图 6 所示, 手腕处  $S$  点的位置也可由前三关节拟人臂得到, 建立机器人前三关节正运动学模型, 可以得到手腕处  $S$  点位置

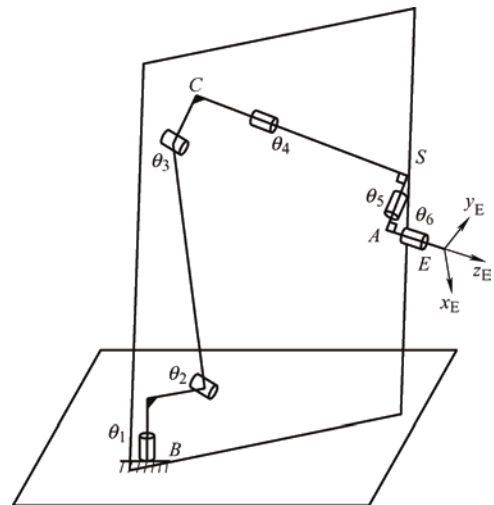


图 6 偏置手腕机器人机构图

$$\begin{aligned} p_x^s &= c_1(a_1 + a_2c_2 - d_4s_{23} + a_3c_{23}) \\ p_y^s &= s_1(a_1 + a_2c_2 - d_4s_{23} + a_3c_{23}) \\ p_z^s &= d_1 - a_2s_2 - d_4c_{23} + a_3s_{23} \end{aligned} \quad (8)$$

根据  $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $\theta_3$  的角度值, 可以计算得到  $S$  点的位置, 为简化式(8)中变量, 约去  $\theta_2$ , 得到关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $S$  点位置的关系式

$$\begin{aligned} & (p_x^s \cdot c_1 + p_y^s \cdot s_1 - a_1 + d_4s_{23} - a_3c_{23})^2 + \\ & (p_z^s - d_1 + d_4c_{23} + a_3s_{23})^2 - a_2^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

将式(6)代入式(9), 可得到关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的非线性方程。

如图6所示, 在手腕  $S$  点处, 连杆  $CS$  和  $AS$  相互垂直, 即  $CS \cdot AS = 0$ 。连杆  $CS$  的方向, 由机器人前三关节正运动学得到

$$CS = (c_1s_{23} \quad s_1s_{23} \quad c_{23}) \quad (10)$$

连杆  $AS$  的方向由关节六的角度得到

$$AS = n_6 \cdot s_6 + o_6 \cdot c_6 \quad (11)$$

根据两连杆垂直关系, 得到关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的非线性方程

$$\begin{aligned} & (n_x s_6 + o_x c_6) \cdot c_1 s_{23} + (n_y s_6 + o_y c_6) \cdot s_1 s_{23} + \\ & (n_z s_6 + o_z c_6) \cdot c_{23} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

至此, 得到了3个关于  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的非线性方程, 作为偏置手腕机器人逆运动学的非线性方程组, 用于第3节的逆运动学求解。

### 3 逆运动学算法

#### 3.1 初始值估算

手腕偏置的磨抛机器人逆运动学采用数值法求解, 需要确定非线性方程变量的初始值, 即关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$ , 根据机器人手腕偏置的特殊构型, 采用偏置补偿的方法, 可快速得到相应的关节角度初始值, 具体步骤如下。

(1) 手腕无偏置和侧端偏置机器人的区别就在于手腕处  $S$  点的位置和姿态是否解耦, 这里将公式(5)计算得到的无偏置  $S$  点位置坐标  $(p_x^s \quad p_y^s \quad p_z^s)$  作为偏置手腕处  $S$  点的值。根据式(7)可以得到  $\theta_1$  的两个值

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{atan2}(p_y^s, p_x^s) \\ \theta_1 = \text{atan2}(-p_y^s, -p_x^s) \end{cases} \quad (13)$$

(2) 根据式(9), 已知  $\theta_1$  和  $(p_x^s \quad p_y^s \quad p_z^s)$ , 可得

$\theta_{23}$  的两个值

$$\begin{cases} \theta_{23} = \text{atan2}(s_{23}, -(A \cdot s_{23} + C) / B) \\ A = 2 \cdot \left[ \begin{aligned} & (p_x^s \cdot c_1 + p_y^s \cdot s_1 - a_1) d_4 + \\ & (p_z^s - d_1) a_3 \end{aligned} \right] \\ B = 2 \cdot \left[ \begin{aligned} & (p_z^s - d_1) d_4 - \\ & (p_x^s \cdot c_1 + p_y^s \cdot s_1 - a_1) a_3 \end{aligned} \right] \\ C = (p_x^s \cdot c_1 + p_y^s \cdot s_1 - a_1)^2 + (p_z^s - d_1)^2 + \\ d_4^2 + a_3^2 - a_2^2 \\ s_{23} = -\frac{AC \pm \sqrt{B^2(A^2 + B^2 - C^2)}}{A^2 + B^2} \end{cases} \quad (14)$$

