

DOI: 10.3901/JME.2022.06.010

# 基于并联机构的六维加速度传感器的反向动力学<sup>\*</sup>

尤晶晶<sup>1,2</sup> 王林康<sup>1</sup> 刘云平<sup>3</sup> 李成刚<sup>2,4</sup> 吴洪涛<sup>2,4</sup>

(1. 南京林业大学机械电子工程学院 南京 210037;

2. 南京航空航天大学江苏省精密与微细制造技术重点实验室 南京 210016;

3. 南京信息工程大学自动化学院 南京 210044;

4. 南京航空航天大学机电学院 南京 210016)

**摘要:** 六维加速度传感器能够测量完整的空间加速度信息,在人工智能等领域应用前景广阔。由于多输入、多输出量之间的强非线性耦合关系,该类系统的反向动力学问题至今尚未完全解决。以“12-6”、“9-3”两种并联式六维加速度传感器为例,通过引入四元数矩阵和关于四阶向量叉乘的运算规则,在相空间内重新推导并求解了反向动力学方程。据此,揭示了方程数值性态与其影响因素之间的映射规律。研究发现:不计入质量块与基座之间的相对运动参量时,方程的解算效果更优;方程的解算精度主要与弹性体的拓扑构型以及信号频率、采样频率比和采样时间有关;当采样频率小于 60 kHz 时,方程的解算效率满足实时性要求。结合虚功率原理和特征长度法,求解了两种构型刚度矩阵的最小特征值,找到了弹性体拓扑构型影响方程解算精度的根本原因,这为多维传感器的构型综合提供了理论指导。进一步地,针对方程中存在小扰动和大扰动时解算结果失效的问题,分别通过监测基座的转动方向交替点和构造关于输入量的协调闭链,构建了对应的误差补偿和故障修复算法。实验室条件下,两种构型实物样机的测量误差能够分别控制在 5.822% 和 6.781% 之内,且均满足实时性要求,验证了上述反向动力学模型是有效、可靠的。

**关键词:** 并联机构; 六维加速度传感器; 四元数; 反向动力学; 相空间; 刚度

**中图分类号:** TH825

## Inverse Dynamics of Six-axis Accelerometers Based on Parallel Mechanisms

YOU Jingjing<sup>1,2</sup> WANG Linkang<sup>1</sup> LIU Yunping<sup>3</sup> LI Chenggang<sup>2,4</sup> WU Hongtao<sup>2,4</sup>

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037;

2. Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016;

3. School of Automation, Nanjing University of Information Science &amp; Technology, Nanjing 210044;

4. School of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

**Abstract:** Six-axis accelerometers can measure the spatial accelerations of moving carriers, which have broad applications in the fields of artificial intelligence and the like. The inverse dynamics of this type of system has not yet been resolved due to the strong nonlinear coupling between multiple inputs and multiple outputs. Taking the six-axis accelerometers based on "12-6" and "9-3" configuration parallel mechanisms as examples, their inverse kinetic equations are derived and solved in the phase space by introducing quaternion matrices and a cross product operation rule related to the fourth-order vectors. Based on these, the relations between the numerical behavior and influencing factors of the equations are revealed. The study found that: the equations are more

<sup>\*</sup> 国家留学基金(201908320035)和国家自然科学基金(51405237, 51875293)资助项目。20210615 收到初稿, 20211025 收到修改稿。

effective when the relative motion parameters between the mass and the base are ignored; the solution accuracies of the equations are related to the topological configurations of the elastic bodies, the frequencies of the measured signal, the sampling frequency ratios and the sampling time; when the sampling frequencies are less than 60kHz, the solution efficiencies of the equations meet the real-time requirements. Next, the minimum eigenvalues of the stiffness matrices of the two configurations are solved by combining the virtual power principle and the characteristic length method. The root cause of the relations between the elastic body topologies and the accuracies of the equation solutions is found, which provides the theoretical guidance for the configuration synthesis of multi-dimensional sensors. Further, in view of the fact that the accelerations are invalid when there are small or large disturbance in the equations, the corresponding error compensation and fault restoration algorithms are constructed by monitoring the rotation direction alternate point of the base and establishing a compatibility closed chain in terms of the input, respectively. The measurement errors of the physical prototypes of the two configurations can be controlled within 5.822% and 6.781% respectively, both of which meet the real-time request, verifying that the inverse dynamic model is effective and reliable.

