

DOI: 10.3901/JME.2022.14.054

# 一种串联机械臂关节空间刚度最优路径求解方法<sup>\*</sup>

马建伟 孙赫辰 闫惠腾 吕琦 高松  
(大连理工大学精密与特种加工教育部重点实验室 大连 116024)

**摘要:** 串联机械臂关节空间路径求解是机器人研究领域的热点。然而, 现有研究往往欠虑串联机械臂自身弱刚性, 致使串联机械臂在给定操作空间路径下关节空间路径选择不当, 影响运动精度。为提升串联机械臂在实际工作时刚度, 提出一种串联机械臂关节空间刚度最优路径求解方法。首先基于 Levenberg-Marquardt(LM)算法求取串联机械臂关节空间路径可行解, 进而通过定义串联机械臂刚度性能指标, 以刚度性能最大为目标, 实现串联机械臂关节空间刚度最优路径求解, 最后在 6 轴串联机械臂上进行方法验证。结果表明, 面向相同操作空间路径, 提出方法得到的串联机械臂关节空间路径刚度与基于连续迭代的数值法相比提高了 50% 以上, 证明提出方法可有效提升给定操作空间路径下串联机械臂运动刚度, 对提高串联机械臂运动精度, 抑制变形和颤振, 进而实现串联机械臂在机械加工领域的推广与应用具有重要意义。

**关键词:** 串联机械臂; 刚度; 关节空间路径; 路径规划; 动态性能

**中图分类号:** TP24

## A Solution Method for Optimal Stiffness Path in Joint Space of Serial Manipulator

MA Jianwei SUN Hechen YAN Huiteng LÜ Qi GAO Song  
(Key Laboratory for Precision and Non-traditional Machining Technology of Ministry of Education,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024)

**Abstract:** The solution of the joint space path for the serial manipulator is a research hotspot in robotics. However, most of existing studies often ignore the weak stiffness of the serial manipulator itself, which makes the joint space path selection of the serial manipulator improper under the given operation space path and affects the kinematic accuracy. In order to improve the stiffness of the serial manipulator in actual operation, a solution method for the optimal stiffness path in the joint space of the serial manipulator is proposed. Firstly, the feasible solutions of the joint space path are obtained based on Levenberg-Marquardt (LM) algorithm. Then, by defining the stiffness performance index of the serial manipulator, the optimal stiffness path in the joint space of the serial manipulator is solved with the goal of maximizing the stiffness performance. Finally, the method validation is carried out on a 6-axis serial manipulator. For the same operation space path, the stiffness of the joint space path of the serial manipulator obtained by the proposed method increases by more than 50% compared with the numerical method based on continuous iteration, which shows that the motion stiffness of the serial manipulator under the given operation space path can be improved effectively. The achievements are of great significance to improve the kinematic accuracy for the serial manipulator, suppress deformation and flutter, and realize the promotion and application of the serial manipulator in the field of mechanical processing.

**Key words:** serial manipulator; stiffness; joint space path; path planning; dynamic performance

## 0 前言

串联机械臂关节空间路径求解是基于串联机械

臂的逆运动学, 在给定串联机械臂操作空间路径的条件下, 求解串联机械臂各关节转角路径<sup>[1]</sup>。串联机械臂逆运动学存在多解情况, 将串联机械臂操作空间路径转换至关节空间时可得到多种关节空间路径, 需从中选择一种最优路径以满足动态性能需求。由于串联机械臂的开链式多杆串联结构特性, 其刚度远低于数控机床刚度, 约为机床刚度的  $1/50$ <sup>[2]</sup>,

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金面上(51975098)和辽宁省“兴辽英才计划”(XLYC1907006, XLYCYSZX1901, XLYC1801008)资助项目。20210326收到初稿, 20220115收到修改稿

在给定操作空间路径下若关节空间路径选择不当,易导致串联机械臂在运动过程中刚度不足,产生变形和颤振,难以满足机械领域运动精度要求。由此,需在串联机械臂关节空间的多种路径中选择一种刚度最优路径,以提升串联机械臂的运动刚度。

串联机械臂的逆运动学求解方法可分为解析法和数值法。解析法基于解析形式求解非线性方程组,适用于低自由度串联机械臂的逆运动学求解,对于 6 轴串联机械臂,当机械臂构型符合 Pieper 准则时<sup>[3]</sup>,可采用解析法求得封闭解。数值法基于连续迭代思想<sup>[4]</sup>,通过将前一位姿逆运动学求解结果作为后一位姿的迭代起点,求取串联机械臂操作空间路径上各位姿的逆运动学解。然而,基于连续迭代的数值法仅能收敛至串联机械臂逆运动学单解,难以结合串联机械臂逆运动学多解特性进行性能优选。此外,基于连续迭代的数值法无法控制迭代方向,串联机械臂关节空间路径易出现不满足关节极限约束的问题。目前,面向串联机械臂关节空间路径求解的研究主要集中于插补算法,即将路径求解问题转化为插值拟合问题,通过改进算法实现路径优化,提升串联机械臂运动的平稳性。XU 等<sup>[5]</sup>基于 5 次 B 样条曲线,采用多目标粒子群优化算法,在时间最优、距离最优和能量最优 3 个目标下对串联机械臂关节空间路径进行优化,通过模糊评判从最优解集合中选择潜在解;董甲等<sup>[6]</sup>使用改进的 B 样条曲线求解串联机械臂关节空间路径,得到了相对平滑的运动轨迹,兼具实时性和高精度的优点;孔庆博等<sup>[7]</sup>提出了一种结合 5 次多项式插值与 B 样条插值的串联机械臂关节空间路径优化方法,优化后的运动轨迹具有良好的平滑度,有效消除了突变现象。然而,上述方法均未考虑串联机械臂自身的弱刚性,特别当串联机械臂应用于机械加工领域时,易导致运动过程中刚度不足,产生变形和颤振,影响运动精度。