(3) 根据式(12), 已知  $\theta_1$  和  $\theta_{23}$ , 可得  $\theta_6$  的两个值

$$\begin{cases} \theta_6 = \text{atan2} \left( \begin{aligned} & -(o_x c_1 s_{23} + o_y s_1 s_{23} + o_z c_{23}), \\ & (n_x c_1 s_{23} + n_y s_1 s_{23} + n_z c_{23}) \end{aligned} \right) \\ \theta_6 = \text{atan2} \left( \begin{aligned} & (o_x c_1 s_{23} + o_y s_1 s_{23} + o_z c_{23}), \\ & -(n_x c_1 s_{23} + n_y s_1 s_{23} + n_z c_{23}) \end{aligned} \right) \end{cases} \quad (15)$$

(4) 根据式(6), 已知  $\theta_6$ , 可得更新后的  $S$  点位置坐标  $(p_x^s \quad p_y^s \quad p_z^s)$

$$\begin{cases} p_x^s = p_x^6 - d_6 a_x + d_5 (n_x s_6 + o_x c_6) \\ p_y^s = p_y^6 - d_6 a_y + d_5 (n_y s_6 + o_y c_6) \\ p_z^s = p_z^6 - d_6 a_z + d_5 (n_z s_6 + o_z c_6) \end{cases} \quad (16)$$

(5) 至此, 可以得到关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的8组值, 但是由于手腕处  $S$  点位置是假定无偏置手腕的, 得到的关节角度值误差较大, 因此将步骤(4)得到的新的  $S$  点位置带入到步骤(1)中, 重复执行步骤2、3, 直到满足条件, 判断条件为: ① 达到最大循环次数  $\tau$ ; ② 手腕处  $S$  点位置的变化值小于误差指标  $\delta$ , 即  $\|p^s(k+1) - p^s(k)\| < \delta$ 。满足其中一个即可跳出循环, 得到关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的8组值。

(6) 将关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的8组值与当前的关节角度进行对比, 根据距离最短原则, 选择其中一组角度值, 作为下一步关节角度精确求解的初始值。

磨抛机器人逆运动学求解时, 采用偏置补偿迭代的方法计算关节角度初始值, 当设置误差  $\delta=1$  时, 循环次数一般在3~5次, 计算量较小, 但是当精度要求较高的时, 收敛速度较慢, 需要多次迭代求解, 甚至得不到关节角度值, 影响计算效率。因此, 这里采用偏置补偿迭代是为了得到关节角度初

始值, 并且可以得到多组逆解, 结合当前关节角度进行优化, 选取距离最短的一组解, 用于下一步的精确求解。

### 3.2 运动学精确逆解

牛顿法求解非线性方程组就是将非线性方程通过迭代的方式转换为线性求解的过程, 其基本迭代形式为

$$\theta_{k+1} = \theta_k - [f'(\theta_k)]^{-1} \cdot f(\theta_k) \quad (17)$$

式中,  $f(\theta_k)$  是非线性方程组,  $f'(\theta_k)$  是非线性方程组的导数。牛顿法对于选取的初始值局部收敛性较好, 能快速收敛到精度要求的范围, 本质上是一阶优化过程, 相较偏置补偿迭代过程收敛速度较快。

对上文构建的非线性方程组采用牛顿迭代法求解, 初始值选用上一步优化后的角度值, 迭代求解关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$ , 直到满足迭代条件。判断条件: ① 达到最大循环次数  $k$ ; ② 非线性方程组  $f(\theta_k)$  的范数小于误差指标  $\varepsilon$ , 即  $\sum_{i=1,2,3} \|f_i(\theta_k)\| < \varepsilon$ 。满足其中一个即可跳出循环, 得到关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的精确解。若满足条件 1 的情况下跳出循环, 则得不到关节角度的精确解, 输出逆运动学求解失败。

采用反代换法求解其余关节角度, 分析磨抛机器人结构, 根据关节角度  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和  $\theta_6$  的值, 求取其他关节角度值  $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 。式(8)是关于  $\theta_2$  的方程组, 已知  $\theta_1$ 、 $\theta_{23}$  和手腕处  $S$  点位置, 可得  $\theta_2$  的角度值

$$\theta_2 = \text{atan2} \left( \begin{array}{l} -(p_z^s - d_1 + d_4 c_{23} + a_3 s_{23}), \\ (p_x^s c_1 + p_y^s s_1 - a_1 + d_4 s_{23} - a_3 c_{23}) \end{array} \right) \quad (18)$$