**Key words:** parallel mechanism; six-axis accelerometer; quaternion; inverse dynamics; phase space; stiffness

## 0 前言

随着科学技术的不断发展以及人们认识客观世界要求的不断提高,对三维空间内物体的六维运动进行探测显得越来越重要。例如,为实现空间机器人末端执行器的动力学控制,必须实时获取机器人本体的完整的运动信息<sup>[1]</sup>。另外,在振动监测<sup>[2]</sup>、惯性导航<sup>[3]</sup>、人工智能<sup>[4]</sup>等领域都涉及到载体的空间运动。一般地,只有加速度测量时可以不从外界获取信号,也无需向外界传送信号。由此,产生了“六维加速度传感器”的概念<sup>[5]</sup>,即一种能够同时测量空间三维线加速度和三维角加速度的惯性测量仪器。然而,目前国内外市场上还没有一款真正成熟、完善的六维加速度传感器产品,仍然停留在实验室原理论证阶段。由于多输入-多输出量的强非线性耦合,相比于目前发展较为成熟的一维、三维加速度计而言,六维加速度传感器在理论层面上有本质的区别,涉及的部分关键科学问题(如构型综合、动力学求解、参数辨识及优化、性能评估及标定等)至今尚未完全解决。

从检索到的文献资料来看,目前,六维加速度传感器的原理方案主要有四种。方案 1 是利用成熟的六维力传感技术获取待测体的输出力,然后,运用 Newton-Euler 等动力学方程将六维力换算成六维加速度<sup>[6-7]</sup>。由于实际测量时,外界加速度作用在传感器的质量块上,而质量块与基座之间允许的弹性变形量极小,因此,该方案仅适用于待测体做微幅运动时的场合。为解决该不足,后三个原理方案中的待测加速度均作用在传感器的基座上,也即基座受到基础激励后,质量块产

生与之对应的六维伴随运动。具体地,方案 2 是利用正交布置的三个线加速度计结合三个陀螺仪分别测量运动载体的三维线加速度和三维角速度,并通过数值微分运算将三维角速度换算成三维角加速度<sup>[8]</sup>。然而,陀螺仪在测量时不可避免地存在漂移问题,且要么不能承受较高的线加速度冲击,要么受温度、磁场等环境因素的影响较严重<sup>[9]</sup>。方案 3 是在传感器基座上选取至少六个位置点并安装线加速度计,分别测量所在位置点沿安装轴线方向的线加速度值,并运用 Schuler 方程<sup>[10]</sup>将全部线加速度值换算成基座的三维线加速度和三维角加速度<sup>[11-13]</sup>。由于在换算过程中需要将具有一定物理尺寸的加速度计近似等效为理想的点测量组件,在解算原理上必然引起内杆臂效应误差和横向灵敏度误差<sup>[14]</sup>。方案 4 是通过机械联接<sup>[15]</sup>或静电悬浮<sup>[16]</sup>的方式,将至少六个力或位移敏感元件安置于质量块和基座之间,构成单质量块的一体化结构;接着,通过一定的算法将全部敏感元件的测量值换算成基座的六维加速度值。考虑到该方案中的质量块、基座和敏感元件分别对应于并联机构中的动平台、静平台和运动副,因此,本文将命名为“基于并联机构的六维加速度传感器”,也简称为“并联式六维加速度传感器”。

由于多个敏感元件共用同一个质量块,并联式六维加速度传感器在理论上能够避开前三种原理方案的不足,且还具有结构紧凑、刚度大、动力学性能好等优点<sup>[17]</sup>,已受到越来越多的关注。根据基座感应的六维加速度,求解全部敏感元件输出值的问题,称为正向动力学模型。文献[18]在位形空间内通过重组加速度,给出了支链轴向力关于加速度的解析表达式,并剖析了支链轴向

