

DOI: 10.3901/JME.2022.07.176

网状反射面天线原理误差计算方法^{*}

陈聪聪 李团结 唐雅琼

(西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘要: 网状天线依靠索网系统支撑金属丝网反射面实现电磁信号的反射和接收。金属丝网反射面被索网系统分割为一系列平面面片, 与理想反射面之间存在型面拟合误差即原理误差, 在工程设计阶段决定了天线的电性能。针对旋转抛物反射面, 采用面积坐标, 推导了轴向原理误差与面片几何参数间的数学关系, 给出了轴向原理误差的快速计算公式, 并用数值算例验证了公式的正确性。结果表明, 轴向原理误差的最大值及均方根值可由抛物面焦距及面片在天线口径面投影几何唯一确定。给定面片在口径面的投影边长, 利用文中公式可快速、准确计算出面片轴向原理误差的均方根值及最大值。研究结果为合理确定网状天线网格尺寸提供指导。

关键词: 网状天线; 原理误差; 面积坐标

中图分类号: TH122

Faceting Deviation Calculation of Cable-Net Reflector Antenna

CHEN Congcong LI Tuanjie TANG Yaqiong

(School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071)

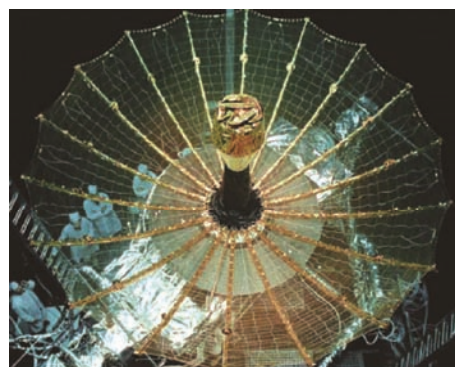
Abstract: The reflection and reception of electromagnetic signals of cable-net reflector antenna are realized by the wire mesh supported by the cable net system. The wire mesh is divided into a series of small facets, which makes it a faceting error between the wire mesh reflector and the ideal one, determining the electromagnetic performance in engineering design stage. The relationship between the axial faceting deviation and the facet size for the paraboloidal reflector is derived by using the area coordinate. The calculation formulas of the faceting deviation are given and verified. Results show that the maximum value and the root mean square value of the faceting deviation can be uniquely determined by the focal length of the reflector and the projection geometry of the facet on the aperture plane. Given the projection side lengths of the facet, the accurate faceting deviation results can be obtained quickly by using the derived formula. The results can provide guidance for the preliminary design of the cable net antenna.

Key words: cable net antenna; faceting error; area coordinate

0 前言

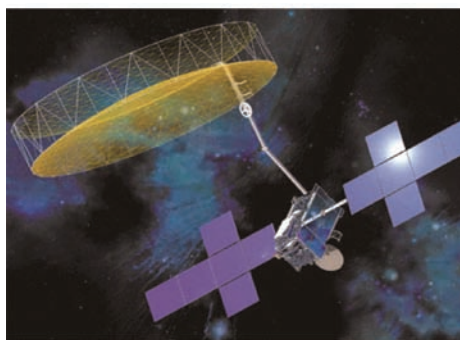
网状天线因其质径比小、展收比大、热稳定性好等优点, 广泛应用于对地观测、移动通信以及深空探测等领域^[1-2]。目前典型的网状天线形式有 Harris 公司的径向肋式天线^[3]、AstroMesh 公司的环形桁架式天线^[4]和日本的 ETS-VIII 构架式天线^[5]等, 如图 1 所示。网状天线一般由展开桁架、金属反射网和柔性索网结构组成, 索网系统在预张力^[6]作用下张成一定的空间形状, 金属丝网附着于索网

系统, 实现电磁信号的反射和接收。受加工制造、装配、天线展收及空间热载荷作用等的影响, 网状天线实际反射面与理想反射面之间存在一定的差异, 造成天线电性能下降^[7-8]。

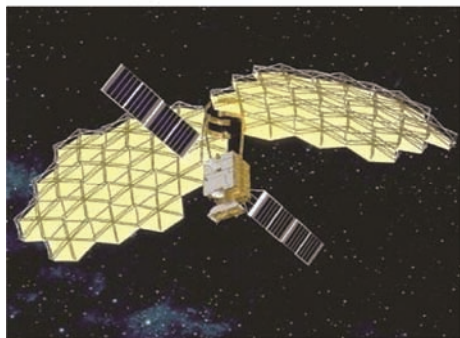


(a) 径向肋式网状天线

^{*} 国家自然科学基金 (51775403, 51905401) 和陕西省自然科学基金基础研究计划 (2019JQ-505) 资助项目。20210507 收到初稿, 20211122 收到修改稿