面向串联机械臂刚度的研究主要集中于刚度建模和参数辨识等方面。DUMAS 等<sup>[8]</sup>分析了串联机械臂在工作空间中的灵巧性,基于守恒同余变换(Conservative congruence transformation, CCT),建立了串联机械臂的静刚度模型,提出了一种高鲁棒性的 6 轴串联机械臂关节刚度辨识方法;GUO 等<sup>[9]</sup>研究了串联机械臂末端线位移与作用力的关系,基于平移柔度子矩阵,提出了一种新的刚度性能评价方法;汪博文<sup>[10]</sup>研究了多机械臂协同系统的刚度,推导了多机械臂协同系统的通用静刚度模型,提出了基于刚度椭球的 3 种刚度性能指标。尽管在串联机

械臂刚度建模方面开展了大量的研究工作,但以刚度特性为约束的串联机械臂关节空间路径规划尚缺乏系统研究。

基于上述,提出了一种串联机械臂关节空间刚度最优路径求解方法,具体流程如图 1 所示。首先,基于 LM 算法,求取串联机械臂在给定操作空间路径下关节空间路径的全部可行解;其次,基于串联机械臂的静刚度模型,针对串联机械臂特点,合理定义刚度性能指标,并计算关节空间路径可行解对应的刚度性能指标;最后,以刚度性能最大为目标,在给定操作空间路径下,实现串联机械臂关节空间刚度最优路径求解。

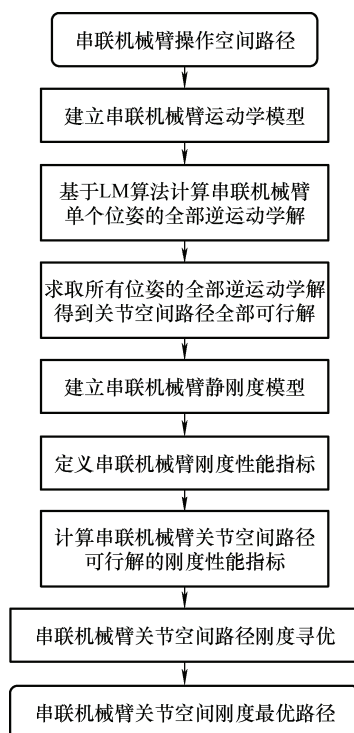


图 1 串联机械臂关节空间刚度最优路径求解方法流程图

## 1 串联机械臂逆运动学求解

针对如图 2 所示的通用 6 轴串联机械臂,求解串联机械臂逆运动学可行解。

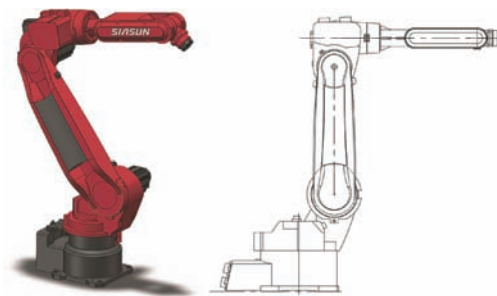


图 2 6 轴串联机械臂示意图

建立串联机械臂的运动学模型。Denavit-Hartenberg(DH)参数法<sup>[11]</sup>是一种通过齐次坐标变换描述机构运动关系的方法,主要应用于机械臂运动学建模中。DH 参数法分为标准版和改进版,改进的 DH 参数法克服了标准版在对树状或闭链结构建模时产生歧义的缺点,采用改进的 DH 参数法建立串联机械臂的运动学模型。

由于解析法无法求解不满足 Pieper 准则的 6 轴串联机械臂<sup>[12]</sup>,为提升提出方法的适用范围,采用数值法对串联机械臂逆运动学求解。LM 算法<sup>[13]</sup>作为一种基于迭代寻优的数值法,综合了梯度下降法和高斯牛顿法的优点,在保证全局收敛性的同时提高了收敛速度<sup>[14]</sup>。基于 LM 算法求取串联机械臂逆运动学可行解的具体方法如图 3 所示。