继而可以得到  $\theta_3$  的角度值

$$\theta_3 = \theta_{23} - \theta_2 \quad (19)$$

如图 6 所示, 平面 BCS 为大臂、小臂所在平面, 其法向量可由关节  $\theta_1$  得到, 即  $\mathbf{u} = (-s_1 \quad c_1 \quad 0)$ 。由于  $\mathbf{CS}$  与  $\mathbf{AS}$  垂直、 $\mathbf{CS}$  与  $\mathbf{u}$  垂直, 可知  $\mathbf{AS}$  与  $\mathbf{u}$  的夹角为关节  $\theta_4$  的值, 其符号可根据  $\mathbf{CS}$  的方向判断

$$\theta_4 = \begin{cases} \arccos(\mathbf{AS} \cdot \mathbf{u}) & (\mathbf{AS} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{CS} \geq 0 \\ -\arccos(\mathbf{AS} \cdot \mathbf{u}) & (\mathbf{AS} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{CS} < 0 \end{cases} \quad (20)$$

根据  $\mathbf{AS}$  与  $\mathbf{CS}$  垂直、 $\mathbf{AS}$  与  $\mathbf{AE}$  垂直, 可知  $\mathbf{CS}$  与  $\mathbf{AE}$  的夹角即为关节角度  $\theta_5$  的值, 其符号可根据  $\mathbf{AS}$  的方向判断

$$\theta_5 = \begin{cases} \arccos(\mathbf{CS} \cdot \mathbf{AE}) & (\mathbf{CS} \times \mathbf{AE}) \cdot \mathbf{AS} \geq 0 \\ -\arccos(\mathbf{CS} \cdot \mathbf{AE}) & (\mathbf{CS} \times \mathbf{AE}) \cdot \mathbf{AS} < 0 \end{cases} \quad (21)$$

至此, 可以得到磨抛机器人所有关节角度的值, 考虑各关节运动的机械限制, 判断是否在关节约束范围内, 得到最终的机器人关节角度。

### 3.3 多解组分析

一般无偏置手腕的机器人, 当 4、6 轴共线时, 即关节 5 角度为 0 或 180°, 记做零点位置, 关节角度 4 和 6 有无数多解。对于侧端偏置手腕机器人, 当 4、6 轴共线时(关节 5 为零点位置), 由于关节角度 4 的转动会导致末端位置的变化, 因此不存在无数组解。但是手腕处的偏置连杆会导致出现有限多组解, 即关节 5 为零点位置时, 会出现多组解。当按照前文逆运动初始值估算求解时, 得不到与当前关节相近的解时, 则说明关节 5 角度为 0 或 180°, 求解关节 5 零点位置时的逆运动学。

对于关节角度 5 处于零点位置的情况, 由于关节角度 5 已知, 故可以推导出其解析解。由图 6 可知, 4、6 轴共线即  $\mathbf{CS}$  与  $\mathbf{AE}$  平行,  $\mathbf{AE}$  的方向即是末端姿态的  $Z$  向  $(a_x \quad a_y \quad a_z)$ , 由于  $\mathbf{CS}$  与  $\mathbf{u}$  垂直, 可得  $\mathbf{AE}$  与  $\mathbf{u}$  垂直, 即  $\mathbf{AE} \cdot \mathbf{u} = 0$ , 可得  $\theta_1$  的角度值

$$\theta_1 = \text{atan2}(a_y, a_x) \quad (22)$$

由  $\mathbf{CS}$  与  $\mathbf{AE}$  平行, 即  $\mathbf{CS} = \mathbf{AE}$ , 可得  $\theta_{23}$  的角度值:

$$\theta_{23} = \text{atan2}(a_x \cdot c_1 + a_y \cdot s_1, a_z) \quad (23)$$

手腕处  $S$  点在平面 BCS 上, 可知  $\mathbf{BS}$  与  $\mathbf{u}$  垂直,  $\mathbf{BS}$  即是  $S$  点位置  $(p_x^s \quad p_y^s \quad p_z^s)$ , 根据  $\mathbf{BS} \cdot \mathbf{u} = 0$ , 可得  $\theta_6$  的角度值

$$\begin{cases} \theta_6 = \text{atan2}(s_6, -(A \cdot s_6 + C) / B) \\ A = d_5 \cdot (n_y \cdot c_1 - n_x \cdot s_1) \\ B = d_5 \cdot (o_y \cdot c_1 - o_x \cdot s_1) \\ C = (p_y^6 - d_6 a_y) \cdot c_1 - (p_x^6 - d_6 a_x) \cdot s_1 \\ s_6 = -\frac{AC \pm \sqrt{B^2(A^2 + B^2 - C^2)}}{A^2 + B^2} \end{cases} \quad (24)$$