(b) 环形桁架式网状天线



(c) 构架式网状天线

图 1 常用网状天线形式

网状天线的一大误差源是面片拟合误差, 即原理误差或设计误差。如图 2 所示, 索网节点间索段在无重力情况下为直线, 金属丝网反射面被索网系统分割为一系列小平面面片, 小平面面片与理想反射面之间的偏差即为原理误差。

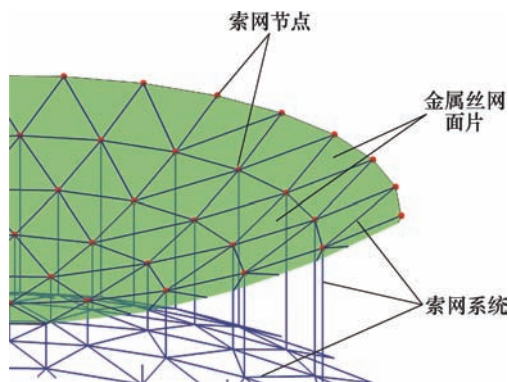


图 2 索网天线结构示意图

原理误差在设计阶段决定了天线所能达到的性能极限。为了实现所要求的天线电性能指标, 天线反射面的原理误差需控制在一定水平。原理误差过小会使天线造价过高; 而原理误差过大, 则不能保证所需要的电性能。RUZE^[9-10]从概率统计角度, 给出了天线效率和反射面型面误差均方根值之间的近似计算公式。YAHMAT-SAMII^[11]研究了反射面型面误差均方根值对天线平均功率方向图的影响。上述研究, 将天线电性能设计指标转换为几何型面误差均方根值及最大值等结构设计指标。

对于网状天线, 使用较小尺寸的面片可以获得更小的原理误差, 但需要增加索网系统的节点数和索段数, 从而增加制造、装配和调试的困难。需要研究面片尺寸与原理误差之间的对应关系, 并据此确定合理的反射面或索网系统几何形状^[12]。

为实现信号的有效聚集, 索网天线的反射面多为旋转抛物面。AGRAWAL 等^[13]研究了等边三角形面片拟合旋转抛物面造成的原理误差的均方根值的计算方法。HEDEGPETH^[14]进一步给出了三角形、四边形、六边形及楔形面片拟合抛物面造成的原理误差的均方根值的经验计算公式。上述计算公式均基于旋转球面近似和浅抛物面假设, 且要求面片边长相等或近似相等, 使用具有一定的局限性。杨东武等^[15]对三角形面片拟合抛物面造成的原理误差进行了理论推导, 给出了根据面片在口径面投影几何信息(边长、面积、高度及在局部坐标系下节点相对于对边中垂线的偏移量)及抛物面焦距计算三角形面片原理误差均方根值的公式。该公式参数的确定过程略为繁琐且不够直观。此外, 在工程实践中, 我们不仅关心误差的均方根值, 还需要关注误差的最大值^[16], 而上述研究均未涉及。

为此, 采用面积坐标, 对节点位于抛物面上的索网反射面拟合旋转抛物面造成的轴向原理误差的计算公式进行了推导, 给出了根据面片在口径面投影边长及抛物面焦距精确计算轴向原理误差最大值及均方根值的公式, 揭示了误差最大值及均方根值与面片口径面投影形状的关系。