力的构成成分。反之,根据全部或部分敏感元件的输出值,反推基座六维加速度的问题,称为反向动力学模型。由于基础激励所引起质量块的广义惯性力会同时作用于所有的敏感元件,且敏感元件的姿态与待求的基础激励有关,因此,并联式六维加速度传感器的反向动力学模型比其正向动力学模型要复杂得多。文献[15-16]在处理反向动力学模型时,均忽略了方程中的非线性耦合项,虽然计算效率得到了保证,但这却是以牺牲方程的计算精度为代价。文献[18]通过将位形空间内建立的二阶反向动力学方程化简成两组形式简单的一阶线性常微分方程,推导出了关键特征量的显式递推公式;但并没有从理论上分析质量块与基座之间的相对运动对反向动力学模型本身的影响,没有揭示反向动力学方程的求解精度、效率与其影响因素之间的映射规律,也没有考虑并解决反向动力学方程中可能存在输入扰动的问题,这限制了六维加速度传感器测量精度、效率和可靠性的进一步提高,也是该类系统目前尚未实现仪器化、实用化的主要原因之一。

为解决上述不足,本文以本团队发明的两种并联式六维加速度传感器为例,在相空间内重新建立并首次定量地对比了考虑相对运动和忽略相对运动两种情况下的反向动力学方程。接下来,系统地分析了影响方程解算精度、效率的因素及原因;特别地,从机构刚度特性的角度揭示了弹性体构型影响方程求解精度的机理,为改善反向动力学方程的数值性态提出了指导性建议。进一步地,针对反向动力学方程的输入量中可能存在小扰动(误差不超过1%)和大扰动(误差超过1%)这两类常见情况,分别构建了对应的误差补偿和故障修复算法,为提高该类系统的可靠性提出了一条新思路。最后,加工制作了两台实物样机,并通过试验验证了本文设计方案及数学模型的有效性、可行性。

## 1 并联式测量原理及两种拓扑构型

### 1.1 并联式六维加速度传感器的工作原理

从机构学的观点看,并联式六维加速度传感器的弹性体结构由“静平台”、动平台以及连接两者的SPS支链(S-球面副,P-移动副)三部分组成,如图1所示。其中, $P_i$ 、 $b_i$ 、 $B_i$ 分别代表第*i*条支链上的移动副以及与静、动平台相连接的球铰链的几何中心点。在机械结构及工作原理上,并联

式六维加速度传感器与并联机器人的不同之处如下。

(1)“静平台”在工作过程中并非静止,而是类似于加速度计中的基座,故后文称其为“基座”。这也是六维加速度传感器和六维力传感器的主要区别之一。

(2)动平台的作用是产生惯性力,类似于加速度计中的质量块,故后文称其为“质量块”。显然,质量块的质量越大,则传感器的灵敏度越大。

(3)为消除机械间隙和摩擦,并实现后续的微型化制造,支链中的球面副用柔性球铰链代替。

(4)考虑到压电陶瓷的高频响应特性能够满足一般测量场合下加速度的频带要求<sup>[5]</sup>,移动副(即敏感元件)用压电陶瓷充当。

(5)为保证灵敏度,质量块的质量一般会达到支链质量的190倍以上<sup>[5]</sup>。因此,在动力学建模时,可忽略支链的惯性影响。另外,压电陶瓷的两端为球面副,因此,每条支链可视为理想的二力杆,其可行性已得到论证<sup>[5]</sup>。

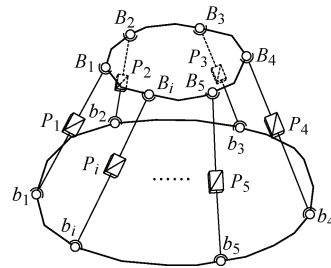


图1 并联式六维加速度传感器的工作原理图

在实际测量时,将基座刚性固定于待测载体上感应六维运动。当基座的速度发生变化即存在加速度时,在惯性力的作用下,质量块的位姿相对于基座会发生变化。同时地,质量块上的惯性力会传递到所有支链上,产生轴向力。此时,由于压电陶瓷的正压电效应,压电陶瓷的两端会极化出电荷<sup>[18]</sup>。压电电荷通过电荷放大器、数据采集卡等信号设备的调理后被计算机的串/并口接收。