其余关节角度求解过程和前文相同, 由式(18)~(21)得到。

## 4 仿真分析

磨抛机器人基于 TwinCAT3 搭建开放式控制系统, 设计控制系统循环周期为 4 ms<sup>[17]</sup>, 要求单次循环内能够解算机器人工作空间内的逆解; 对轮毂表面进行磨抛加工时<sup>[18]</sup>, 要求电镀前表面加工粗糙度不大于 0.5  $\mu\text{m}$ , 滚轮抛光表面粗糙度可达 0.01~

0.63  $\mu\text{m}$ , 可知机器人稳定状态下逆解误差值不大于 0.01  $\mu\text{m}$ , 设计逆运动学解算精度比最小粗糙度高一个数量级, 即不大于  $10^{-6} \text{ mm}$ 。本节从精度、效率、多组解等方面验证逆运动学算法满足轮毂磨抛机器人加工要求; 并根据实际轮毂模型规划磨抛路径, 验证逆运动学算法的有效性。基于计算机搭建逆运动学算法的仿真试验, 测试平台的 CPU 性能为 Intel Core i7-4810MQ 2.80 GHz, 采用 TwinCAT3 中的 nLastExecTime 获取程序运行时间。

#### 4.1 逆运动学算法性能验证

评估磨抛机器人运动学算法的性能, 测试其精度、效率和多组解等三个指标。机器人模型参数及初始状态如表 1 所示, 给定两个基于机器人基座标系的一般末端位姿用于仿真测试, 如表 2 所示。逆运动学算法中的参数设置, 如表 3 所示。在不限制关节角度的情况下, 得到两个末端位姿的多组逆解, 如表 4 所示。

表 2 机器人末端位姿

名称	末端位置 $p$	末端姿态 $n$	末端姿态 $o$	末端姿态 $a$
位姿 1	664.283 5	0.264 3	-0.788 9	-0.554 8
	462.765 9	-0.931 5	-0.357 8	0.064 9
	-176.944 4	-0.249 7	0.499 6	-0.829 5
位姿 2	1504.877 2	0.261 7	-0.965 1	-0.002 1
	188.550 2	-0.001 5	-0.002 6	0.999 9
	926.505 2	-0.965 1	-0.261 7	-0.002 1

表 3 逆运动学算法参数

参数	数值
初始值估算误差指标	$\delta = 1$
初始值估算最大循环次数	$\tau = 5$
精确值求解误差指标	$\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$
精确值求解最大循环次数	$k = 5$

由表 4 数据可知, 机器人一般末端位姿会得到 8 组逆解, 对于同一位姿的不同逆解, 经逆运动学解算后的位姿误差精度均不大于  $10^{-6} \text{ mm}$ 。对于不同位姿, 得到位姿 1 末端平均位置误差  $3.893 \times 10^{-13} \text{ mm}$ 、姿态误差  $7.643 \times 10^{-16}^\circ$ , 得到位姿 2 末端平均位置误差  $6.103 \times 10^{-13} \text{ mm}$ 、姿态误差  $8.021 \times 10^{-16}^\circ$ , 可知不同位姿的平均位姿误差精度基本相同且不大于  $10^{-6} \text{ mm}$ 。

对于位姿 1、2, 表 4 列出的初始值误差为三个关节角度估算值与精确值的误差和。当设置初始值估算误差指标  $\delta = 1$ 、初始值估算最大循环次数  $\tau = 5$  时, 得到的角度误差值均小于  $0.1^\circ$ , 最小为  $0.000 1^\circ$ , 最大为  $0.051 4^\circ$ , 验证前文所提的初始值估算过程为下一步精确求解过程提供了较精确的初始值。当设置精确值求解误差指标  $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$  时, 位姿 1、2 的精确值求解过程迭代次数均为 2 次, 收敛速度较快, 且运动学逆解位姿误差精度能较好的满足控制系统要求, 进一步验证求解时间是否达到要求。