1 公式推导

1.1 轴向原理误差定义

当用平面对曲面进行近似时, 曲面上某点的轴向原理误差可表示为

$$\Delta = f_{z1} - f_{z2} \quad (1)$$

式中, f_{z1} 和 f_{z2} 分别为平面方程和曲面方程。

原理误差的均方根值可通过对各点原理误差进行积分得到

$$\delta_{\text{RMS}}^2 = \frac{1}{S} \iint \Delta^2 d\sigma \quad (2)$$

式中, δ_{RMS} 为面片原理误差的均方根值, S 为积分区域面积, $d\sigma$ 为积分面积元。

不同类型的网状天线具有不同形式的反射面结构形式, 如图 3 所示, 分别为无环辐射状网格反射面、有环辐射状网格反射面、三角形网格反射面和四边形网格反射面。

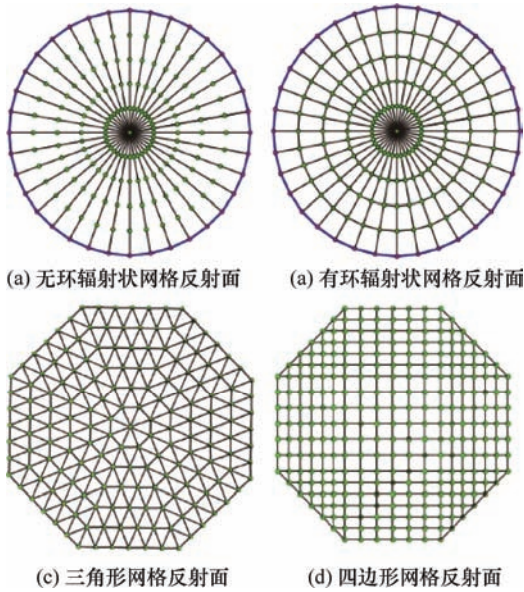


图 3 不同形式的网状天线反射面

对于旋转抛物反射面天线, 反射面的节点均位于抛物面上。式(1)和(2)中平面方程 f_{z1} 在整个定义域内并不是固定不变的, 在原理误差计算时, 需要对定义域进行离散。由解析几何知识可知, 过空间不共线三点可以唯一确定一个空间平面, 因此, 根据反射面上节点分布, 将反射面离散为有限个三角形区域。选用 Delaunay 三角剖分算法对反射面进行离散。

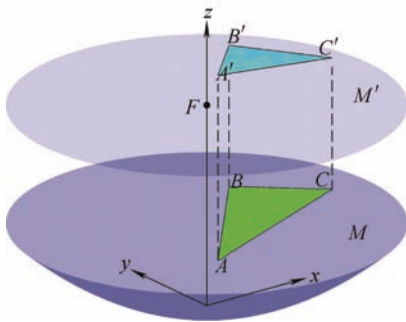


图 4 三角形面片拟合抛物面

如图 4 所示, M 为旋转抛物反射面, A, B, C 为位于反射面上的三个节点, M' 为过抛物面焦点且垂直于抛物面焦轴的口径面, $\Delta A'B'C'$ 为 ΔABC 在口径面的投影。

在直角坐标系中, 焦距为 F 的抛物面方程为

$$f_{z2} = (x^2 + y^2) / (4F) \quad (3)$$

ΔABC 所确定的空间平面方程为

$$f_{z1} = ax + by + c \quad (4)$$

则对于反射面上单个三角形区域, 轴向原理误

差和误差均方根值分别为

$$\Delta = ax + by + c - (x^2 + y^2) / (4F) \quad (5)$$

$$\delta_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{S} \iint_{M'} (ax + by + c - (x^2 + y^2) / (4F))^2 dx dy} \quad (6)$$

其中, 式(6)的积分区域为 $\Delta A'B'C'$ 。

1.2 三角形面积坐标

从图 4 中可以看到, 轴向原理误差的定义域为口径面内的三角形区域, 而直角坐标系下无法将任意位置三角形区域精确表示。文献[15]通过建立局部坐标系, 将任意三角形区域划分为两个直角三角形区域进行求解, 增加了计算工作量。为此引入三角形面积坐标^[17]来解决这一问题。

如图 5 所示, 在面积坐标系中, 三角形内任一点 P 的位置可由三个面积比值唯一确定, 即 $P(l_1, l_2, l_3)$, 其中

$$l_1 = \sigma_1 / \sigma; l_2 = \sigma_2 / \sigma; l_3 = \sigma_3 / \sigma; \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (7)$$

三角形面积坐标 l_1, l_2, l_3 与直角坐标之间具有如下变换关系

$$\begin{cases} x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3 \\ y = y_1 l_1 + y_2 l_2 + y_3 l_3 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 1 \\ dx dy = 2\sigma dl_1 dl_2 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 为三角形三个顶点在直角坐标系内的坐标值。利用式(8), 无需拆分三角形, 一次便可完成整个三角形区域内的原理误差计算。

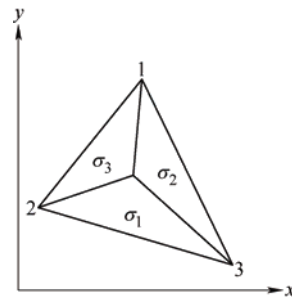


图 5 三角形面积坐标

1.3 轴向原理误差均方根值计算

利用式(8), 式(6)可整理为

$$\begin{aligned} 16F^2 \delta_{\text{RMS}}^2 &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-l_1} \Gamma^2 dl_1 dl_2 \\ &= \frac{1}{30} (L_{13}^4 + L_{23}^4) - \frac{1}{15} (L_{13}^3 L_{23} + L_{13} L_{23}^3) \cos \theta_3 \quad (9) \\ &\quad + \frac{2}{45} L_{13}^2 L_{23}^2 \cos^2 \theta_3 + \frac{1}{18} L_{13}^2 L_{23}^2 \end{aligned}$$