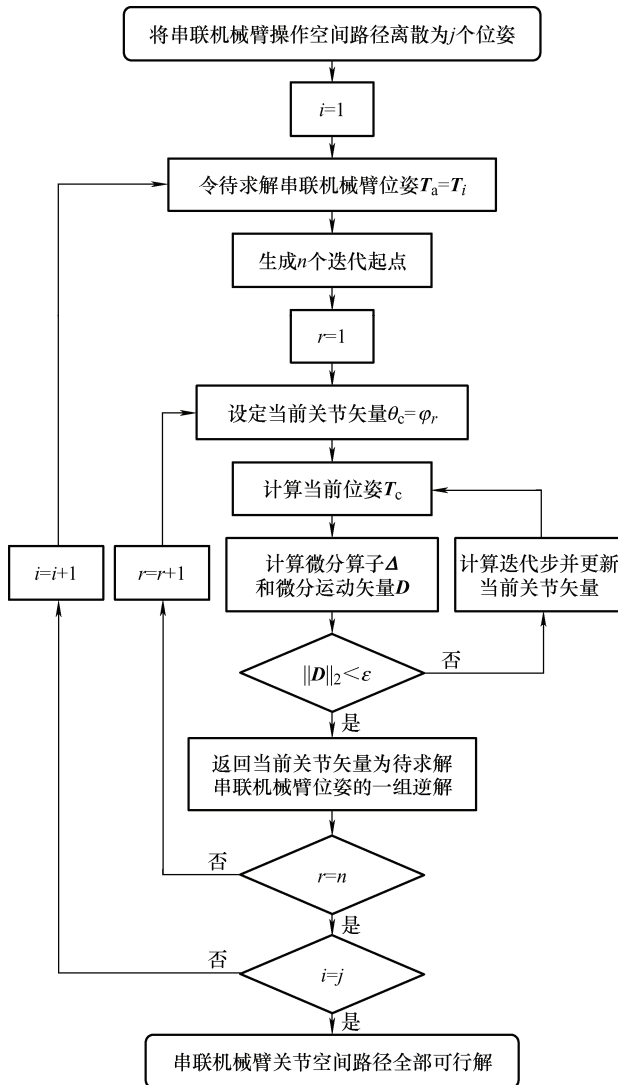


图 3 串联机械臂逆运动学求解流程图

首先,将串联机械臂操作空间路径离散为  $j$  个位姿  $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_j (i \in [1, j])$ , 并令待求解串联机械臂位姿  $T_a = T_i$ 。

鉴于蒙特卡罗法是一种利用随机数进行数值计算的方法,使用蒙特卡罗法构造迭代起点,生成  $n$  个满足关节极限约束的迭代起点

$$\varphi_{r,v} = \varphi_{v,m} + (\varphi_{v,M} - \varphi_{v,m}) \times rand \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_r = (\varphi_{r,1}, \varphi_{r,2}, \varphi_{r,3}, \varphi_{r,4}, \varphi_{r,5}, \varphi_{r,6})^T \quad (2)$$

式中,  $\varphi_{r,v} (r \in [1, n], v \in [1, 6])$  为第  $r$  个迭代起点处串联机械臂第  $v$  个关节角,  $\varphi_{v,M}$  和  $\varphi_{v,m}$  分别为串联机械臂第  $v$  个关节角的最大值和最小值,  $\boldsymbol{\varphi}_r$  为第  $r$  个迭代起点处串联机械臂关节矢量,  $rand$  函数生成区间  $(0, 1)$  内的随机数。

使用正运动学算法计算  $\boldsymbol{\varphi}_r$  对应的串联机械臂位姿  $T_r$ , 并将  $\boldsymbol{\varphi}_r$  和  $T_r$  设为当前关节矢量  $\boldsymbol{\theta}_c$  和当前位姿  $T_c$ 。进而,基于 LM 算法,结合串联机械臂运动学模型,确定迭代方向与迭代步长。按照式(3)计算微分算子  $\Delta$ 。通过微分算子  $\Delta$  可确定微分运动矢量  $D = (dx, dy, dz, \delta x, \delta y, \delta z)^T$  及其二阶范数  $\|D\|_2$ 。

$$\Delta = T_a T_c^{-1} - I = \begin{pmatrix} 0 & -\delta z & \delta y & dx \\ \delta z & 0 & -\delta x & dy \\ -\delta y & \delta x & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

判断  $\|D\|_2 < \varepsilon$  是否成立,其中  $\varepsilon$  为设定的迭代精度。若成立,返回当前串联机械臂关节矢量  $\boldsymbol{\theta}_c$  作为待求解串联机械臂位姿  $T_a$  的一组逆运动学解。若不成立,执行以下步骤:使用微分变换法,根据  $\boldsymbol{\theta}_c$  计算串联机械臂的雅可比矩阵  $J$ ;按照式(4)、(5)计算迭代步  $d\boldsymbol{\theta}$ ,并按照式(6)更新  $\boldsymbol{\theta}_c$ ;使用正运动学算法计算当前串联机械臂位姿  $T_c$ ;按照式(3)更新微分运动算子  $\Delta$  和微分运动矢量的二阶范数  $\|D\|_2$ 。重复上述步骤,直至  $\|D\|_2 < \varepsilon$  成立,返回  $\boldsymbol{\theta}_c$  作为待求解串联机械臂位姿  $T_a$  的一组逆运动学解。

$$\mu = 0.001 \times \|D\|_2 \quad (4)$$

$$d\boldsymbol{\theta} = -(J^T(\boldsymbol{\theta})J(\boldsymbol{\theta}) + \mu I)^{-1} J^T(\boldsymbol{\theta})D \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\theta}_c = \boldsymbol{\theta}_c + d\boldsymbol{\theta} \quad (6)$$

然后,依次计算  $n$  个迭代起点的迭代结果,删除不满足串联机械臂关节极限约束的结果和重复的结果,得到待求解串联机械臂位姿  $T_a$  的全部逆运动学可行解。

