

DOI: 10.3901/JME.2022.09.098

# 滚珠丝杠传动系统线性变参数动力学模型 试验建模方法

黄 涛<sup>1,2</sup> 杜双江<sup>1,2</sup> 张 钊<sup>1,2</sup> 曹华军<sup>1,2</sup>

(1. 重庆大学机械与运载工程学院 重庆 400044;

2. 重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆 400044)

**摘要:** 准确建立滚珠丝杠传动系统动力学模型是实现高速、高加速度和高精度运动控制的基础。滚珠丝杠传动系统的动力学特性具有不确定性, 实际是随位置、负载质量等变量变化的, 数学上应描述为变参数模型。因此, 一种滚珠丝杠传动系统线性变参数(Linear parameter varying, LPV)动力学模型实验建模方法被提出。通过局部频域辨识方法获得非参数模型, 并采用非线性最小二乘方法得到模态叠加形式的传递函数模型。采用傅里叶级数形式的正交基函数拟合方法, 对不同位置下的局部传递函数模型参数进行拟合, 获得与位置相关的参数模型。基于拟合结果, 选择合适的工况点进行三次样条插值, 得到与位置、负载质量相关的 LPV 模型。所提出方法应用于滚珠丝杠试验台, 获得了一个与全局位置、负载质量相关性高的 LPV 模型, 为实现基于 LPV 模型的高速、高精度运动控制提供了基础。

**关键词:** 滚珠丝杠; 线性变参数; 系统辨识; 参数拟合; 插值

**中图分类号:** TH113; N945

## Experimental Modeling of Linear Parameter Varying Dynamics Model of Ball Screw Drive System

HUANG Tao<sup>1,2</sup> DU Shuangjiang<sup>1,2</sup> ZHANG Qian<sup>1,2</sup> CAO Huajun<sup>1,2</sup>

(1. College of Mechanical and Vehicle Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044;

2. State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract:** Accurate modeling of the dynamics of ball screw drive system is the foundation for high speed, high acceleration and high precision motion control. The dynamics of the ball screw drive system has uncertainties and actually changes with position, load and other variables, which should be described as a variable parameter model in mathematics. Therefore, an experimental modeling method of linear parameter varying (LPV) dynamic model of ball screw drive system is proposed. Specially, the nonparametric model is obtained by the local frequency domain identification method, and the transfer function model in the form of modal superposition is obtained by the nonlinear least squares method. Then, an orthogonal basis function fitting method in the form of Fourier series is utilized to fit the local transfer function model parameters at different positions to obtain the position-dependent parameter model. Based on the fitting results, the position- and load-dependent LPV model is obtained by selecting suitable working points for third spline interpolation. The proposed method is applied to a developed ball screw experimental system to obtain a LPV model with high correlation to the full working position and load, which provides a basis for realizing high-speed and high-precision motion control based on the LPV model.

**Key words:** ball screw; linear parameter varying; system identification; parameter fitting; interpolation

\* 国家重点研发计划(2018YFB1701203)、国家自然科学基金(51805053)和中央高校基本科研业务费专项资金(2020CDJGFJX010)资助项目。20210518收到初稿, 20220108收到修改稿

## 0 前言

滚珠丝杠传动系统将电动机的旋转运动转化为螺母带动工件台的平移运动, 具有成本相对较低、刚性较高、摩擦力小、对外力和惯性变化的敏感性较低等优点, 广泛应用于工业自动化和机器人领域的高精度定位系统<sup>[1-3]</sup>。尤其是以滚珠丝杠为主要传动元件的机床进给系统正朝着高速、高精度方向发展, 要求系统具备更高的控制带宽。同时对动力学模型在全工况条件下描述其动态特性的准确性提出了更高的挑战。

在低控制带宽情况下, 可将滚珠丝杠假设为刚体。但随着控制带宽的增加, 系统的低阶谐振动态特性被激发, 这会引起丝杠的轴向振动和扭转振动, 从而影响系统的定位和跟踪精度<sup>[4-5]</sup>, 这对传统的滚珠丝杠动力学建模方法提出了挑战。传统的滚珠丝杠动力学建模方法主要有 3 种: 集中质量法、有限元法和混合式建模法。集中质量建模是最常用的建模方法, 它以有限质量块、无质量弹簧为代表的弹性结构和以等效阻尼单元为代表的结构阻尼单元代替滚珠丝杠传动系统的质量单元, 其优点是计算量小, 能较好反映系统在低频时的动力学特性, 缺点是在控制带宽较高时不能准确描述其动力学特性<sup>[6]</sup>。有限元法对系统进行有限元离散, 然后对各单元进行插值, 从而可通过模态分析法获得系统的频率响应动态特性, 优点是当离散数量较多时, 能准确反映系统的各个柔性模态, 缺点是计算量大, 模型阶数过高, 难以适用于实际运动控制系统<sup>[7]</sup>。混合式建模法是集中质量法和有限元法的结合, 将滚珠丝杠进给系统中丝杠的有限元模型与其他部件的集中质量模型进行混合建模, 分析计算系统的频率响应动态特性, 该方法结合了前面两种方法的优点, 然而没有考虑到系统在连续运行时动态特性的变化<sup>[8]</sup>。上述三种建模方法都不能描述滚珠丝杠传动系统在运行过程中由于位置和负载质量变化所引起的动态特性变化。

因此, 为了实现全局高速、高精度伺服控制, 需要获得准确的线性变参数 (Linear parameter varying, LPV) 动力学模型, 从而降低模型的保守性, 提高控制系统的性能<sup>[9]</sup>。近年来, 众多学者针对这个问题, 提出了新的建模方法, 如采用 Ritz 级数对滚珠丝杠系统进行分析, 将丝杠视为分布式参数质量系统, 通过选择合适的边界条件, 获得了与工件台位置相关的动力学模型<sup>[10-11]</sup>。然而, Ritz 级数的