其中, θ_i 为口径面投影三角形顶点 i 处的角度, L_{ij} 为

顶点 i, j 之间的边长, 且

$$\begin{cases} \Gamma = Hl_1^2 + Gl_2^2 + Al_1 + Bl_2 + Cl_1l_2 + D \\ H = -(x_1 - x_3)^2 - (y_1 - y_3)^2 = L_{13}^2 \\ G = -(x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 = L_{23}^2 \\ A = 4Fa(x_1 - x_3) + 4Fb(y_1 - y_3) \\ \quad - 2x_3(x_1 - x_3) - 2y_3(y_1 - y_3) = L_{13}^2 \\ B = 4Fa(x_2 - x_3) + 4Fb(y_2 - y_3) \\ \quad - 2x_3(x_2 - x_3) - 2y_3(y_2 - y_3) = L_{23}^2 \\ C = -2(x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 + x_3^2 \\ \quad + y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3 + y_3^2) = -2L_{13}L_{23}\cos\theta_3 \\ D = 4F(ax_3 + by_3 + c) - x_3^2 - y_3^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

根据三角形余弦定理, 有

$$\cos\theta_3 = (L_{13}^2 + L_{23}^2 - L_{12}^2) / (2L_{13}L_{23}) \quad (11)$$

将式(11)代入式(9), 便可得到由口径面投影三角形边长表示的原理误差均方根值计算公式

$$\delta_{\text{RMS}} = \frac{1}{4F} \sqrt{\frac{1}{90}(L_{13}^4 + L_{23}^4 + L_{12}^4 + L_{12}^2L_{13}^2 + L_{13}^2L_{23}^2 + L_{12}^2L_{23}^2)} \quad (12)$$

为研究三角形形状与原理误差均方根值间的关系, 假定面片在口径面投影面积为定值 S , 即

$$S = \frac{1}{2}L_{13}L_{23}\sin\theta_3 \quad (13)$$

同时, 将式(9)整理为

$$\begin{aligned} 8F^2\delta_{\text{RMS}}^2 &= \frac{1}{60}L_{13}^4 + \frac{1}{60}L_{23}^4 + \frac{1}{36}L_{13}^2L_{23}^2 \\ &\quad - \frac{1}{30}L_{13}^3L_{23}\cos\theta_3 - \frac{1}{30}L_{13}L_{23}^3\cos\theta_3 \\ &\quad + \frac{1}{45}L_{13}^2L_{23}^2\cos^2\theta_3 = g \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)中函数 g 正比于原理误差均方根值的平方且是投影三角形边长和夹角的函数。为研究函数 g 随三角形投影边长的变化情况, 将式(13)代入式(14), 并对 L_{13}, L_{23} 求偏导, 有

$$\frac{\partial g}{\partial L_{13}} = \frac{2L_{13}^3L_{23}K + 3L_{13}^3L_{23}^3K - 3L_{13}^2L_{23}^2L_{13}^4 + 8S^2}{30L_{23}K} \quad (15)$$

$$\frac{\partial g}{\partial L_{23}} = \frac{3L_{13}^3L_{23}K + 2L_{13}^3L_{23}^3K - 3L_{13}^2L_{23}^2L_{13}^4 + 8S^2}{30L_{13}K} \quad (16)$$

其中

$$K = \sqrt{\frac{L_{13}^2L_{23}^2 - 4S^2}{L_{13}^2L_{23}^2}} \quad (17)$$

由式(14)~(17)可知, 函数 g 关于边长 L_{13}, L_{23} 对称, 因此函数 g 取极值时, 有 $L_{13} = L_{23}$, 即投影三角形为等腰三角形。

令

$$L_{13} = L_{23} = L \quad (18)$$

将式(18)代入式(14), 有

$$g|_{L_{13}=L_{23}=L} = \frac{L^4}{180}(4\cos^2\theta_3 - 12\cos\theta_3 + 11) \quad (19)$$

接下来研究函数 g 随两边夹角的变化情况, 对投影面积为定值 S 的等腰三角形, 有

$$L^2 = 2S / \sin\theta_3 \quad (20)$$

将式(20)代入式(19), 可以得到函数值与两边夹角的函数关系为

$$g|_{L_{13}=L_{23}=L} = \frac{S^2}{45\sin^2\theta_3}(4\cos^2\theta_3 - 12\cos\theta_3 + 11) \quad (21)$$