表 4 两种位姿的逆解结果

名称	初始值 误差/ $^\circ$	位置误差 / $10^{-13} \text{ mm}$	姿态误差 / $10^{-16}^\circ$	关节变量值/ $^\circ$					
				$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
位姿 1	0.051 4	1.172	1.110	23.558 9	-34.487 9	52.589 6	54.452 8	20.223 0	36.532 6
	0.003 5	3.177	11.440	37.899 6	-29.945 7	34.746 2	-129.838 1	-30.699 4	-123.162 9
	0.011 8	2.557	8.950	40.799 5	108.233 5	-204.444 4	-152.290 7	-117.713 4	-60.703 7
	0.000 5	6.181	8.473	19.054 1	110.369 5	-198.387 7	15.986 7	118.306 2	92.967 8
	0.004 7	2.219	9.155	-160.403 5	91.736 5	21.546 8	-156.327 1	141.993 0	104.766 6
	0.007 2	3.469	8.005	-140.549 5	89.210 9	33.509 2	39.490 9	-140.718 7	-43.238 5
	0.009 3	2.493	7.711	-139.297 6	-149.664 2	-179.411 2	28.699 3	-58.856 5	-90.335 7
	0.013 3	9.882	6.304	-160.873 4	-151.696 8	-185.484 7	-162.795 8	55.282 0	75.294 1
位姿 2	0.001 7	1.171	19.982	0	-65.867 5	20.345 6	89.826 5	90	30.346 7
	0.000 2	1.271	2.234	0.020 8	31.703 6	-172.839 9	-89.999 2	-90.159 5	-54.038 8
	0.000 1	9.772	6.817	0.038 7	-61.107 5	-4.024 3	-90.147 1	-90.023 0	-130.043 2
	0.002 8	7.285	14.615	0.015 0	36.463 5	-158.413 3	89.951 2	90.155 8	106.774 4
	0.041 4	15.463	7.653	-179.982 9	-197.161 7	-34.429 1	-90.032 1	90.158 7	113.233 9
	0.000 3	4.291	7.482	-179.982 5	-202.764 3	-6.992 4	90.028 9	-90.159 1	-44.931 9
	0.048 3	2.799	3.171	-179.965 2	-132.828 4	-131.075 2	89.886 1	-90.099 4	-99.078 9
	0.025 0	6.779	2.223	-179.996 4	-138.431 0	-142.435 2	-90.143 8	90.092 5	63.958 4

验证逆运动学算法的计算效率,在上述逆运动学算法参数设置不变的情况下,分别对位姿 1、2 进行 100 次重复求解,得到求解时间如图 7 所示。对于位姿 1、2,求解时间基本相同,100 次平均时间分别为 0.63 ms、0.65 ms,图中虚线为两个位姿的平均求解时间 0.64 ms。图中位姿 1、2 求解时间趋势相同,除第一次外求解时间波动不大,重复求解过程稳定,第一次求解时间稍长,但不超过 1 ms,有部分程序初次载入的时间。因此,对于位姿 1、2,逆运动学算法在满足精度要求的情况下,求解时间均小于 4 ms,满足控制系统对逆运动学实时解算的要求。

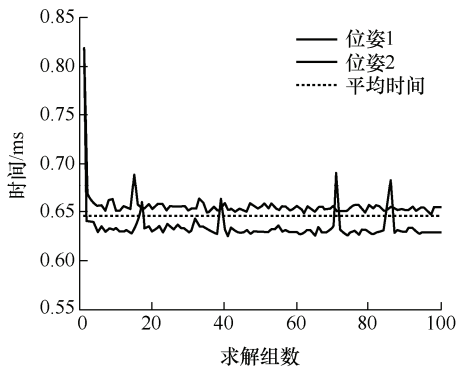


图 7 100 次重复求解时间

验证逆运动学算法对 4、6 轴共线时多解状态下的求解性能,测试 100 组关节  $\theta_5$  在  $-10^\circ \sim 10^\circ$  范围内,其余关节取任意值的求解情况。当机器人关节 5 处于零点位置及其附近时,图 8、表 5 展示了 100 组逆解的求解时间结果,平均求解时间小于 1 ms,100 组求解时间结果基本分布在均值的  $\pm 0.5$  ms 范围内,求解时间波动不大,有 3 组求解时间大于 2 ms,但最大求解时间小于 3 ms,均在控制系统要求的周期范围内;图 9、表 5 展示了 100 组逆解的求解位姿误差结果,平均位置误差  $1.315 \times 10^{-10}$  mm、平均姿态误差  $3.101 \times 10^{-13}^\circ$ ,最大位置误差  $3.083 \times 10^{-9}$  mm、姿态误差  $1.140 \times 10^{-11}^\circ$ ,均

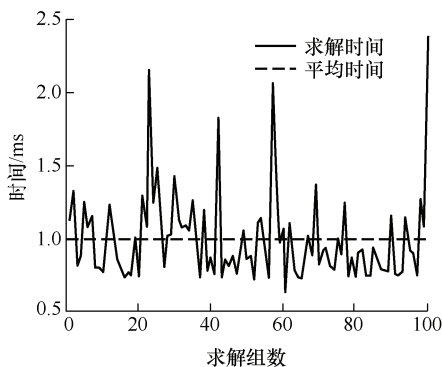


图 8 100 组关节 5 零点求解时间

满足位姿误差精度要求。因此,对于关节 5 处于零点范围的逆运动学解算时间、精度均满足控制系统要求,且未出现解算不出的情况。

表 5 任意组求解时间和误差

项目	零点状态	任意状态
平均求解时间/ms	0.99	0.89
最大求解时间/ms	2.39	2.86
平均位置误差/mm	$1.315 \times 10^{-10}$	$3.485 \times 10^{-11}$
最大位置误差/mm	$3.083 \times 10^{-9}$	$1.207 \times 10^{-9}$
平均姿态误差/ $^\circ$	$3.101 \times 10^{-13}$	$6.458 \times 10^{-14}$
最大姿态误差/ $^\circ$	$1.140 \times 10^{-11}$	$3.496 \times 10^{-12}$