滚珠丝杠理论建模与实验建模相比, 存在较大建模误差。因此, 如何准确获得滚珠丝杠在连续运行时动力学特性的变化仍具有较大的挑战性。

针对以上问题和挑战, 本文提出一种 LPV 实验建模方法。首先, 建立了丝杠的动力学偏微分方程, 并简化为一种与工件台位置及负载质量相关的参数变化系统模型。其次, 通过局部频域辨识方法获得非参数模型, 再采用非线性最小二乘方法得到模态叠加形式的传递函数模型。再次, 采用基于傅里叶级数形式的正交基函数拟合方法, 获得与位置相关的参数模型。最后, 基于此模型选择合适的工况点进行三次样条插值, 得到与位置、负载质量相关的 LPV 模型。所提出方法应用于自制的滚珠丝杠试验台, 获得了一个与全局工况位置、负载质量的 LPV 模型, 从而降低了模型不确定性问题, 为实现基于 LPV 模型的高速、高精度运动控制提供了基础。

论文结构如下: 第 1 节, 描述了滚珠丝杠系统动力学模型与工件台位置、负载质量相关的变动力学问题; 第 2 节, 提出一种 LPV 建模的方法; 第 3 节, 在滚珠丝杠试验台上对所提出的方法进行了试验验证; 第 4 节, 对本文工作进行了总结。

## 1 滚珠丝杠变动力学特性描述

滚珠丝杠传动系统是实现机床等设备微米级精密传动的核心机构。其结构由伺服电动机、联轴器、丝杠、螺母、工件台、轴承和底座组成, 如图 1 所示。

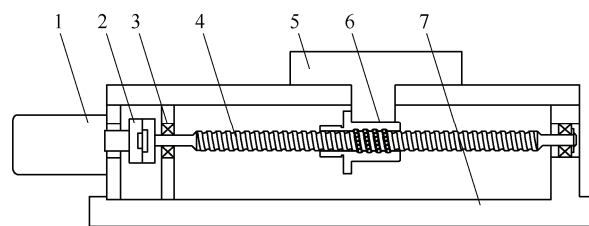


图 1 滚珠丝杠传动系统结构图

1. 伺服电动机 2. 联轴器 3. 轴承 4. 丝杠  
5. 工件台 6. 螺母 7. 底座

传统运动控制策略将滚珠丝杠视为集中参数质量的刚体<sup>[12]</sup>。然而, 丝杠相对于其他部件(工件台、底座等)的柔性特性更为显著, 其柔性动力学特性导致振动与变形, 严重影响高精度运动控制的实现, 需要对其进行精确地分析与建模。因此, 本文将丝杠看成连续体。在实际工程中闭环控制控制带宽范围往往只考虑一阶谐振之前的频域特

性, 且文献[13]研究表明滚珠丝杠的第一阶模态是丝杠的轴向振动模态, 本文进行轴向分布式参数质量建模。如图 2 所示,  $k_{b1}$ 、 $k_{b2}$ 、 $k_n$  分别表示丝杠与轴两端、螺母的轴向刚度;  $c_c$  表示工件台和导轨的阻尼;  $m_T$  表示工件台负载质量;  $u_T(t)$ 、 $u(x_s, t)$  分别表示工件台的振动位移, 螺母所处位置处丝杠的振动位移。

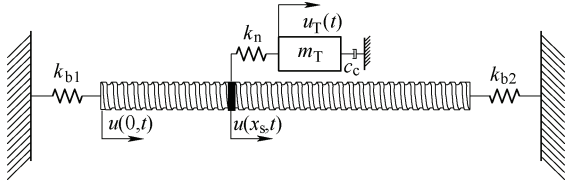


图 2 滚珠丝杠轴向振动

丝杠的动力学偏微分方程表示为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + q(x, t) = m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中,  $x$  为丝杠纵向位置;  $E$  为丝杠弹性模量;  $A(x)$  为丝杠截面积分布;  $u(x, t)$  为丝杠振动位移;  $q(x, t)$  为丝杠外加分布力;  $m(x)$  为丝杠质量分布。

在实际滚珠丝杠系统中,  $q(x, t)$  的分布情况与工件台的位置  $x_T$ 、负载质量  $m_T$  直接相关<sup>[14-15]</sup>, 从而系统的动力学特性随位置与负载质量变化。例如在机床加工中, 工件台的位置、负载质量的变化都意味着机床中丝杠结构的  $q(x, t)$  发生变化。故传统的动力学线性时不变 (Linear and Time-invariant, LTI) 模型不符合实际工况, 其未考虑变动力学特性的建模误差将导致运动控制误差产生。此外, 滚珠丝杠系统动力学模型参数还与温度、工作台的速度、加速度等相关, 但负载质量、位置是对模型参数影响最大的两个变量<sup>[14-15]</sup>, 因此, 将滚珠丝杠系统视为一个与位置、负载质量相关的参数变化系统进行建模。

## 2 滚珠丝杠 LPV 建模

### 2.1 滚珠丝杠 LPV 系统

在第 1 节中已讨论了在实际工况中, 滚珠丝杠可以被认为是一个与工件台位置及负载质量相关的参数变化 (PV) 系统。由于滚珠丝杠系统在同一工况附近下可以近似为 LTI 模型, 因此采用 LPV 数学模型来模拟实际 PV 物理系统, 其运行原理如图 3 所示。由第一性原理假设滚珠丝杠在每个工况点 (位置、负载质量不变的情况) 下是 LTI 模型, 通过一个与位置、负载质量相关的调度序列  $p = (m_T \quad x_T)^T$  来

获得系统全局的 LPV 模型。

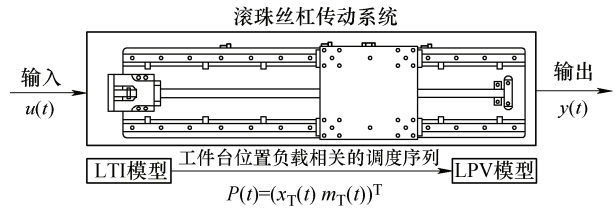


图 3 滚珠丝杠 LPV 系统

故获得系统 LPV 模型的前提是获得不同工况点下的 LTI 模型。

### 2.2 滚珠丝杠局部 LTI 动力学模型结构

上一节中已分析滚珠丝杠系统在工件台位置、负载质量固定时近似为 LTI 模型, 即工件台位置、负载质量只在微小范围内变化时, 可忽略系统内部之间的阻尼、刚度的变化。因此, 在工况基本不变时, 可以将图 1 中滚珠丝杠传动系统等效为如下图所示的结构。