最后,依次计算串联机械臂操作空间路径所有位姿的全部逆运动学可行解,得到串联机械臂关节空间路径的全部可行解  $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_i, \dots, \boldsymbol{q}_j (i \in [1, j])$ 。其中,  $\boldsymbol{q}_i$  包含  $T_i$  对应的全部逆运动学可行解。

## 2 串联机械臂关节空间刚度最优路径求解

为在给定操作空间路径下提升串联机械臂刚度，提出了串联机械臂关节空间刚度最优路径求解方法。首先推导了串联机械臂关节刚度与末端操作刚度的映射关系，建立串联机械臂的静刚度模型，得到串联机械臂操作空间刚度矩阵；其次，设计采用力-线位移刚度子矩阵的最小特征值作为串联机械臂的刚度性能指标，该指标是与串联机械臂关节角相关的函数；最后，计算关节空间路径全部可行解对应的刚度性能指标，通过刚度性能寻优求取串联机械臂关节空间刚度最优路径。

### 2.1 建立静刚度模型

串联机械臂末端在外载荷作用下会产生相应变形，抵抗外载荷变形的能力称为串联机械臂刚度。仅考虑串联机械臂抵抗静载荷变形的能力，即串联机械臂的静刚度。研究表明，串联机械臂末端在承受外载荷时，其变形主要受驱动系统和传动系统的刚度影响，串联机械臂关节处变形往往占总变形的70%以上<sup>[15]</sup>。由此引入连杆刚性假设和关节柔性假设，将变形集中于串联机械臂关节处。当串联机械臂末端变形足够小时，根据胡克定律，二者近似满足线性关系<sup>[16]</sup>

$$dF = KdX \quad (7)$$

式中， $dF = (df_x, df_y, df_z, dm_x, dm_y, dm_z)^T$  为包含力和力矩的6维微分力矢量， $dX = (ds_x, ds_y, ds_z, dt_x, dt_y, dt_z)^T$  为包含平移变形和扭转变形的6维微分变形矢量， $K$  为串联机械臂的操作刚度矩阵。

忽略非线性因素，将串联机械臂各关节等效为线性扭簧，得到关节力矩与关节变形的关系<sup>[17]</sup>

$$d\Gamma = K_\theta d\theta \quad (8)$$

式中， $d\Gamma = (d\tau_1, d\tau_2, \dots, d\tau_6)^T$  为驱动关节位置变化的6维微分关节力矩矢量， $d\theta = (d\theta_1, d\theta_2, \dots, d\theta_6)^T$  为6维微分关节变形矢量， $K_\theta$  为串联机械臂的关节刚度矩阵，它是一个由各关节刚度系数组成的对角阵，可通过试验辨识得到<sup>[18]</sup>。

根据串联机械臂微分运动方程<sup>[11]</sup>，得到串联机械臂末端变形与关节变形的关系

$$dX = Jd\theta \quad (9)$$

式中， $J$  为串联机械臂的雅可比矩阵。

忽略串联机械臂关节摩擦力和自重的影响，基于虚功原理<sup>[11]</sup>，得到串联机械臂末端受力与关节力矩的关系

$$\Gamma = J^T F \quad (10)$$

对式(10)两端微分，并代入式(7)~(9)，整理得到串联机械臂的静刚度模型

$$K = J^{-T} (K_\theta - K_c) J^{-1} \quad (11)$$

式中， $K_c$  为串联机械臂的补偿刚度矩阵。在常规外载荷下，可忽略  $K_c$  对串联机械臂末端变形的影响<sup>[19-20]</sup>，最终得到简化后的串联机械臂静刚度模型

$$K = J^{-T} K_\theta J^{-1} \quad (12)$$

### 2.2 定义刚度性能指标

随串联机械臂位姿变化，串联机械臂的操作刚度矩阵是一个对称正定矩阵<sup>[21]</sup>。由于操作刚度矩阵为张量判据，无法直观评价串联机械臂刚度，因此需定义一种新的标量判据，作为串联机械臂的刚度性能指标。

串联机械臂的操作刚度矩阵由4个子矩阵组成

$$K = \begin{pmatrix} K_{f-s} & K_{f-t} \\ K_{m-s} & K_{m-t} \end{pmatrix} \quad (13)$$

式中， $K_{f-s}$  为力-线位移刚度子矩阵， $K_{f-t}$  为力-角位移刚度子矩阵， $K_{m-s}$  为力矩-线位移刚度子矩阵， $K_{m-t}$  为力矩-角位移刚度子矩阵，各子矩阵的元素量纲不同<sup>[2]</sup>。

由于串联机械臂末端线位移对末端变形影响最大，因此仅考虑力与线位移间的关系<sup>[22]</sup>

$$f = K_{f-s} s \quad (14)$$

式中， $f = (f_x, f_y, f_z)^T$  为3维力矢量， $s = (s_x, s_y, s_z)^T$  为3维线位移矢量。

分析串联机械臂末端受单位作用力时，串联机械臂末端变形的大小和方向

$$\|f\|^2 = f^T f = 1 \quad (15)$$

将式(14)代入式(15)

$$s^T K_{f-s}^T K_{f-s} s = 1 \quad (16)$$

式(16)描述的是一个三维空间的椭球面，称为刚度椭球<sup>[16]</sup>，如图4所示。椭球的主轴方向为  $K_{f-s}^T K_{f-s}$  的特征矢量方向，椭球的半主轴长度为  $K_{f-s}^T K_{f-s}$  的特征值，即  $K_{f-s}$  的奇异值平方。由于  $K_{f-s}$