通过构建并求解系统的反向动力学方程,可以将采集到的支链电荷量换算成基座的六维加速度。由压电理论可知,压电陶瓷的电荷量和轴向力成正比例关系,比例系数为其轴线方向的压电常数。为便于描述,本文将支链的轴向力和基座的六维加速度值分别视为反向动力学模型的输入量和输出量。

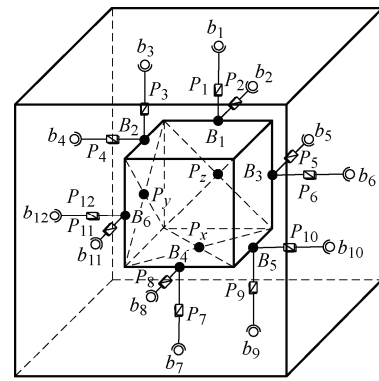
### 1.2 两种六自由度冗余拓扑构型

文献[18]已证明:① 任何的六自由度并联构

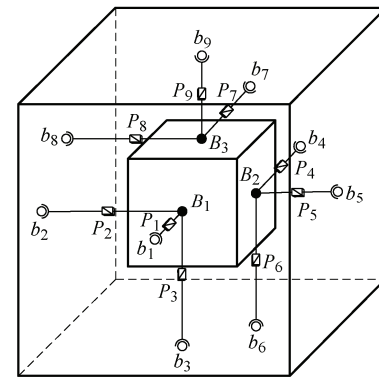
型均可作为六维加速度传感器的弹性体结构;

② 若需对支链实施有效预紧, 则支链的最少条数为 7。文献[19-20]以弱耦合度为设计指标, 分别综合出了含 12 条支链的“12-6”型和含 9 条支链的“9-3”型的六自由度并联机构(本文分别称其为“构型 A”和“构型 B”), 如图 2 所示。运用拓扑结构理论<sup>[21]</sup>分析后发现, 这两种弱耦合度并联机构的正向运动学的解析求解难度均较低。因此, 若将它们设计成六维加速度传感器的弹性体结构, 必将有利于探究质量块、基座的相对运动量对反向动力学方程求解效果的影响, 这正是本文工作的突破口。

限于篇幅, 这里仅给出构型 A 的结构模型, 如图 3 所示, 主要包括基座, 质量块, 柔性球铰链, 压电陶瓷, 预紧螺钉, 副板, 锁紧板, 连接板这八个部件。其中, 基座底板上设有四个螺纹孔, 用于刚性联接待测载体; 质量块为立方体状, 其边长和质量分别记为  $2n$  和  $m$ ; 柔性球铰链通过结构上的“嵌套”处理, 实现二重、三重的原理功能<sup>[5]</sup>; 压电陶瓷为圆柱状, 且其两端面通过绝缘处理过的环氧树脂胶与柔性球铰链固连; 借助于 U 形副板、含多个锁紧槽的预紧螺钉和可对分拆解的锁紧板, 能够实现全部支链的预紧和防松处理<sup>[18]</sup>。