图中  $J_m$ 、 $J_s$ 、 $m_s$ 、 $m_b$ 、 $m_T$  分别为电动机的转动惯量, 丝杠的转动惯量、质量, 基座的质量, 工作台的质量;  $\theta_m$ 、 $\theta_s$ 、 $x_s$ 、 $x_b$ 、 $x_T$  分别为电动机轴的转角, 丝杠转角、位移, 基座位移, 工作台位移;  $k_{rot}$ 、 $k_{ax}$ 、 $k_b$ 、 $k_n$  分别为等效丝杠电动机扭转刚度, 等效丝杠轴向刚度, 等效基座轴向刚度, 等效丝杠螺母接触刚度;  $b_{rot}$ 、 $b_{ax}$ 、 $b_b$ 、 $b_n$  分别为等效丝杠电机扭转阻尼, 等效丝杠轴向阻尼, 等效基座轴向阻尼, 等效丝杠螺母接触阻尼;  $\gamma$  为丝杠的传动比;  $f$  为轨道摩擦;  $T$  为电动机输入力矩。

图 4 中的动力学模型可以采用拉格朗日方程实现系统建模<sup>[13]</sup>。系统的总动能为

$$T = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2} m_s \dot{x}_s^2 + \frac{1}{2} m_b \dot{x}_b^2 + \frac{1}{2} m_T \dot{x}_T^2 \quad (2)$$

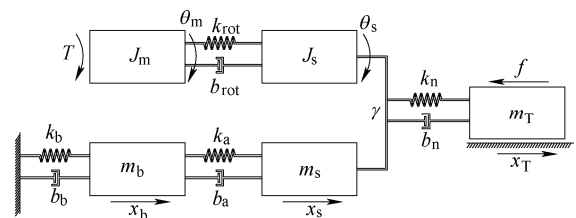


图 4 滚珠丝杠传动系统 LTI 等效动力学模型

系统的势能方程为

$$U = \frac{1}{2} k_b x_b^2 + \frac{1}{2} k_n (x_T - x_s - \gamma \theta_s)^2 + \frac{1}{2} k_{ax} (x_s - x_b)^2 + \frac{1}{2} k_{rot} (\theta_m - \theta_s)^2 \quad (3)$$

瑞丽损耗函数为

$$R = \frac{1}{2}b_b\dot{x}_b^2 + \frac{1}{2}b_n(\dot{x}_T - \dot{x}_s - \gamma\dot{\theta}_s)^2 + \frac{1}{2}b_{ax}(\dot{x}_s - \dot{x}_b)^2 + \frac{1}{2}b_{rot}(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_s)^2 \quad (4)$$

取系统的广义坐标矢量  $\mathbf{Q}$  为

$$\mathbf{Q} = (\theta_m \ \theta_s \ x_s \ x_b \ x_T)^T \quad (5)$$

相应的广义力矢量  $\mathbf{F}$  为

$$\mathbf{F} = (T \ 0 \ 0 \ 0 \ -f)^T \quad (6)$$

定义  $L = T - U$ , 可得到系统在广义坐标  $\mathbf{Q}$  和广义力  $\mathbf{F}$  下的拉格朗日方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{Q}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{Q}}} + \mathbf{F} \quad (7)$$

经过计算整理可以得到

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{D}_a\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{D}_a$ 、 $\mathbf{K}$  分别为质量、阻尼、刚度矩阵, 具体表达为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} J_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_a = \begin{pmatrix} b_{rot} & -b_{rot} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{rot} & b_{rot} + b_n\gamma^2 & b_n\gamma & 0 & -b_n\gamma \\ 0 & b_n\gamma & b_{ax} + b_n & -b_{ax} & -b_n \\ 0 & 0 & -b_{ax} & b_{ax} + b_b & 0 \\ 0 & -b_n\gamma & -b_n & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{rot} & -k_{rot} & 0 & 0 & 0 \\ -k_{rot} & k_{rot} + k_n\gamma^2 & k_n\gamma & 0 & -k_n\gamma \\ 0 & k_n\gamma & k_{ax} + k_n & -k_{ax} & -k_n \\ 0 & 0 & -k_{ax} & k_{ax} + k_b & 0 \\ 0 & -k_n\gamma & -k_n & 0 & k_n \end{pmatrix}$$

滚珠丝杠传动系统的输出可表示为

$$x_T = \mathbf{C}_{op}\mathbf{Q} + \mathbf{C}_{oa}\dot{\mathbf{Q}} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{C}_{op}$ 、 $\mathbf{C}_{oa}$  表示系统的输出矩阵。

对动力学模型分析时常用的是模态坐标  $\mathbf{Q}_m$ , 模态坐标变换为

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\psi}\mathbf{Q}_m \quad (10)$$

将广义坐标  $\mathbf{Q}$  转化为模态坐标  $\mathbf{Q}_m$ 。因此, 将式(10)代入式(8)并左乘  $\boldsymbol{\phi}^T$  得到

$$\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} \ddot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{D}_a \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{F} \quad (11)$$

此时, 可得到对角阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m &= \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} \\ \mathbf{K}_m &= \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\psi} \end{aligned} \quad (12)$$

对模态坐标下的阻尼矩阵可采取对角元素保留, 从而实现模态坐标下各个坐标之间的解耦。由此 LTI 模型可表示为输入(电机力矩  $T$ )到输出(工件台工件台位移  $x_T$ )的模态叠加形式传递函数<sup>[16]</sup>

$$G \approx \frac{K_0}{s^2} + \sum_{i=1}^m \frac{K_i \omega_{ni}^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} + \omega_{ni}^2} \quad (13)$$

式中, 待估参数  $\boldsymbol{\theta} = (K_0 \ K_1 \ \zeta_1 \ \omega_{n1} \ \dots \ K_m \ \zeta_m \ \omega_{nm})^T$ ,  $m$  的取值可根据试验数据进行合适选择。