为对称正定矩阵,  $\mathbf{K}_{f-s}$  的奇异值即为  $\mathbf{K}_{f-s}$  的特征值。

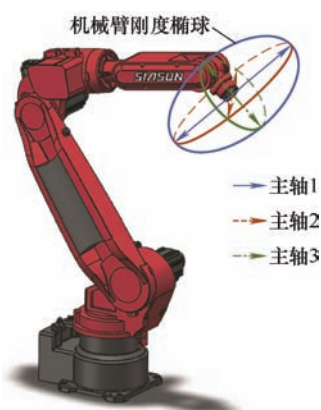


图 4 串联机械臂在某一位姿下的刚度椭球示意图

刚度椭球的最短主轴体现了串联机械臂在某一位姿下的最小刚性。出于串联机械臂刚度最差情况考虑, 定义力-线位移刚度子矩阵的最小特征值为串联机械臂的刚度性能指标

$$k = \lambda_m(\mathbf{K}_{f-s}) \quad (17)$$

计算串联机械臂在第  $i$  个位姿处第  $p$  组逆运动学可行解对应的操作刚度矩阵  $\mathbf{K}_{i,p}$  ( $p \in [1,8]$ )。通过操作刚度矩阵  $\mathbf{K}_{i,p}$  可确定力-线位移刚度子矩阵  $\mathbf{K}_{f-s,i,p}$  和它的最小特征值  $\lambda_m(\mathbf{K}_{f-s,i,p})$ , 得到串联机械臂在第  $i$  个位姿处第  $p$  组逆运动学可行解的刚度性能指标

$$\mathbf{K}_{i,p} = \mathbf{J}_{i,p}^T \mathbf{K} \mathbf{J}_{i,p}^{-1} \quad (18)$$

$$k_{i,p} = \lambda_m(\mathbf{K}_{f-s,i,p}) \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{J}_{i,p}$  为串联机械臂在第  $i$  个位姿处第  $p$  组逆运动学可行解对应的雅可比矩阵。

### 2.3 路径刚度寻优

基于式(18)、(19), 依次计算串联机械臂关节空间路径全部逆运动学可行解的刚度性能指标, 并按照式(20)确定串联机械臂在第  $i$  个位姿处逆运动学可行解的刚度性能指标的最大值

$$k_{i,M} = \max_{p \in [1,8]} \{k_{i,p}\} \quad (20)$$

记录刚度性能指标的最大值对应的逆运动学可行解的序号  $u_i$ , 按照刚度最优序号  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_j)^T$  ( $i \in [1, j]$ ), 寻优得到串联机械臂所有位姿的逆运动学最优解  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_j$  ( $i \in [1, j]$ ), 即串联机械臂关节空间刚度最优路径。

## 3 方法验证

由于串联机械臂的刚度性能指标非可观测物理量, 为验证提出方法的可行性和有效性, 在 MATLAB R2018b 调用 Robotics Toolbox 10.2.0 工具箱, 对提出的关节空间刚度最优路径求解方法进行仿真测试。随机生成 5 组串联机械臂操作空间路径, 如表 1 所示。

表 1 串联机械臂操作空间路径

序号	初始位姿 $T_0$	终止位姿 $T_e$
1	$\begin{pmatrix} -0.022 & -0.094 & 0.995 & 784.3 \\ -0.999 & -0.010 & -0.023 & -613.5 \\ 0.013 & -0.996 & -0.094 & 1113.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.793 & 0.579 & 0.191 & 483.4 \\ -0.504 & 0.446 & 0.740 & 317.9 \\ 0.343 & -0.683 & 0.645 & 1233.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -0.646 & -0.757 & 0.095 & -318.3 \\ -0.149 & 0.003 & -0.989 & -1032.4 \\ 0.748 & -0.653 & -0.115 & 930.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.649 & 0.464 & 0.604 & 989.3 \\ -0.665 & -0.731 & -0.153 & -824.7 \\ 0.371 & -0.500 & 0.783 & 854.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -0.110 & 0.570 & 0.814 & -410.7 \\ -0.954 & -0.291 & 0.076 & -1007.3 \\ 0.280 & -0.768 & 0.576 & 990.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.485 & 0.282 & 0.828 & 1106.1 \\ 0.794 & 0.539 & 0.282 & -426.4 \\ -0.367 & 0.794 & -0.485 & 721.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -0.298 & -0.377 & 0.877 & -130.1 \\ 0.726 & -0.686 & -0.048 & -696.4 \\ 0.620 & 0.622 & 0.478 & 1112.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.850 & 0.512 & 0.120 & 437.6 \\ -0.342 & 0.712 & -0.614 & -28.8 \\ -0.400 & 0.481 & 0.780 & 1552.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0.045 & 0.999 & -0.018 & 340.6 \\ -0.874 & 0.048 & 0.483 & 68.7 \\ 0.484 & -0.006 & 0.875 & 1484.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.388 & 0.901 & 0.196 & -801.0 \\ -0.920 & -0.392 & -0.016 & -333.2 \\ 0.062 & -0.187 & 0.980 & 1181.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

以 6 轴串联机械臂 SR20A 为试验对象, 采用改进的 DH 参数法建立串联机械臂的运动学模型, 如图 5 所示。进而, 确定串联机械臂的关节变量和连杆参数: 关节角  $\theta_i$ 、连杆转角  $\alpha_i$ 、连杆长度  $a_i$ 、连杆偏距  $d_i$ , 如表 2 所示。