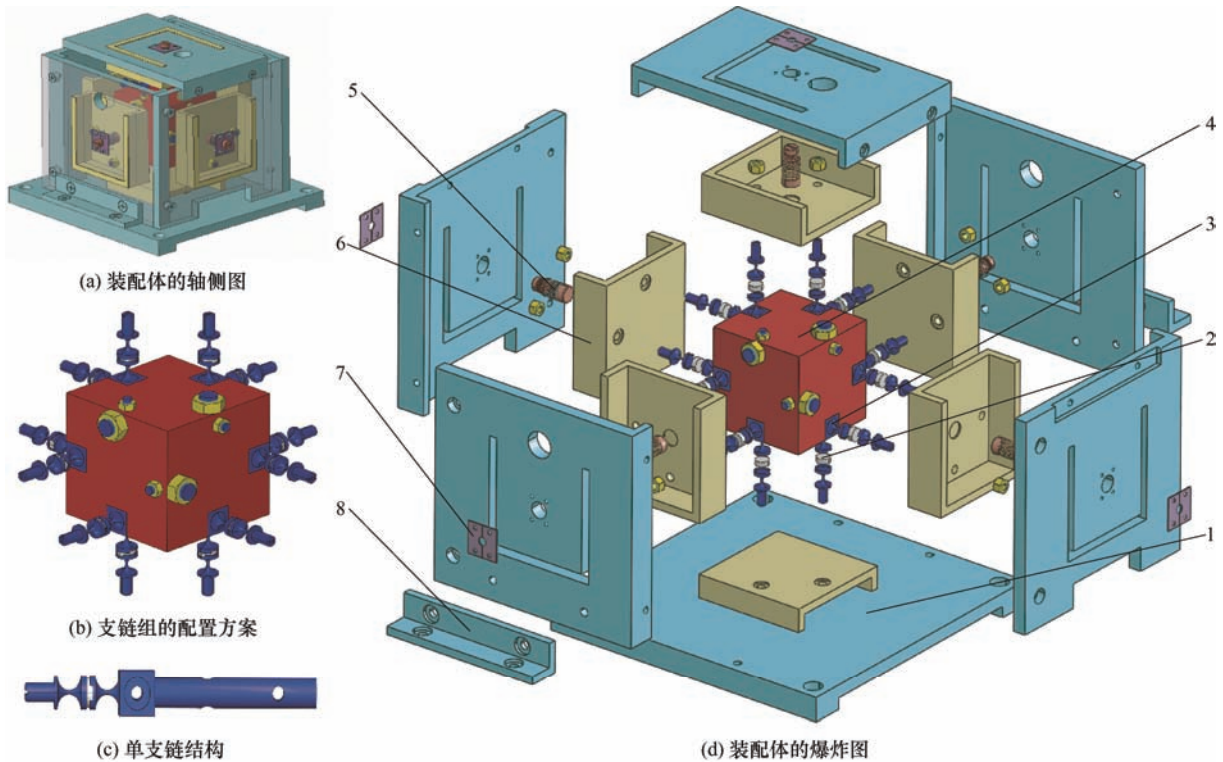


(a) 构型 A



(b) 构型 B

图 2 并联式六维加速度传感器的两种拓扑构型



1. 基座 2. 质量块 3. 柔性球铰链 4. 压电陶瓷 5. 预紧螺钉 6. 副板 7. 锁紧板 8. 连接板

图 3 并联式六维加速度传感器的结构模型



另外, 本文在推导系统的运动学、动力学模型时, 也是以构型 A 为例给出两种构型对应方程、算法中的相同步骤和结果, 后文对此不再赘述。

## 2 并联机构的正向运动学

### 2.1 问题描述及坐标系建立

机构的正向运动学是其正、反向动力学建模的基础, 在本文中指的是已知所有支链的实时长度, 求解质量块相对于基座的位姿和速度。六自由度并联机构的正向运动学求解是机构学中的热点和难点问题, 一般仅能在预设初值的前提下以数值迭代的形式给出近似解, 这不利于后续反向动力学方程数值性态的分析。由此, 本节的目标是运用解析法求解构型 A、B 的正向运动学方程, 其基本思路是: 首先, 推导质量块上三个以上特征点的坐标关于支链实时长度的解析式; 接着, 推导质量块相对于基座的位姿参量关于特征点坐标的解析式; 最后, 联列上述两组解析式。

为便于建模, 在地面、基座和质量块上分别建立坐标系  $O_0\{x_0, y_0, z_0\}$ 、 $O_1\{x_1, y_1, z_1\}$  和  $O_2\{x_2, y_2, z_2\}$ , 如图 4 所示。初始时刻, 三个坐标系的原点和坐标轴完全重合, 且坐标原点位于质量块质心处。显然, 机构的正向运动学中仅讨论  $\{O_2\}$  相对于  $\{O_1\}$  的运动。图中,  $r_{01}$ 、 $r_{02}$ 、 $r_{12}$  分别表示三个坐标系原点之间的位置矢量。