将式(21)对 θ_3 求偏导, 有

$$\left. \frac{\partial g}{\partial \theta_3} \right|_{L_{13}=L_{23}=L} = \frac{2S^2}{15\sin^3\theta_3}(2\cos\theta_3 - 1)(\cos\theta_3 - 2) \quad (22)$$

由式(22)可知, g 取极值时, 有 $\theta_3 = 60^\circ$, 此时投影三角形为等边三角形。由式(14)可知 g 取极值对应 δ_{RMS} 取极值情况, 即: 对于口径面投影面积为定值的三角形, 当投影为正三角形时, 轴向原理误差的均方根值最小, 该结论与文献[15]一致。

当三角形平面投影周长为定值 p 时, 有

$$L_{12} = p - L_{13} - L_{23} \quad (23)$$

将式(18)和(23)代入式(15)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial L} &= \frac{1}{45}(27L^3 - 30pL^2 + 13p^2L - 2p^3) \\ &= \frac{1}{45}(7pL - 2p^2 - 9L^2)(p - 3L) \end{aligned} \quad (24)$$

当式(24)等于 0 时, 函数 g 取得极值。令

$$\varphi = 7pL - 2p^2 - 9L^2 \quad (25)$$

为考察 φ 的取值范围, 将 φ 对 p 和 L 求偏导

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 7L - 4p; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial L} = 7p - 18L \quad (26)$$

由式(26)可知, 函数 φ 的驻点为

$$p = 0, L = 0 \quad (27)$$

又因为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial L \partial p} \right)^2 = 23 > 0 \quad (28)$$

根据二元函数极值判断准则, 该驻点为极大值点, 即 $\varphi|_{p=0, L=0} = 0$ 。又因为三角形边长大于 0, 所以, 函数值 φ 恒小于 0。所以, g 取极值时, 有 $p - 3L = 0$, 即 $L = p/3$, 此时三角形为等边三角形, 即: 对于口径面投影边长为定值的三角形, 当投影为正三角形时, 轴向原理误差的均方根值最小。这就是平面投影法^[15]设计网状反射面的依据。

当面片在口径面的投影是边长为 L (面积为 S) 的正三角形时, 对应的原理误差均方根值为

$$\begin{aligned} \delta_{\text{RMS}} &= \frac{1}{3F} \sqrt{\frac{1}{5} S} \approx 0.1491 \frac{S}{F} \\ \delta_{\text{RMS}} &= \frac{1}{4F} \sqrt{\frac{1}{15} L^2} \approx 0.0645 \frac{L^2}{F} \end{aligned} \quad (29)$$

以上推导给出了单个三角形面片轴向原理误差均方根值的计算公式。从而整体索网原理误差的计算公式为

$$\delta_{\text{RMS}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta_{\text{RMS}i}^2 S_i} / \sum_{i=1}^n S_i \quad (30)$$

其中, $n, S_i, \delta_{\text{RMS}i}$ 分别为索网的面片数和各面片的口径面投影面积及原理误差均方根值。

1.4 轴向原理误差最大值计算

利用面积坐标变换公式, 式(5)可表示为

$$\begin{aligned} \phi &= 4F\Delta = -L_{13}^2 l_1^2 - L_{23}^2 l_2^2 + L_{13}^2 l_1 + L_{23}^2 l_2 \\ &\quad - (L_{13}^2 + L_{23}^2 - L_{12}^2) l_1 l_2 \\ &= L_{13}^2 l_1 l_3 + L_{23}^2 l_2 l_3 + L_{12}^2 l_1 l_2 \end{aligned} \quad (31)$$

为分析误差取极值的情况, 将上式对 l_1, l_2 求偏导, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial l_1} &= -2L_{13}^2 l_1 - (L_{13}^2 + L_{23}^2 - L_{12}^2) l_2 + L_{13}^2 \\ &= L_{12}^2 l_2 - 2L_{13}^2 l_1 - L_{13}^2 l_2 - L_{23}^2 l_2 + L_{13}^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial l_2} &= -2L_{23}^2 l_2 - (L_{13}^2 + L_{23}^2 - L_{12}^2) l_1 + L_{23}^2 \\ &= L_{12}^2 l_1 - L_{13}^2 l_1 - L_{23}^2 l_1 - 2L_{23}^2 l_2 + L_{23}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