### 2.3 局部标记点的 LTI 实验建模

对于工件台位置、负载质量作为局部标记点调度参数的 LTI 传递函数模型, 由于频域辨识对信号采集过程产生的干扰信号不敏感<sup>[17]</sup>, 采用频域辨识进行局部 LTI 建模。同时, 为了尽可能获得固定调度参数下的 LTI 模型, 采用闭环辨识克服工件台的滑移现象。因此, 本文采用闭环频域辨识, 如图 5 所示。

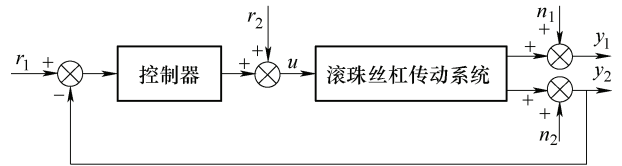


图 5 闭环辨识方框图

首先, 通过试验的方法获得用于辨识的数据。系统辨识的两个输入信号分别为位置环参考输入信号  $r_1$  (为常值), 外部激励信号  $r_2$ ; 两个输出分别是伺服电机旋转位置信号  $y_1$ , 工件台直线位置信号  $y_2$ 。

在闭环系统中, 输入信号  $u$  与反馈的输出噪声  $n_2$  相关, 从而使直接用  $u$ 、 $y_1$ 、 $y_2$  进行辨识计算得到的结果是有偏的。为了避免偏差, 采用了间接方法<sup>[18]</sup>

$$G_{mi}(\omega_k) = G_{uy_i}(\omega_k) = \frac{G_{r_2 y_i}(\omega_k)}{G_{r_2 u}(\omega_k)} \quad i=1,2, k=1,2,\dots,M \quad (14)$$

式中,  $G_{r_2 y_i}(\omega_k)$  是外部激励信号  $r_2$  到输出信号  $y_i$  在频率为  $\omega_k$  的响应;  $G_{r_2 u}(\omega_k)$  是外部激励信号  $r_2$  到输入信号  $u$  在频率为  $\omega_k$  的响应。输入信号  $u$  到输出信号  $y_i$  的频率响应数据集  $G_{mi}(\omega_k)$  是滚珠丝杠动力学系统局部标记点的无偏差 LTI 非参数模型。

为了进一步分析系统的特性, 需根据频响数据



集进行参数估计。根据残差平方和最小原则有

$$V_{\text{NLS}} = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^H \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}) \quad (15)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} V_{\text{NLS}} \quad (16)$$

并满足条件

$$\left. \frac{\partial V_{\text{NLS}}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = 0 \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$  表示模型响应与系统响应测量值的误差矢量,  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^H$  表示  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$  的共轭转置。采用加速度频响测量曲线对加速度传递函数进行参数拟合, 有

$$G_{\text{acc}}(\boldsymbol{\theta}, s) = s^2 G(\boldsymbol{\theta}, s) = K_0 + \sum_{i=1}^m \frac{K_i \omega_{ni}^2 s^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_{ni} + \omega_{ni}^2} \quad (18)$$

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}) = (e(\boldsymbol{\theta}, j\omega_1) \quad e(\boldsymbol{\theta}, j\omega_2) \quad \dots \quad e(\boldsymbol{\theta}, j\omega_N))^T \quad (19)$$

式中,  $e(\boldsymbol{\theta}, j\omega) = G_{\text{acc}}(\boldsymbol{\theta}, j\omega) - G_{\text{macc}}(\boldsymbol{\theta}, j\omega)$ 。

此问题需要进行非线性估计, 采用高斯-牛顿法迭代求解  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , 通过对误差函数进行一阶泰勒展开得到

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j + \Delta\boldsymbol{\theta}_j) = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j) + \mathbf{J}^T \Delta\boldsymbol{\theta}_j + o(\Delta\boldsymbol{\theta}_j) \quad (20)$$

并将式(20)代入式(15)中, 重写损失函数  $V_{\text{NLS}}$  得到

$$V_{\text{NLS}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j) + \mathbf{J}^T \Delta\boldsymbol{\theta}_j)^H (\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j) + \mathbf{J}^T \Delta\boldsymbol{\theta}_j) \quad (21)$$

然后采用梯度下降法求解迭代步长并更新参数  $\boldsymbol{\theta}_j$ , 有

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_j = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{j+1} = \boldsymbol{\theta}_j + \Delta\boldsymbol{\theta}_j \quad (23)$$

式(20)~(23)中  $\mathbf{J}$  表示误差函数的雅可比矩阵,  $j$  表示当前的迭代次数,  $\mathbf{H} = \mathbf{J}\mathbf{J}^T$ ,  $\mathbf{g} = -\mathbf{J}\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$ 。最后当迭代步长  $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$  收敛时, 有  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_j$ 。该算法虽然能获得估计结果  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , 但是在迭代过程中容易陷入锯齿状, 导致迭代时间较长。

为了快速获得参数估计值  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , 在牛顿-高斯迭代的基础上, 结合信赖区间算法<sup>[19]</sup>来加快迭代过程。

通过对式(21)引入信赖区间约束避免迭代陷入锯齿状, 并采用近似指标  $\rho$  来及时更新信赖区间的大小以实现动态调整, 其表达形式为

$$V_{\text{NLS}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j) + \mathbf{J}^T \Delta\boldsymbol{\theta}_j)^H (\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j) + \mathbf{J}^T \Delta\boldsymbol{\theta}_j), \text{ s.t. } \|\mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\theta}_j\| \leq \mu_j \quad (24)$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_j = (\mathbf{H} + \lambda_j \mathbf{D}^T \mathbf{D})^{-1} \mathbf{g} \quad (25)$$

$$\rho = \frac{(\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j + \Delta\boldsymbol{\theta}_j) - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j))^H (\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j + \Delta\boldsymbol{\theta}_j) - \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_j))}{\mathbf{J}^T \Delta\boldsymbol{\theta}_j} \quad (26)$$