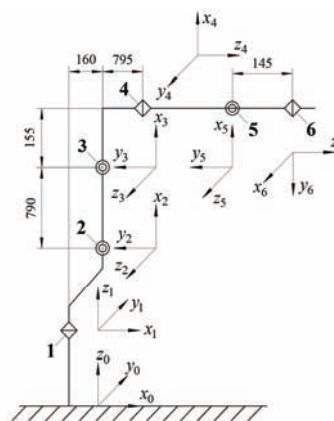


图 5 SR20A 运动学模型



表 2 SR20A 的改进 DH 参数

连杆 $l$	$\theta_l / (^\circ)$	$\alpha_l / (^\circ)$	$a_l / \text{mm}$	$d_l / \text{mm}$
1	$\theta_1$	0	0	0
2	$\theta_2 + 90$	90	160	0
3	$\theta_3$	0	790	0
4	$\theta_4$	90	155	795
5	$\theta_5$	-90	0	0
6	$\theta_6 + 90$	90	0	145

针对第 1 组串联机械臂操作空间路径，串联机械臂末端的初始位姿和终止位姿分别为

$$\begin{cases} T_o = \begin{pmatrix} -0.022 & -0.094 & 0.995 & 784.3 \\ -0.999 & -0.010 & -0.023 & -613.5 \\ 0.013 & -0.996 & -0.094 & 1113.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_e = \begin{pmatrix} 0.793 & 0.579 & 0.191 & 483.4 \\ -0.504 & 0.446 & 0.740 & 317.9 \\ 0.343 & -0.683 & 0.645 & 1233.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

将串联机械臂操作空间路径离散为 10 个位姿  $T_1, T_2, \dots, T_{10}$ ，其中， $T_1 = T_o$ ， $T_{10} = T_e$ ，令待求解的串联机械臂位姿  $T_a = T_1$ 。设定迭代起点个数为 30，基于蒙特卡罗法，按照式(1)、(2)生成满足关节极限约束的串联机械臂关节角的随机值。将 30 个迭代起点依次代入 LM 算法中，按照式(3)~(6)经循环计算并删除不满足串联机械臂关节极限约束的结果和重复的结果后，得到待求解串联机械臂位姿  $T_a$  的全部逆运动学可行解，如图 6 所示，计算结果误差小于  $1 \times 10^{-7}$ 。依次计算串联机械臂操作空间路径所有位姿的全部逆运动学可行解  $q_1, q_2, \dots, q_{10}$ ，其中， $q_i (i \in [1, 10])$  包含  $T_i$  的至多 8 组逆运动学可行解。

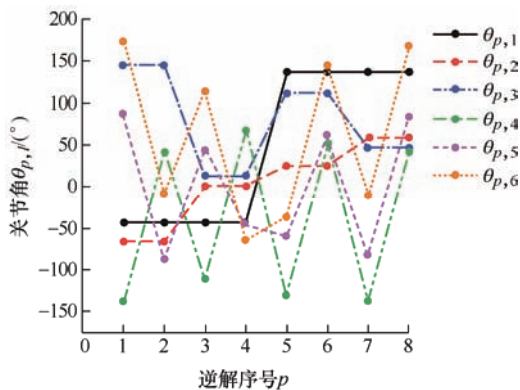


图 6 待求解串联机械臂位姿的逆运动学可行解

建立串联机械臂的静刚度模型。对于特定串联机械臂，其关节刚度系数为定值。串联机械臂的关节刚度系数作为求解刚度性能指标的一个常量，不

影响路径刚度的变化趋势。给定串联机械臂各关节刚度系数，如表 3 所示。按照式(18)、(19)计算串联机械臂关节空间路径可行解  $q_1, q_2, \dots, q_{10}$  对应的刚度性能指标  $k_1, k_2, \dots, k_{10}$ ，其中， $k_i (i \in [1, 10])$  包含  $q_i$  中所有可行解对应的刚度性能指标，如图 7 所示。

表 3 SR20A 的关节刚度系数 N·mm/rad

$K_{\theta 1}$	$K_{\theta 2}$	$K_{\theta 3}$	$K_{\theta 4}$	$K_{\theta 5}$	$K_{\theta 6}$
$7.65 \times 10^7$	$5.76 \times 10^7$	$2.43 \times 10^8$	$8.49 \times 10^7$	$3.43 \times 10^7$	$3.88 \times 10^7$

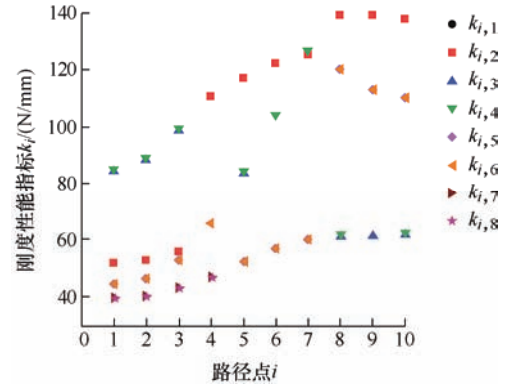


图 7 串联机械臂关节空间路径可行解的刚度性能指标

按照式(20)确定串联机械臂关节空间路径可行解的刚度性能指标的最大值  $k_{1,M}, k_{2,M}, \dots, k_{10,M}$ ，经寻优后得到串联机械臂所有位姿对应的逆运动学最优解  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{10}$ ，即串联机械臂关节空间刚度最优路径，如图 8 所示。