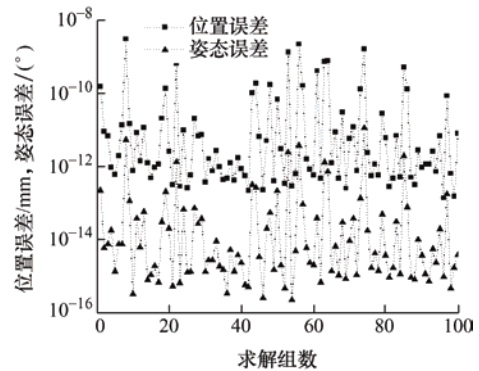


图 9 100 组关节 5 零点求解误差

为了进一步验证磨抛机器人逆运动学算法的可靠性,测试机器人工作空间内 300 组随机数据点,包含关节 5 零点位置及附近的点,得到求解结果如图 10、11 和表 5 所示。300 组任意点的平均求解时间小于 100 组关节 5 零点位置的求解时间,最大求解时间小于 3 ms,均在系统要求的周期范围内。300 组任意点的平均位置和姿态误差小于 100 组关节 5 零点位置的求解误差,最大位置误差  $1.207 \times 10^{-9}$  mm、姿态误差  $3.496 \times 10^{-12}^\circ$ ,均满足位姿误差精度要求。因此,对于工作空间内任意点的逆运动学解算时间、精度均满足控制系统要求,且未出现解算不出的情况。

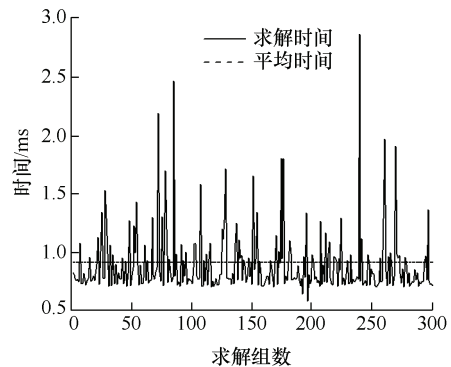


图 10 300 组任意点求解时间

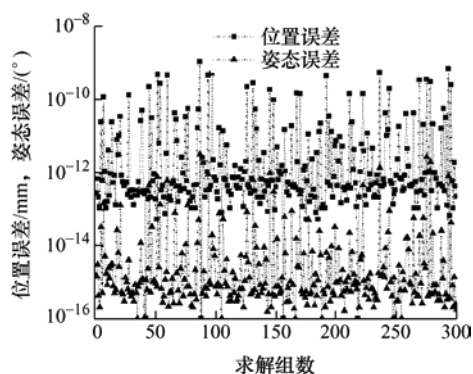


图 11 300 组任意点求解误差

通过上述仿真测试, 验证磨抛机器人逆运动学算法求解精度、时间均能满足控制系统要求, 且能解决多解状态下的逆解问题, 在机器人工作空间范围内能够求解所有的逆解, 逆运动学算法能有效地应用于偏置手腕的磨抛机器人。

#### 4.2 轮毂磨抛加工路径仿真

磨抛机器人末端安装磨抛工具, 对轮毂表面进行磨抛加工, 规划一条轮辐加工区域的磨抛路径, 进行逆运动学求解仿真分析, 如图 12 所示。图中展示了规划的磨抛路径, 根据模型表面信息, 生成路径关键点位姿, 深色线条代表工具的  $X$  向方向, 浅色线条代表工具的  $Y$  向方向, 间断线条代表工具的  $Z$  向方向。图中规划的关键位姿点共计 60 个, 其中  $Y$  方向表示运动的方向,  $X$  方向表示当前点表面的法向方向。

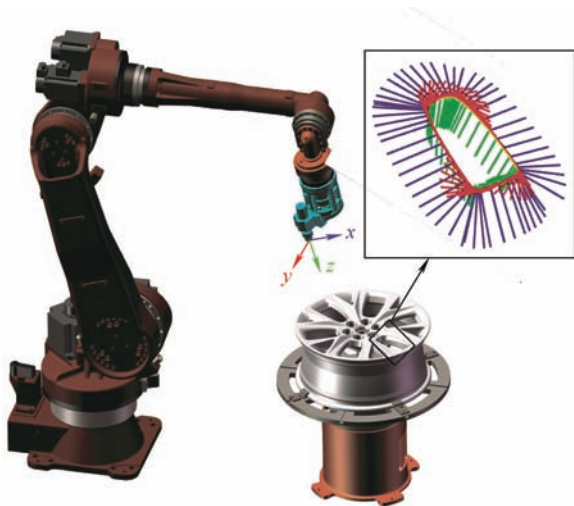


图 12 轮毂磨抛加工路径示意图

机器人沿着关键位姿点运动, 对 60 个关键位姿点进行逆运动学解算, 得到求解结果如图 13、14 所示。平均求解时间  $0.68 \text{ ms}$ , 最大求解时间  $0.95 \text{ ms}$ , 平均位置误差  $1.914 \times 10^{-12} \text{ mm}$ , 最大位置误差  $1.302 \times 10^{-11} \text{ mm}$ , 平均姿态误差  $3.573 \times 10^{-15}^\circ$ , 最大姿态