当偏导等于 0 时, 有

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{L_{23}^2 (L_{12}^2 + L_{13}^2 - L_{23}^2)}{L_{12}^4 + L_{13}^4 + L_{23}^4 - 2L_{13}^2 L_{23}^2 - 2L_{13}^2 L_{12}^2 - 2L_{13}^2 L_{23}^2} \\ l_2 &= -\frac{L_{13}^2 (L_{12}^2 + L_{23}^2 - L_{13}^2)}{L_{12}^4 + L_{13}^4 + L_{23}^4 - 2L_{13}^2 L_{23}^2 - 2L_{13}^2 L_{12}^2 - 2L_{13}^2 L_{23}^2} \end{aligned} \quad (33)$$

函数在整个实数域内有唯一驻点, 由几何意义可知, 该驻点为极大值点。因无法直接从上式得出 l_1, l_2 的取值情况, 利用余弦定理, 对式(33)进行等价变化, 得到

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{L_{23} \cos \theta_1}{L_{12} \cos \theta_3 + L_{13} \cos \theta_2 + L_{23} \cos \theta_1} \\ l_2 &= \frac{L_{13} \cos \theta_2}{L_{12} \cos \theta_3 + L_{13} \cos \theta_2 + L_{23} \cos \theta_1} \end{aligned} \quad (34)$$

当口径面投影三角形为锐角或直角三角形时, $0 \leq l_1, l_2, l_1 + l_2 \leq 1$ 对式(34)恒成立, 根据面积坐标定义, 此时函数极值点位于三角形内部或边界。将式(34)代入式(31), 得到面片原理误差的最大值为

$$A_{\text{max}} = -\frac{1}{4F} \frac{L_{13}^2 L_{23}^2 L_{12}^2}{L_{12}^4 + L_{13}^4 + L_{23}^4 - 2(L_{13}^2 L_{23}^2 + L_{13}^2 L_{12}^2 + L_{13}^2 L_{23}^2)} \quad (35)$$

对于等边三角形, 最大原理误差为

$$A_{\text{max}} = L^2 / (12F) \quad (36)$$

当口径面投影三角形为钝角三角形时, 假设 $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$, 则有

$$\cos \theta_3 > \cos \theta_2 > (\cos \theta_2 + \cos \theta_3) > \cos \theta_1 < 0 \quad (37)$$

$$\cos \theta_1 = \cos(180 - \theta_1 - \theta_2) = -\cos(\theta_2 + \theta_3) \quad (38)$$

将式(37)和(38)代入式(34)的分母, 可以得到

$$\begin{aligned} &L_{12} \cos \theta_3 + L_{13} \cos \theta_2 - L_{23} \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ &\geq L_{12} \cos \theta_2 + L_{13} \cos \theta_2 - L_{23} \cos \theta_2 \\ &= (L_{12} + L_{13} - L_{23}) \cos \theta_2 > 0 \end{aligned} \quad (39)$$

即式(34)的分母恒大于 0, 因此, $l_1 < 0$ 。根据三角形面积坐标的定义, 函数的驻点在三角形外, 因此函数的极大值点在三角形边界上取得。三角形三条边对应的面积坐标满足

$$l_1 = 0, l_2 + l_3 = 1 \quad (40)$$

$$l_2 = 0, l_1 + l_3 = 1 \quad (41)$$

$$l_3 = 0, l_1 + l_2 = 1 \quad (42)$$

对应的函数值分别为

$$\phi = L_{13}^2 l_1 l_3 + L_{23}^2 l_2 l_3 + L_{12}^2 l_1 l_2 = L_{23}^2 l_2 (1 - l_2) \leq L_{23}^2 / 4 \quad (43)$$

$$\phi = L_{13}^2 l_1 l_3 + L_{23}^2 l_2 l_3 + L_{12}^2 l_1 l_2 = L_{13}^2 l_1 (1 - l_1) \leq L_{13}^2 / 4 \quad (44)$$

$$\phi = L_{13}^2 l_1 l_3 + L_{23}^2 l_2 l_3 + L_{12}^2 l_1 l_2 = L_{12}^2 l_1 (1 - l_1) \leq L_{12}^2 / 4 \quad (45)$$

因此, 口径面投影为钝角三角形面片的原理误差的最大值为

$$A_{\text{max}} = \frac{1}{16F} \max(L_{12}^2, L_{13}^2, L_{23}^2) \quad (46)$$

由上式可知, 口径面投影为钝角三角形的面片的原理误差的最大值与投影三角形最长边的边长的平方成正比。因此, 网状反射面设计时应控制最长边。

2 数值验证

为验证上述公式推导的正确性, 分别用数值方法与本文公式计算不同三角形面片的原理误差。假定抛物面焦距为 10 m, 在口径面随机生成 300 组二维节点坐标数据, 根据抛物面方程式(3)计算节点的 z 坐标。每三个点为一组, 构造共 100 个空间三角形。