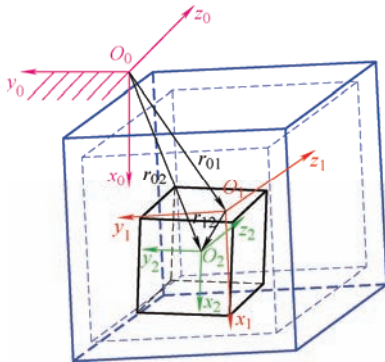


图4 计算模型中的三个坐标系

### 2.2 位姿正解

根据 Hooke 定律, 有

$$l_i = L + f_i/k_i \quad (1)$$

式中,  $L$  为支链的初始长度,  $l_i$ 、 $f_i$  和  $k_i$  分别为第  $i$  条支链的实际长度、轴向力和轴向刚度。

#### 2.2.1 构型 A

将点  $B_i$  在  $\{O_1\}$  中的坐标记为  $B_i$ 。根据图 2a 中

球面副中心点之间的几何关系<sup>[19]</sup>, 由解析几何法不难推导出  $r_{12}$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$  关于  $l_i (i=1 \sim 12)$  的解析表达式

$$r_{12} = \frac{1}{8L} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -l_1^2 + l_2^2 + l_7^2 - l_8^2 \\ l_5^2 - l_6^2 - l_{11}^2 + l_{12}^2 \\ -l_3^2 + l_4^2 + l_9^2 - l_{10}^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} (B_1)_z \\ (B_1)_x \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} (l_1^2 - l_2^2)/(2L) \\ (n+L)(r_{12})_y - n(r_{12})_z - (l_1^2 + l_7^2)/4 + G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (B_2)_y \\ (B_2)_x \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} (l_3^2 - l_4^2)/(2L) \\ (n+L)(r_{12})_y - n(r_{12})_x - (l_3^2 + l_9^2)/4 + G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (B_3)_y \\ (B_3)_z \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} (l_6^2 - l_5^2)/(2L) \\ (n+L)(r_{12})_z - n(r_{12})_x + (l_5^2 + l_{11}^2)/4 - G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (B_1)_y \\ (B_2)_z \\ (B_3)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B_2)_y + (B_3)_y - (r_{12})_y \\ (B_1)_z - (B_3)_z + (r_{12})_z \\ (B_1)_x - (B_2)_x + (r_{12})_x \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{L+2n} \begin{pmatrix} n+L & 1 \\ n & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{\|r_{12}\|_2^2}{2} + \frac{3n^2}{2} + \frac{(n+L)^2}{2}$$

式中,  $\|\cdot\|_2$  表示向量的欧式范数。

易证明,  $O_2$  同时为  $B_1$  与  $B_4$ 、 $B_2$  与  $B_5$  以及  $B_3$  与  $B_6$  的中点, 故  $B_4$ 、 $B_5$  和  $B_6$  的表达式为

$$B_{j+3} = 2r_{12} - B_j \quad j=1, 2, 3 \quad (4)$$

根据姿态矩阵的定义, 姿态正解可解析表示为

$$R = (P_x - r_{12} \quad P_y - r_{12} \quad P_z - r_{12})/n \quad (5)$$

式中,  $R$  表示  $\{O_2\}$  相对于  $\{O_1\}$  的三阶姿态矩阵,  $P_x$ 、 $P_y$ 、 $P_z$  分别为坐标系  $\{O_2\}$  的  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴与质量块表面交点的坐标值, 如图 2a 所示。

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (r_{12} + B_4 + B_5) - (B_4 - r_{12}) \times (B_5 - r_{12})/n \\ (r_{12} + B_2 + B_6) - (B_6 - B_2) \times (r_{12} - B_2)/n \\ (r_{12} + B_1 + B_3) - (r_{12} - B_1) \times (B_3 - B_1)/n \end{pmatrix}$$

#### 2.2.2 构型 B

类似地, 根据图 2b 中的几何约束关系<sup>[20]</sup>, 容易推导出  $B_1$ 、 $B_2$  和  $B_3$  关于  $l_i (i=1 \sim 9)$  的解析表达式