误差  $2.447 \times 10^{-14}^\circ$ , 和前文验证的效率、精度等性能基本相同。逆运动学算法满足机器人磨抛轮毂加工实时解算要求, 得到各个关节的角度值, 如图 15 所示。图中各关节角度连续变化, 无角度突变值, 说明算法对多组解的优化效果较好, 求解得到的各关节角度可以用于运动控制系统的关节插补运算, 完成机器人对该轮毂规划区域的磨抛加工。

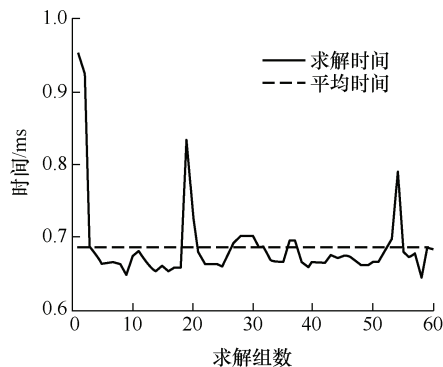


图 13 60 组路径点求解时间

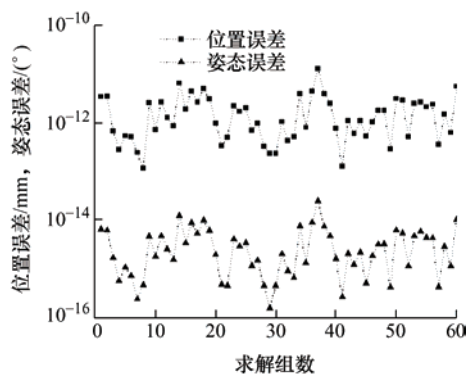


图 14 60 组路径点求解误差

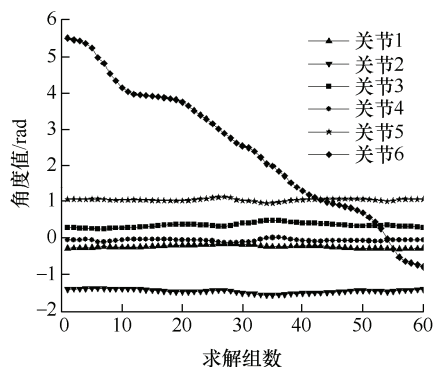


图 15 60 组路径点关节角度

## 5 结论

本文针对磨抛机器人控制实时性和稳定性需求, 基于优化方法提出偏置手腕磨抛机器人运动学

快速求解方法, 结论如下。

(1) 分析机器人手腕偏置的结构, 针对轮毂磨抛加工姿态变化较大的特点, 设计了侧端偏置手腕机器人, 建立了机器人运动学模型。基于手腕侧端偏置结构特点, 推导了新型的非线性方程组, 通过将部分关节角度代替全部关节角度的求解, 减小了逆运动学求解过程中的计算量。

(2) 提出了由粗到精的两步法求解手腕偏置机器人逆解, 第一步采用偏置补偿迭代的方法, 迭代过程计算量较小, 可粗略估算关节角度的初始值, 并根据得到的多组解选择最优关节角度; 第二步采用牛顿迭代法精确求解机器人关节角度, 收敛速度较快, 通过反代换法求解了其余关节角度。并分析了 4、6 轴共线时的多解情况, 给出了机器人解析解。

(3) 仿真试验从精度、效率、多组解等方面验证了逆运动学算法能够在位姿精度要求范围内, 快速解算机器人逆解; 并对实际轮毂磨抛路径进行逆运动学求解仿真, 在控制系统的循环周期范围内, 求解结果准确、有效、稳定。