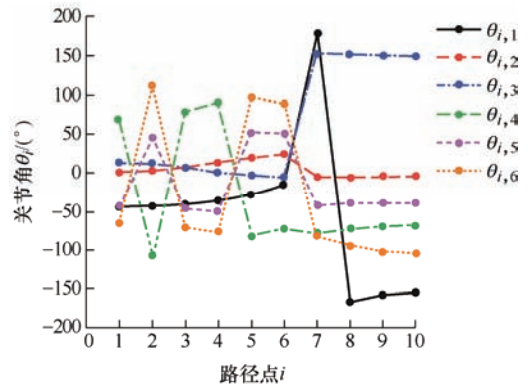


图 8 串联机械臂关节空间刚度最优路径

分别使用提出方法与基于连续迭代的数值法在给定串联机械臂操作空间路径下求解关节空间路径，两种路径的刚度对比如图 9 所示。在相同操作空间路径下，提出方法求得关节空间路径的刚度性能指标与基于连续迭代的数值法相比提高了 110.56%~134.30%，各路径点的平均刚度提高了 121.84%，在给定操作空间路径下显著提升了串联机械臂刚度。

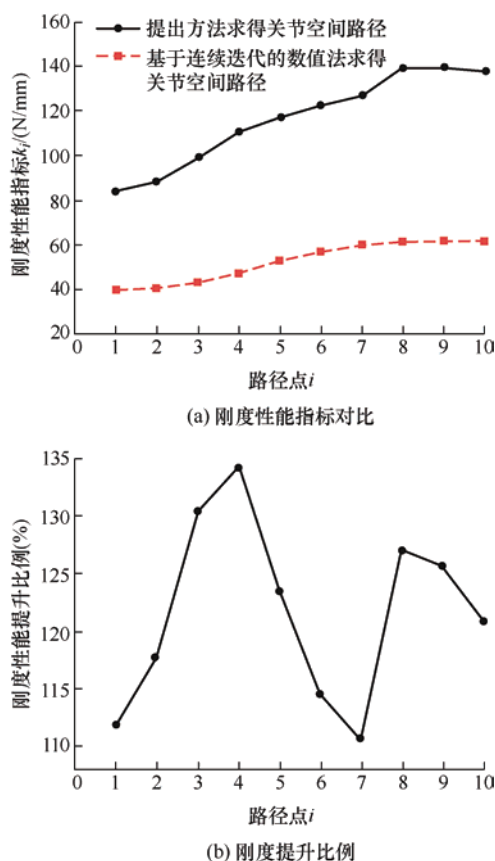


图 9 串联机械臂关节空间路径刚度对比图

基于上述流程,依次对第 2~5 组串联机械臂操作空间路径进行仿真测试,对比提出方法与基于连续迭代的数值法求得关节空间路径的平均刚度提升比例,如图 10 所示。在 5 组串联机械臂操作空间路径下,相较于基于连续迭代的数值法,提出方法求得关节空间路径的平均刚度均提高了 50% 以上,有效提升了串联机械臂运动刚度。

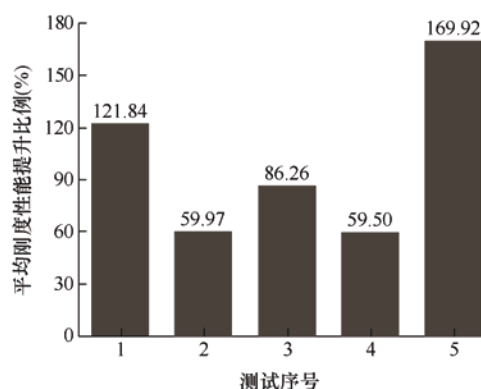


图 10 串联机械臂关节空间路径平均刚度提升比例

## 4 结论

(1) 针对串联机械臂在给定操作空间路径下关节空间路径选择不当、导致串联机械臂刚度不足的问题,提出了一种串联机械臂关节空间刚度最优路

径求解方法。

(2) 通过定义力-线位移刚度子矩阵的最小特征值作为刚度性能指标,直观体现了串联机械臂末端操作刚度,且出于最差情况考虑,反映了串联机械臂刚度的薄弱环节。

(3) 基于典型 6 轴串联机械臂进行验证,在给定操作空间路径下,提出的串联机械臂关节空间刚度最优路径求解方法与基于连续迭代的数值法相比,得到的关节空间路径的刚度性能指标提高了 50% 以上。

(4) 测试结果表明,提出方法能够有效提升给定操作空间路径下串联机械臂运动刚度,对提高串联机械臂运动精度,抑制变形和颤振,进而实现串联机械臂在机械加工领域的推广与应用具有重要意义。