(1) 误差均方根值数值计算方法

根据误差均方根值的定义, 使用 Matlab 数值计算软件中的 `quad2d` 双重积分函数, 对式(6)求解。

(2) 误差最大值数值计算方法

面片上不同点具有不同的原理误差值, 面片原理误差的最大值可能在面片的任何位置取得。为确定原理误差取最大值的点及对应的原理误差值, 建立式(47)的优化模型

$$\begin{aligned} & \text{find } x, y \\ & \min \text{ fun} = -((ax + by + c) - (x^2 + y^2) / (4F)) \\ & \quad = (x^2 + y^2) / (4F) - (ax + by + c) \\ & \text{s.t. } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \end{aligned} \quad (47)$$

其中, 优化变量为平面任意点的坐标, 约束条件表示点位于三角形内, 优化目标为原理误差的负数最小, 即原理误差最大。 $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别表示图 6 中 $\triangle ABC, \triangle PBC, \triangle PAC, \triangle PAB$ 的面积。

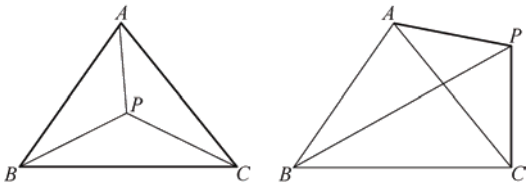


图 6 平面任一点与三角形位置关系

当各点坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 和 $P(x, y)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \sigma &= |x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_3 y_2| \\ \sigma_1 &= |x y_2 - x y_3 + x_2 y_3 - x_2 y + x_3 y - x_3 y_2| \\ \sigma_2 &= |x_1 y - x_1 y_3 + x y_3 - x y_1 + x_3 y_1 - x_3 y| \\ \sigma_3 &= |x_1 y_2 - x_1 y + x_2 y - x_2 y_1 + x y_1 - x y_2| \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{-y_2 z_1 + y_3 z_1 + y_1 z_2 - y_3 z_2 - y_1 z_3 + y_2 z_3}{x_2 y_1 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3} \\ b &= \frac{x_2 z_1 - x_3 z_1 - x_1 z_2 + x_3 z_2 + x_1 z_3 - x_2 z_3}{x_2 y_1 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3} \\ c &= \frac{x_3 y_2 z_1 - x_2 y_3 z_1 - x_3 y_1 z_2 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 - x_1 y_2 z_3}{x_2 y_1 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_3} \end{aligned} \quad (49)$$

使用 Matlab 的 `ga` 函数对优化模型进行求解。

(3) 结果验证

数值计算方法与使用式(12)计算得到的误差均方根值的差值情况如图 7 所示。从图中数据可以看出, 两者的差别在 10^{-19} 数量级, 证明了原理误差均方根值计算公式推导的正确性。

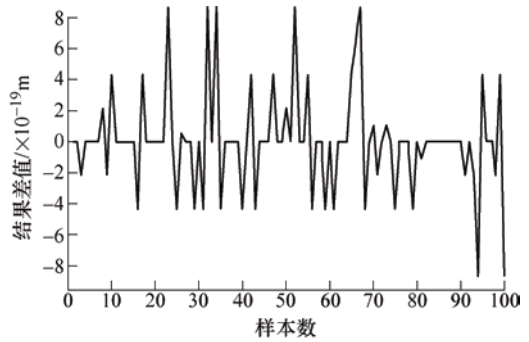


图 7 积分计算与公式计算得到的误差均方根值差值情况

数值计算方法与使用式(35)和(46)计算得到的误差最大值的差值情况如图 8 所示。从图中数据可以看出, 两者的差别在 10^{-8} 数量级, 证明了原理误差最大值计算公式推导的正确性。

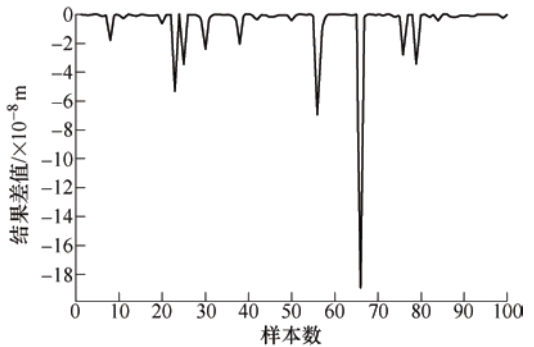


图 8 优化求解与公式计算得到的误差最大值差值情况

3 结论

对旋转抛物反射面网状天线的原理误差均方根值及最大值计算公式进行了推导, 结果表明:

(1) 反射面原理误差的最大值和均方根值可由反射面在口径面内的投影形状和抛物面焦距确定。

(2) 对于单个三角形面片, 原理误差的最大值和均方根值可由口径面内投影边长和抛物面焦距唯一确定, 与面片在抛物面上的位置无关。

(3) 对于单个三角形面片, 当其口径面投影面积或周长为定值时, 正三角形投影对应的原理误差均方根值最小。

(4) 相对于空间长度相等的索网, 口径面投影长度相等的索网能获得更均匀的误差分布。

根据本文公式和方法, 可实现任意结构形式的抛物反射面网状天线原理误差的快速计算, 计算结果可用于指导网状天线结构的设计与优选, 提高设计效率。

参 考 文 献

- [1] 李团结, 马小飞. 大型空间可展开天线技术研究[J]. 空间电子技术, 2012, 9(3): 35-39.
LI Tuanjie, MA Xiaofei. Technologies of large deployable space antennas[J]. Space Electronic Technology, 2012, 9(3): 35-39.
- [2] TANG Yangqiong, LI Tuanjie, WANG Zuowei, et al. Surface accuracy analysis of large deployable antennas[J]. Acta Astronautica, 2014, 104(1): 125-133.
- [3] LAI C Y, PELLEGRINO S. Umbrella-type furlable reflector based on tension-truss concept[C]//AIAA Applied Aerodynamics Conference. 2013.
- [4] TIBERT G. Deployable tensegrity structures for space applications[D]. Stockholm: Royal Institute of Technology, 2002.
- [5] MEGURO A, SHINTATE K, USUI M, et al. In-orbit deployment characteristics of large deployable antenna reflector onboard Engineering Test Satellite VIII[J]. Acta Astronautica, 2009, 65(9): 1306-1316.
- [6] BAARS J W M. The paraboloidal reflector antenna in radio astronomy and communication: theory and practice[M]. New York: Springer, 2007.
- [7] TANG Yangqiong, LI Tuanjie, MA Xiaofei. Form-finding of cable net reflector antennas considering creep and recovery behaviors[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2016, 53(4): 610-618.
- [8] 陈聪聪, 李团结, 马小飞. 空间可展开结构静力多稳态分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 72-79.
CHEN Congcong, LI Tuanjie, MA Xiaofei. Static multiple-stable-state analysis of deployable structures with clearance joints[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 72-79.
- [9] RUZE J. Antenna tolerance theory—A review[J]. Proc IEEE, 1966, 54(4): 633-640.
- [10] RUZE J. The effect of aperture errors on the antenna radiation pattern[J]. Il Nuovo Cimento (1943-1954), 1952, 9(3): 364-380.
- [11] RAHMAT-SAMII Y. An efficient computational method for characterizing the effects of random surface errors on the average power pattern of reflectors[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 1983, 31(1): 92-98.
- [12] CHEN Congcong, LI Tuanjie, TANG Yangqiong. Mesh generation of elliptical aperture reflectors[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2019, 32(4): 04019025.
- [13] AGRAWAL P, ANDERSON M, CARD M. Preliminary design of large reflectors with flat facets[J]. Antennas & Propagation IEEE Transactions on, 1981, 29(4): 688-694.
- [14] HEDGEPEETH J M. Accuracy potentials for large space antenna reflectors with passive structure[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1982, 19(3): 211-211.
- [15] 杨东武, 尤国强, 保宏. 抛物面索网天线的最佳型面设计方法[J]. 机械工程学报, 2011, 47(19): 123-128.
YANG Dongwu, YOU Guoqiang, BAO Hong. Best geometry design method for paraboloid reflectors of mesh antenna[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(19): 123-128.
- [16] 钟顺时. 天线理论与技术[M]. 北京: 电子工业出版社, 2015.
ZHONG Shunshi. Antenna theory and techniques[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2015.
- [17] MERTIE J B. Transformation of trilinear and quadriplanar coordinates to and from Cartesian coordinates[J]. The American Mineralogist, 1964, 49(7/8): 926-936.

作者简介: 陈聪聪, 女, 1993 年出生, 博士研究生。主要研究方向为空间可展结构与天线。

E-mail: ccchen_l@stu.xidian.edu.cn

李团结(通信作者), 男, 1972 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究领域为空间可展结构与天线、智能机器人和电子装备机电热技术。

E-mail: tjli888@126.com

唐雅琼, 女, 1990 年出生, 博士, 副教授, 研究生导师。主要研究方向为空间可展开天线设计与分析, 空间可展开结构机电热分析与控制。

E-mail: yqtang@xidian.edu.cn