式中,  $\mu_j$  是信赖半径;  $\mathbf{D}$  是非奇异系数矩阵;  $\lambda_j$  是拉格朗日方程的系数因子。

牛顿-高斯迭代结合信赖区间算法流程如图 6 所示。

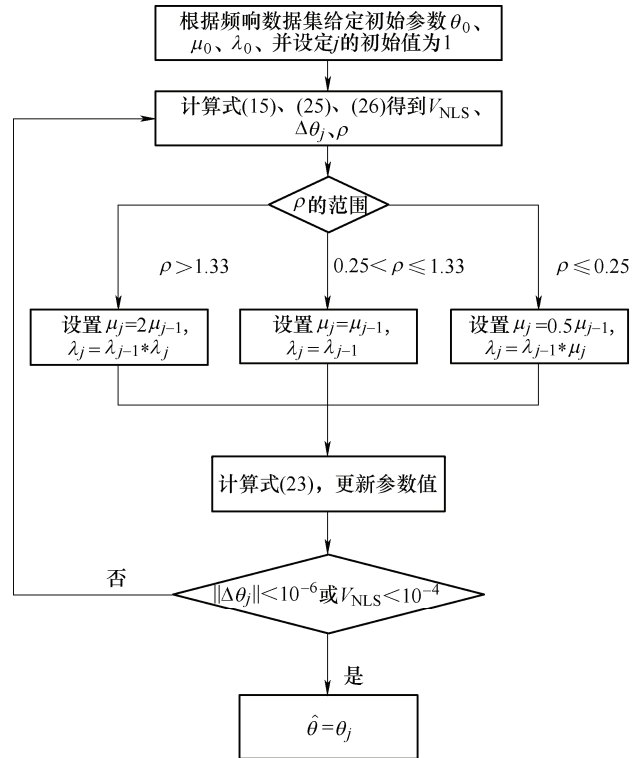


图 6 牛顿-高斯迭代结合信赖区间算法流程图

## 2.4 LPV 拟合建模与插值建模

通过 2.3 节得到了系统在每个局部工况下的 LTI 传递函数模型, LPV 建模的目的是获得传递函数中每个参数与调度变量  $\mathbf{p}$  之间的函数关系。由于计算、试验误差的存在, 既非可能也无必要获得系统的真实解, 只需要获得一个非常近似系统动力学的模型就能够满足运动控制工程需要。文献[20]证明了正交基函数拟合模型更为有效, 因此, 本文采用正交基函数  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  对模型参数进行拟合回归, 得到对应参数的最佳平方逼近函数。考虑到拟合回归一般适用于单调度变量以及需要较多数量的样本, 本文先采用了傅里叶级数  $\{\phi_i\}_{i=1}^n = \{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(nx), \cos(nx), \dots\}$  作为正交基, 以工件台位置  $x_T$  作为单调度变量, 对模型参数进行拟合, 得到参数矢量的第  $k$  个参数表达式为

$$\theta(k, x_T) \approx \sum_{i=0}^{2n} a_{ki} \phi_i(x_T) \quad (27)$$

从而得到 LPV 形式的传递函数为

$$G \approx G(\theta(x_T), s) = \frac{K_0(x_T)}{s^2} + \sum_{i=1}^m \frac{K_i(x_T)}{s^2 + 2\zeta_i(x_T)\omega_{ni}(x_T)s + \omega_{ni}^2(x_T)} \quad (28)$$

通过对大量的局部 LTI 模型参数进行拟合回归, 可以得到在工件台负载质量不变时, 与位置相关的 LPV 模型, 其缺点是需要进行大量试验, 时间效率不高, 并且无法得到质量连续变化时模型参数的变化规律, 这在很多工业领域是不能接受的。因此, 基于拟合结果探索了滚珠丝杠系统在进行 LPV 插值建模时局部 LTI 工作点的选择问题, 同时也考虑工件台负载质量  $m_T$  变化对模型的影响, 使得仅需少量的局部工况下的模型参数就可以得到 LPV 模型。为了保证所得插值结果的光滑性, 采用了三次样条插值。参数矢量中第  $k$  个参数表达式为

$$\theta(k, p) \approx f(k, p) = \sum_{i=0}^3 a_i p^i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (p - p_i)_+^3 \quad (29)$$

式中,  $p_+^m = \begin{cases} p^m, & p \geq 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases}$ , 且满足边界条件

$$\theta'(k, p_0) = f'(k, p_0), \quad \theta'(k, p_n) = f'(k, p_n)。$$

### 3 试验与分析

本节将所提出的 LPV 实验建模方法应用于自制滚珠丝杠试验台, 如图 7 所示。滚珠丝杠传动机构将一台 200 W 的 Tamagawa 伺服电动机的旋转运动转换为工件台的平移运动。位置测量系统包括实现直线位移测量的光栅尺和实现旋转角度测量的旋转编码器, 分辨率分别为  $0.5 \mu\text{m}$ 、 $0.0275''$ 。丝杠螺距为 5 mm, 额定转矩为 0.64 N·m。基于 speedgoat xPC 控制系统, 试验平台在 5 kHz 频率下进行实时的信号采集与系统闭环辨识。

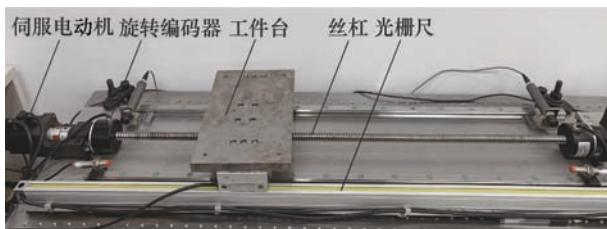


图 7 滚珠丝杠试验台

#### 3.1 闭环辨识试验数据获取

采用 2.3 节所提闭环辨识方法, 获取不同工况点的局部 LTI 频域响应数据集。

具体来讲, 闭环辨识采用 PID 反馈控制器, 闭环带宽为 10 Hz(采用低带宽的目的是尽量避免直线

反馈信号中噪声对试验过程的影响)。输入激励采用对称凹二次扫频信号, 变化范围[10, 1 000] Hz, 频率变化步长为 1 Hz。给定工件台工况采用负载质量: 7 kg、13.5 kg、20 kg; 位置:  $x_T = 0:0.005:0.6 \text{ m}$ 。即工件台靠近电机端作为零点  $x_T = 0$ , 运动总行程为 0.6 m, 不同负载质量状况下, 分别进行了 121 个不同位置点的辨识。