## 参 考 文 献

- [1] 蔡自兴, 谢斌. 机器人学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.  
CAI Zixing, XIE Bin. Robotics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2015.
- [2] 张永贵, 刘晨荣, 刘鹏. 6R 工业机器人刚度分析[J]. 机械设计与制造, 2015(2): 257-260.  
ZHANG Yonggui, LIU Chenrong, LIU Peng. 6R industrial robot stiffness analysis[J]. Machinery Design & Manufacture, 2015(2): 257-260.
- [3] SICILIANO B, KHATIB O. Springer handbook of robotics[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [4] 王宪, 杨国梁, 张方生, 等. 基于牛顿-拉夫逊迭代法的 6 自由度机器人逆解算法[J]. 传感器与微系统, 2010, 29(10): 116-118.  
WANG Xian, YANG Guoliang, ZHANG Fangsheng, et al. An inverse kinematics algorithm of the general 6-DOF robot based on Newton-Raphson iteration[J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2010, 29(10): 116-118.
- [5] XU Zhihao, LI Sheng, CHEN Qingwei, et al. MOPSO based multi-objective trajectory planning for robot manipulators[C]//IEEE 2nd International Conference on Information Science and Control Engineering. Shanghai: IEEE, 2015: 826-830.
- [6] 董甲甲, 王太勇, 董靖川, 等. 改进 B 样条曲线应用于 6R 机器人轨迹优化[J]. 中国机械工程, 2018, 29(2): 193-200.  
DONG Jiajia, WANG Taiyong, DONG Jingchuan, et al. Applications of improved B-spline curves to 6R robot trajectory optimization[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(2): 193-200.

- [7] 孔庆博, 袁亮, 蒋伟. 一种改进的工业机器人轨迹规划方法研究[J]. 机械传动, 2019, 43(2): 30-36.  
KONG Qingbo, YUAN Liang, JIANG Wei. Research of an improved trajectory planning method for industrial robot[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(2): 30-36.
- [8] DUMAS C, CARO S, GARNIER S, et al. Joint stiffness identification of six-revolute industrial serial robots[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(4): 881-888.
- [9] GUO Yingjie, DONG Huiyue, KE Yinglin. Stiffness-oriented posture optimization in robotic machining applications[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2015, 35: 69-76.
- [10] 汪博文. 多机械臂协同加工系统静刚度建模与优化研究[D]. 上海: 上海大学, 2018.  
WANG Bowen. The research on stiffness modeling and optimization of multiple coordinated robots system[D]. Shanghai: Shanghai University, 2018.
- [11] 熊有伦, 李文龙, 陈文斌, 等. 机器人学: 建模、控制与视觉[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2018.  
XIONG Youlun, LI Wenlong, CHEN Wenbin, et al. Robotics: Modeling, control and vision[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2018.
- [12] 林阳, 赵欢, 丁汉. 基于多种群遗传算法的一般机器人逆运动学求解[J]. 机械工程学报, 2017, 53(3): 1-8.  
LIN Yang, ZHAO Huan, DING Han. Solution of inverse kinematics for general robot manipulators based on multiple population genetic algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(3): 1-8.
- [13] 习国泰. 改进 Levenberg-Marquardt 算法的复杂度分析[D]. 上海: 上海交通大学, 2012.  
XI Guotai. On the complexity of the modified Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear equations[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2012.
- [14] VASIN V V, PERESTORONINA G Y. The Levenberg-Marquardt method and its modified versions for solving nonlinear equations with application to the inverse gravimetry problem[J]. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2013, 280(Suppl.): 174-182.
- [15] ABELE E, WEIGOLD M, ROTHENBÜCHER S. Modeling and identification of an industrial robot for machining applications[J]. CIRP Annals, 2007, 56(1): 387-390.
- [16] 侯鹏辉. 机器人加工系统刚度性能优化研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2013.  
HOU Penghui. Study on stiffness performance optimization for robot machining system[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2013.
- [17] 陈玉山. 6R 型工业机器人关节刚度辨识与实验研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.  
CHEN Yushan. Joint stiffness identification of 6R industrial robot and experimental verification[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011.
- [18] YANG Kun, YANG Wenyu, CHENG Guangdong, et al. A new methodology for joint stiffness identification of heavy duty industrial robots with the counterbalancing system[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2018, 53: 58-71.
- [19] ALICI G, SHIRINZADEH B. Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005, 21(4): 554-564.
- [20] LIN Yang, ZHAO Huan, DING Han. Spindle configuration analysis and optimization considering the deformation in robotic machining applications[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2018, 54: 83-95.
- [21] CHEN S, KAO I. Conservative congruence transformation for joint and Cartesian stiffness matrices of robotic hands and fingers[J]. The International Journal of Robotics Research, 2000, 19(9): 835-847.
- [22] CHEN Chen, PENG Fangyu, YAN Rong, et al. Stiffness performance index based posture and feed orientation optimization in robotic milling process[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2019, 55: 29-40.

作者简介: 马建伟(通信作者), 男, 1984 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为难加工材料曲面加工、激光精密加工、机器人辅助加工规划及控制。

E-mail: mjlw2011@dlut.edu.cn

孙赫辰, 男, 1998 年出生。主要研究方向为机器人系统刚度识别与轨迹优化。

E-mail: free\_dynasty@163.com

闫惠腾, 男, 1994 年出生, 博士研究生。主要研究方向为大型复杂构件机器人辅助加工方法。

E-mail: yanhuiteng@mail.dlut.edu.cn

吕琦, 男, 1996 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为机器人动力学参数辨识和视觉跟踪导引。

E-mail: 346308962@qq.com

高松, 男, 1995 年出生。主要研究方向为机器人系统运动学和动力学约束下的时间最优轨迹规划。

E-mail: 657259920@qq.com