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \frac{1}{6L} \begin{pmatrix} 2L^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2l_3^2 - c_1 \\ 2L^2 + l_1^2 - 2l_2^2 + l_3^2 - c_1 \\ -2L^2 + 2l_1^2 - l_2^2 - 2l_3^2 + c_1 - 6nL \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_2 = \frac{1}{6L} \begin{pmatrix} 2L^2 + l_4^2 + l_5^2 - 2l_6^2 - c_2 \\ -2L^2 - l_4^2 + 2l_5^2 - l_6^2 + c_2 - 6nL \\ 2L^2 - 2l_4^2 + l_5^2 + l_6^2 - c_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_3 = \frac{1}{6L} \begin{pmatrix} -2L^2 - 2l_7^2 - l_8^2 + 2l_9^2 + c_3 - 6nL \\ 2L^2 + l_7^2 - 2l_8^2 + l_9^2 - c_3 \\ 2L^2 - 2l_7^2 + l_8^2 + l_9^2 - c_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

$$c_{j1} = \sqrt{2c_{j1} + 4L^2 c_{j2} - 2c_{j3}}$$

$$c_{j1} = l_{3j-2}^2 l_{3j-1}^2 + l_{3j-2}^2 l_{3j}^2 + l_{3j-1}^2 l_{3j}^2$$

$$c_{j2} = l_{3j-2}^2 + l_{3j-1}^2 + l_{3j}^2$$

$$c_{j3} = 4L^4 + l_{3j-2}^4 + l_{3j-1}^4 + l_{3j}^4$$

进一步地, 根据点  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  和  $O_2$  之间的位置关系以及姿态矩阵的定义, 推导出位姿正解

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{3n} \begin{pmatrix} (2\mathbf{v}_{12} - \dot{\mathbf{B}}_1 - \dot{\mathbf{B}}_2 - ((\mathbf{v}_{12} - \dot{\mathbf{B}}_1) \times (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_2) + (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_1) \times (\mathbf{v}_{12} - \dot{\mathbf{B}}_2)) / n)^T \\ (\dot{\mathbf{B}}_2 - \dot{\mathbf{B}}_3 - ((2\mathbf{v}_{12} - \dot{\mathbf{B}}_2 - \dot{\mathbf{B}}_3) \times (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_2) + (2\mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_3) \times (\mathbf{v}_{12} - \dot{\mathbf{B}}_2)) / n)^T \\ (-2\mathbf{v}_{12} + \dot{\mathbf{B}}_1 + \dot{\mathbf{B}}_3 - ((\mathbf{v}_{12} - \dot{\mathbf{B}}_1) \times (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1) + (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_1) \times (\dot{\mathbf{B}}_3 - \dot{\mathbf{B}}_1)) / n)^T \end{pmatrix}^T$$

式中,  $\dot{\mathbf{B}}_1$ 、 $\dot{\mathbf{B}}_2$ 、 $\dot{\mathbf{B}}_3$  分别为  $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$  的速度矢量。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}_1 &= \frac{1}{2n+L} \begin{pmatrix} (n/L)(l_1\dot{l}_1 - l_2\dot{l}_2) - (n+L)(v_{12})_y + n(v_{12})_z + (l_1\dot{l}_1 + l_7\dot{l}_7) / 2 - \dot{G} \\ (n/L+1)(l_3\dot{l}_3 + l_6\dot{l}_6 - l_4\dot{l}_4 - l_5\dot{l}_5) + (n+L)(v_{12})_z - n(v_{12})_y + 2n(v_{12})_x + (l_5\dot{l}_5 + l_1\dot{l}_1 - l_3\dot{l}_3 - l_9\dot{l}_9) / 2 \\ (n/L+1)(l_1\dot{l}_1 - l_2\dot{l}_2) + (n+L)(v_{12})_y - n(v_{12})_z - (l_1\dot{l}_1 + l_7\dot{l}_7) / 2 + \dot{G} \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{B}}_2 &= \frac{1}{2n+L} \begin{pmatrix} (n/L)(l_3\dot{l}_3 - l_4\dot{l}_4) - (n+L)(v_{12})_y + n(v_{12})_x + (l_3\dot{l}_3 + l_9\dot{l}_9) / 2 - \dot{G} \\ (n/L+1)(l_3\dot{l}_3 - l_4\dot{l}_4) + (n+L)(v_{12})_y - n(v_{12})_x - (l_3\dot{l}_3 + l_9\dot{l}_9) / 2 + \dot{G} \\ (n/L+1)(l_1\dot{l}_1 - l_2\dot{l}_2) + (n/L)(l_5\dot{l}_5 - l_6\dot{l}_6) + (n+L)((v_{12})_y + 2(v_{12})_z) - n(v_{12})_x + (l_5\dot{l}_5 + l_{11}\dot{l}_{11} - l_1\dot{l}_1 - l_7\dot{l}_7) / 2 \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{B}}_3 &= \frac{1}{2n+L} \begin{pmatrix} (n/L)(l_1\dot{l}_1 + l_4\dot{l}_4 - l_2\dot{l}_2 - l_3\dot{l}_3) + (n+L)(v_{12})_x + n(v_{12})_z + (l_1\dot{l}_1 + l_7\dot{l}_7 - l_3\dot{l}_3 - l_9\dot{l}_9) / 2 \\ (n/L+1)(l_6\dot{l}_6 - l_5\dot{l}_5) + (n+L)(v_{12})_z - n(v_{12})_x + (l_5\dot{l}_5 + l_{11}\dot{l}_{11}) / 2 - \dot{G} \\ (n/L)(l_6\dot{l}_6 - l_5\dot{l}_5) - (n+L)(v_{12})_z + n(v_{12})_x - (l_5\dot{l}_5 + l_{11}\dot{l}_{11}) / 2 + \dot{G} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