以  $m_T = 20 \text{ kg}$ ,  $x_T = 0.025 \text{ m}$  为例, 局部 LTI 时域试验数据如图 8 所示。因为采用了闭环辨识, 图中的直线位移以及旋转位移均未发生偏移现象。

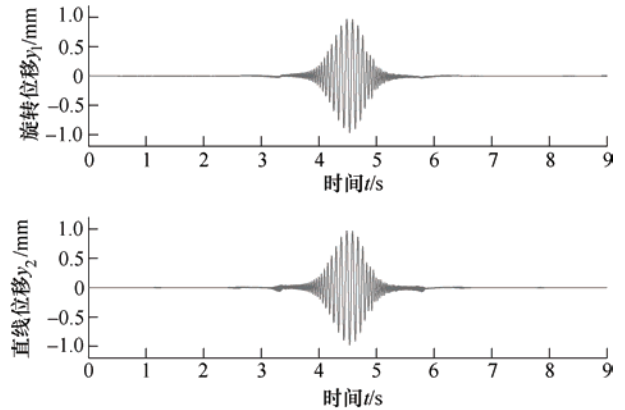


图 8 局部 LTI 时域响应数据

在实际工业运动控制应用中, 滚珠丝杠的第一阶谐振频率对控制带宽影响最大。因此, LTI 频域响应模型只取低频的刚体模态和第一阶谐振模态, 即式(13)中  $m = 1$ , 其对应的频响试验数据集如图 9 所示。由 9 可知, 系统的第一阶谐振主要为直线位移振动, 即丝杠的轴向振动。

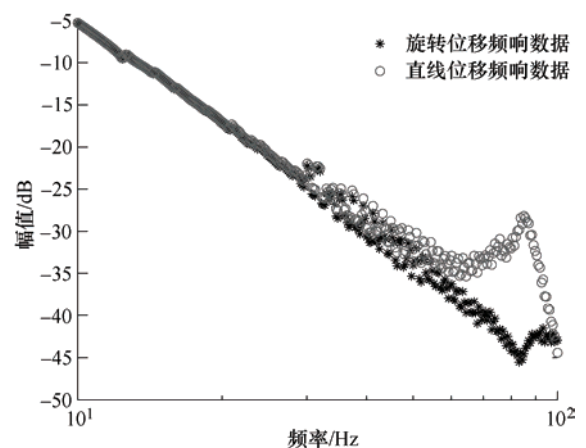


图 9 闭环辨识试验频响数据集

#### 3.2 局部 LTI 模型辨识结果

以负载质量 20 kg, 工件台位置分别为 0、0.1 m、0.2 m、0.3 m、0.4 m、0.5 m、0.6 m 时的数据为例, 采用第 2.3 节中的非线性最小二乘参数估计, 得到

的传递函数,如图10所示。

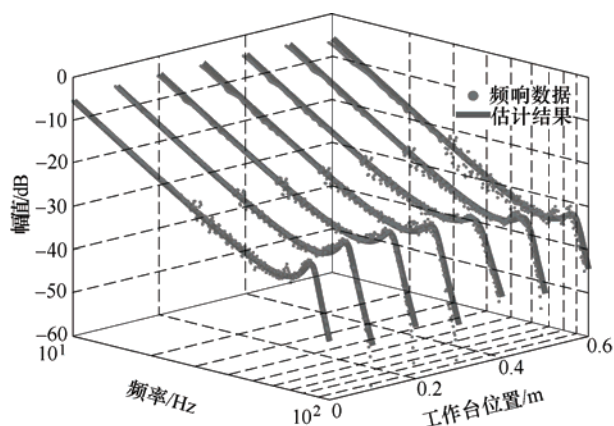


图10 局部LTI参数估计结果

采用校正决定系数  $R_{ad}$  衡量参数估计效果<sup>[21]</sup>, 其越接近1估计效果越好,表达式如下

$$\left\{ \begin{aligned} R^2 &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \\ R_{ad}^2 &= 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-p-1} \end{aligned} \right. \quad (30)$$

式中,  $y_i$  表示样本实际值,  $\hat{y}_i$  表示样本估计值,  $\bar{y}$  表示样本平均值,  $n$  表示样本数量,  $p$  表示样本特征参数的个数。

不同工况下参数估计结果如表1所示,表明所提出的牛顿-高斯迭代结合信赖区间算法能够准确估计局部LTI模型参数,所获得随工况变化的参数可用于后续的LPV建模。

表1 局部LTI参数估计结果

负载质量/kg	位置/m	$K_0$	$K_1$	$\zeta_1$	$\omega_{n1}/\text{rad}$	$R_{ad}$
7	0	-1 990.1	0.003 6	0.073 5	533.7	0.997 7
	0.1	-2 214.3	0.005 6	0.075 8	521.0	0.998 5
	0.2	-2 349.3	0.004 8	0.062 4	519.8	0.998 5
13.5	0.3	-2 610.9	0.004 5	0.060 0	503.4	0.991 8
	0.4	-2 443.9	0.004 6	0.073 3	510.5	0.997 8
	0.5	-2 349.4	0.003 3	0.065 5	541.9	0.998 2
	0.6	-2 127.0	0.003 1	0.065 6	561.8	0.997 0

### 3.3 LPV 辨识结果

针对相同负载质量、不同位置工况下的LTI模型参数进行位置相关的拟合回归,得到与工件台位置相关的LPV模型。LPV模型变参数特性以第一阶固有频率  $\omega_{n1}$  为例,其随位置的变化如图11所示。