## 参 考 文 献

- [1] 刘海龙, 张蕾, 吴海波. 基于多工业机器人的轮毂打磨工作站系统[J]. 计算机与现代化, 2020, 301(9): 122-125, 130.
- LIU Hailong, ZHANG Lei, WU Haibo. A wheel polishing workstation system based on multi-industrial robot[J]. Computer And Modernization, 2020, 301(9): 122-125, 130.
- [2] 卜王辉, 刘振宇, 谭建荣. 基于切断点自由度解耦的手腕偏置型 6R 机器人位置反解[J]. 机械工程学报, 2010, 46(21): 5-9.
- BU Wanghui, LIU Zhenyu, TAN Jianrong. Inverse displacement analysis of 6R robots with offset wrists based on decoupling degrees of freedom at the cutoff points[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(21): 5-9.
- [3] FU Z, YANG W, ZHEN Y. Solution of inverse kinematics for 6R robot manipulators with offset wrist based on geometric algebra[J]. Journal of Mechanisms & Robotics-transactions of the ASME, 2013, 5(3): 310081-310087.
- [4] 刘志忠, 柳洪义, 罗忠, 等. 基于偏置补偿的 6 自由度腕部偏置机器人逆解算法[J]. 东北大学学报, 2012(6): 870-874.
- LIU Zhizhong, LIU Hongyi, LUO Zhong, et al. Inverse kinematics algorithm for 6-DOF robots with offset wrist based on offset compensation[J]. Journal of Northeastern University, 2012(6): 870-874.
- [5] TRINH-DUC C, ZLATANOV D, ZOPPI M, et al. A geometrical approach to the inverse kinematics of 6R serial robots with offset wrists[C/CD]//ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2015.
- [6] WANG X, D ZHANG, ZHAO C. The inverse kinematics of a 7R 6-degree-of-freedom robot with non-spherical wrist[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2017, 9(8): 168781401771498.
- [7] 阮德善, 韩军. 6R 偏置腕关节摄影机器人逆运动学分析[J]. 机械设计与制造工程, 2020, 49(10): 41-46.
- RUAN Deshan, HAN Jun. Inverse kinematics analysis of 6R offset wrist camera robot[J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2020, 49(10): 41-46.
- [8] KUCUK S, BINGUL Z. Inverse kinematics solutions for industrial robot manipulators with offset wrists[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(7-8): 1983-1999.
- [9] XU J, SONG K, HE Y, et al. Inverse kinematics for 6-DOF serial manipulators with offset or reduced wrists via a hierarchical iterative algorithm[J]. IEEE Access, 2018, 9: 1.
- [10] ASADI-EYDIVAND M, EBADZADEH M M, SOLATI-HASHJIN M, et al. Cerebellum-inspired neural network solution of the inverse kinematics problem[J]. Springer Open Choice, 2015, 109(6): 561-574.
- [11] RAŞIT K. A neuro-simulated annealing approach to the inverse kinematics solution of redundant robotic manipulators[J]. Engineering with Computers, 2013, 29: 507-515.
- [12] KALRA P, MAHAPATRA P B, AGGARWAL D K. An evolutionary approach for solving the multimodal inverse kinematics problem of industrial robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(10): 1213-1229.
- [13] 王宪, 杨国梁, 张方生, 等. 基于牛顿-拉夫逊迭代法的 6 自由度机器人逆解算法[J]. 传感器与微系统, 2010(10): 116-118.
- WANG Xian, YANG Guoliang, ZHANG Fangheng, et al. An inverse kinematics algorithm of the general 6-DOF robot based on Newton-Raphson iteration[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2010(10): 116-118.
- [14] 韩磊, 刁燕, 张希斌, 等. 基于改进牛顿迭代法的手腕偏置型六自由度关节机器人逆解算法[J]. 机械传动,

- 2017(1): 127-130, 150.
- HAN Lei, DIAO Yan, ZHANG Xibin, et al. Inverse kinematics algorithm for 6-DOF joint robot with offset wrist based on modified newton iteration method[J]. Journal of Mechanical transmission, 2017(1): 127-130, 150.
- [15] SUGIHARA T. Solvability-unconcerned inverse kinematics by the Levenberg-Marquardt method[J]. IEEE Transactions on Robotics: A publication of the IEEE Robotics and Automation Society, 2011, 27(5): 984-991.
- [16] XU W, ZHANG J, LIANG B, et al. Singularity analysis and avoidance for robot manipulators with nonspherical wrists[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 63(1): 1.
- [17] 袁俊杰, 刘海涛, 潘国庆, 等. 基于 EtherCAT 和 TwinCAT3 的协作机器人控制系统设计[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(8): 3159-3168.
- YUAN Junjie, LIU Haitao, PAN Guoqing, et al. Design of collaborative robot control system based on EtherCAT and TwinCAT3[J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(8): 3159-3168.
- [18] 赵菡. 汽车轮毂数控抛光机床的设计与研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2014.
- ZHAO Wan. Research and design for NC polishing machine of vehicle wheels[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2014.
- 
- 作者简介: 刘志恒, 男, 1992 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机器人运动控制, 机器人仿真规划。  
E-mail: liuzhiheng@hit.edu.cn
- 李瑞峰(通信作者), 男, 1965 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为移动智能服务机器人系统、工业机器人技术、人工智能。  
E-mail: lrf100@hit.edu.cn