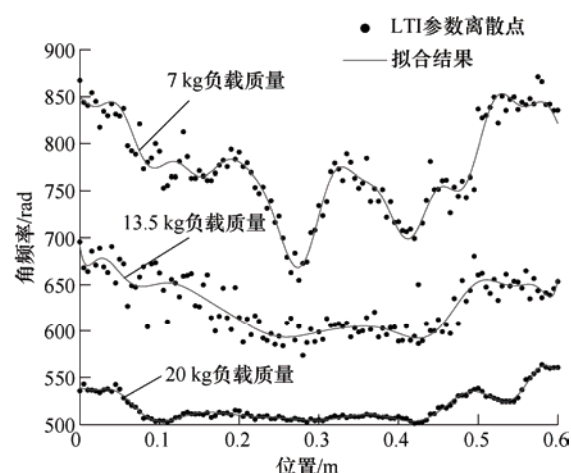


图11 系统固有频率  $\omega_{n1}$  随位置、负载质量的关系

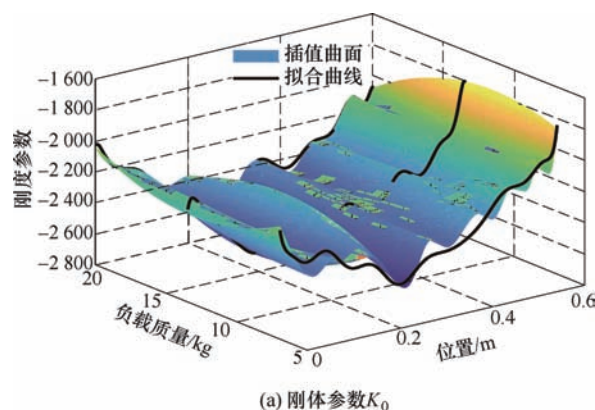
曲线拟合效果用校正决定系数  $R_{ad}$  衡量,参数与位置的非线性相关性用距离相关系数  $D_c$  衡量<sup>0</sup>。

曲线拟合效果与相关性评价结果如表2所示,表明系统固有频率  $\omega_{n1}$  随位置变化曲线拟合准确,且与位置相关性较高。

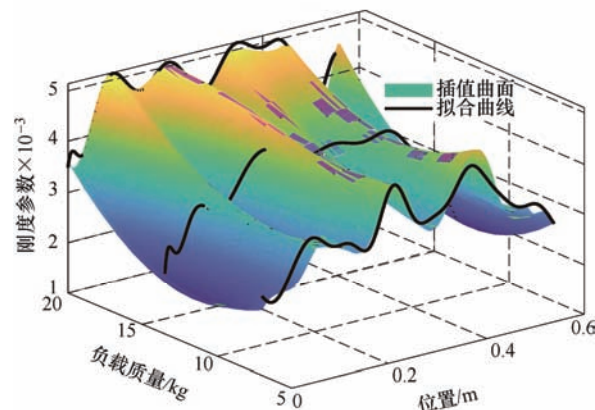
表2 系统固有频率  $\omega_{n1}$  曲线拟合与位置相关性评价

负载质量/kg	$R_{ad}$	$D_c$
7.0	0.805 0	0.926 6
13.5	0.919 4	0.930 2
20.0	0.981 7	0.930 1

采用同样的方法对其余参数进行拟合回归,结果如图12中黑色曲线所示。



(a) 刚体参数  $K_0$



(b) 刚体参数  $K_1$



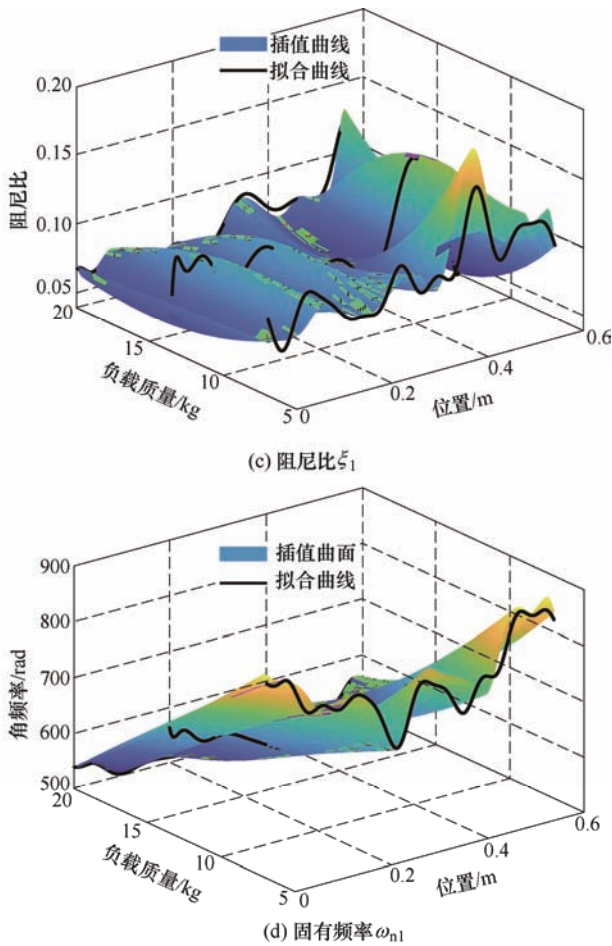


图 12 各参数 LPV 曲线拟合及插值结果

LPV 模型各参数曲线拟合效果与相关性评价如表 3 所示，从表中可知各参数在不同工况下大体拟合准确，且与位置的非线性相关性高。

表 3 参数  $K_0$ 、 $K_1$ 、 $\xi_1$  曲线拟合与位置相关性评价

参数	负载质量/kg	$R_{ad}$	$D_c$
$K_0$	7.0	0.909 5	0.948 1
	13.5	0.923 0	0.936 1
	20.0	0.973 2	0.932 5
$K_1$	7.0	0.757 7	0.932 5
	13.5	0.808 9	0.929 9
	20.0	0.950 4	0.923 9
$\xi_1$	7.0	0.745 9	0.946 2
	13.5	0.765 8	0.935 6
	20.0	0.949 5	0.957 7

各参数 LPV 曲线拟合及插值结果基于以上的曲线拟合结果，采用 2.4 节提出的三次样条插值方法，获得全局 LPV 参数模型。各参数插值结果如图 12 所示。各参数插值效果与负载质量相关性结果如表 4 所示，表明在不同工况下参数插值准确，参

数  $K_1$ 、 $\xi_1$ 、 $\omega_{n1}$  与负载质量非线性相关性高，参数  $K_0$  与负载质量非线性相关性不高。

表 4 参数  $K_0$ 、 $K_1$ 、 $\xi_1$ 、 $\omega_{n1}$  插值效果与负载质量相关性

参数	$R_{ad}$	$D_c$
$K_0$	0.867 7	0.558 8
$K_1$	0.787 8	0.806 5
$\xi_1$	0.749 0	0.938 0
$\omega_{n1}$	0.971 9	0.998 2

4 结论

本文针对滚珠丝杠系统具有与位置、负载质量相关的动力学特性，提出一种 LPV 实验建模方法，获得了与位置、负载质量相关的 LPV 模型。与传统的 LTI 模型相比，探明了模型不确定性随位置、负载质量等参数变化的规律，降低了模型保守性。为实现基于 LPV 模型的高速、高精度控制提供了基础。得到以下结论。

- (1) 通过理论分析与试验验证，探明滚珠丝杠在全局工作范围运动时系统参数随位置、负载质量变化相关性明显。
- (2) 局部工况参数估计、正交基函数非线性曲线拟合、三次样条插值的递进式实验建模方法有效可行。
- (3) 与传统集中质量建模方法相比，本文提出的实验建模方法能够获得参数插值准确、与变参数相关性高的 LPV 模型。

参 考 文 献

[1] 李杰, 谢福贵, 刘辛军, 等. 机电-刚柔耦合特性作用下线性进给系统动力学分析[J]. 机械工程学报, 2017, 53(17): 60-69.  
LI Jie, XIE Fugui, LIU Xinjun, et al. Dynamic analysis of linear feed system under the action of electromechanical rigid flexible coupling characteristics[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(17): 60-69.

[2] ALTINTAS Y, VERL A, BRECHER C, et al. Machine tool feed drives[J]. CIRP Annals, 2011, 60(2): 779-796.

[3] KIM D, AHN J, CAMPBELL O, et al. Investigations of a robotic test bed with viscoelastic liquid cooled actuators[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2018, 23(6): 2704-2714.

[4] DUMANLI A, SENCER B. Optimal high-bandwidth control of ball-screw drives with acceleration and jerk



- feedback[J]. Precision Engineering, 2018, 54: 254-268.
- [5] VARANASI K K, NAYFEH S A. The dynamics of lead-screw drives: low-order modeling and experiments[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2004, 126(2): 388-396.
- [6] DADALAU A, MOTTAHEDI M, GROH K, et al. Parametric modeling of ball screw spindles[J]. Production Engineering, 2010, 4(6): 625-631
- [7] OKWUDIRE C. Finite element modeling of ballscrew feed drive systems for control purposes[D]. Vancouver: University of British Columbia, 2005.
- [8] DONG Liang, TANG Wencheng. Hybrid modeling and analysis of structural dynamic of a ball screw feed drive system[J]. Mechanics, 2013, 19(3): 316-323.
- [9] WANG Nan, LIN Weiyang. Robust tracking control of AC servo system including a ball screw[J]. Neurocomputing, 2016, 179: 110-117.
- [10] HENKE B, SAWODNY O, NEUMANN R. Distributed parameter modeling of flexible ball screw drives using ritz series discretization[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2014, 20(3): 1226-1235.
- [11] 钱荣荣, 骆敏舟, 赵江海, 等. 基于 Ritz 级数的滚珠丝杠驱动系统建模与振动研究[J]. 系统仿真学报, 2017, 29(10): 2268.
- QIAN Rongrong, LUO Minzhou, ZHAO Jianghai, et al. Modeling and vibration research of ball screw drive system based on Ritz series[J]. Journal of System Simulation, 2017, 29(10): 2268.
- [12] ANSOATEGUI I, CAMPA F J. Mechatronics of a ball screw drive using an N degrees of freedom dynamic model[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 93(1): 1307-1318.
- [13] VICENTE D A, HECKER R L, VILLEGAS F J, et al. Modeling and vibration mode analysis of a ball screw drive[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2012, 58(1): 257-265.
- [14] ZHANG Huijie, LIU Hui, DU Chao, et al. Dynamics analysis of a slender ball-screw feed system considering the changes of the worktable position[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2019, 233(8): 2685-2695.
- [15] 赵佳佳, 林明星, 宋现春, 等. 复合载荷下滚珠丝杠副全滚珠载荷分布建模与分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(17): 126-136.
- ZHAO Jiajia, LIN Mingxing, SONG Xianchun, et al. Modeling and analysis of full ball load distribution of ball screw pair under compound load [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(17): 126-136.
- [16] NAGAMUNE R, CHOI J. Parameter reduction in estimated model sets for robust control[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2010, 132(2): 218-229.
- [17] MCKELVEY T. Frequency domain identification[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2000, 33(15): 7-18.
- [18] PINTELON R, SCHOUKENS J. System identification: A frequency domain approach[M]. New York: John Wiley & Sons, 2012.
- [19] RANGANATHAN A. The levenberg-marquardt algorithm[J]. Tutorial on LM Algorithm, 2004, 11(1): 101-110.
- [20] VAN DEN HOF P, NINNESS B. System identification with generalized orthonormal basis functions[C]// Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions. Springer, London, 2005: 61-102.
- [21] HAREL O. The estimation of  $R^2$  and adjusted  $R^2$  in incomplete data sets using multiple imputation[J]. Journal of Applied Statistics, 2009, 36(10): 1109-1118.
- [22] SZÉKELY G J, RIZZO M L, BAKIROV N K. Measuring and testing dependence by correlation of distances[J]. The Annals of Statistics, 2007, 35(6): 2769-2794.
- 
- 作者简介: 黄涛, 男, 1986 年出生, 博士, 副教授, 博士研究生导师。主要研究方向为精密/超精密传动系统动力学与控制。  
E-mail: tuang@cqu.edu.cn
- 曹华军(通信作者), 男, 1978 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为绿色低碳制造基础理论, 高速干切工艺及智能装备, 高性能传动系统。  
E-mail: hjcao@cqu.edu.cn