构型 B 的速度推导过程与此完全相同。结果表明, 两种构型的速度正解均能唯一地解析表达。

### 3 反向动力学方程的推导及求解

#### 3.1 预备工作

为便于反向动力学的建模及求解, 这里不考虑

$$\mathbf{r}_{12} = (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3) / 3 + ((\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_3) \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_3)) / (3n) \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{r}_{12} - \mathbf{B}_1) / n \quad (8)$$

综合式(2)、(5)、(7)和(8)可知, 这两种并联机构的位姿正解均能够唯一地解析表达。

#### 2.3 速度正解

将  $\{O_2\}$  相对于  $\{O_1\}$  的线速度和角速度分别记为  $\mathbf{v}_{12}$  和  $\boldsymbol{\omega}_{12}$ 。以构型 A 为例, 将式(2)等号两边同时对时间求一阶导数

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{1}{4L} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2\dot{l}_2 - l_1\dot{l}_1 + l_7\dot{l}_7 - l_8\dot{l}_8 \\ l_5\dot{l}_5 - l_6\dot{l}_6 - l_{11}\dot{l}_{11} + l_{12}\dot{l}_{12} \\ l_4\dot{l}_4 - l_3\dot{l}_3 + l_9\dot{l}_9 - l_{10}\dot{l}_{10} \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中,  $\dot{l}_i$  表示支链  $i$  的速率, 可通过对支链的实时长度进行数值微分运算获得。

根据角速度的数学定义,  $\boldsymbol{\omega}_{12}$  与  $\mathbf{R}$  之间满足

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{12} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (10)$$

式中,  $(\hat{\bullet})$  为向量的反对称矩阵。

式中,  ${}^0\mathbf{R}$  为  $\{O_1\}$  相对于  $\{O_0\}$  的四阶姿态矩阵,  $\boldsymbol{\varphi}^+$ 、 $\boldsymbol{\varphi}^-$  分别为前置四元数矩阵和后置四元数矩阵,  $\boldsymbol{\varphi}^+ = \begin{pmatrix} \varphi_0 \mathbf{E}_3 - \hat{\boldsymbol{\psi}} & \boldsymbol{\psi} \\ -\boldsymbol{\psi}^T & \varphi_0 \end{pmatrix}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^- = \begin{pmatrix} \varphi_0 \mathbf{E}_3 - \hat{\boldsymbol{\psi}} & \boldsymbol{\psi} \\ -\boldsymbol{\psi}^T & \varphi_0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{E}_3$  为三阶单位矩阵。

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_0)^T = (\boldsymbol{\psi}^T \quad \varphi_0)^T \quad (12)$$

式中,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  分别对应四元数的三个虚部元素,  $\varphi_0$  为四元数的实部元素, 且四个元素之间满足关系

$$u = \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} - 1 = 0 \quad (13)$$

为便于四元数及四阶矩阵的数学运算, 定义并证明一个关于四维向量的叉乘运算规则。即: 对于任意两个矢量  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$  和  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ , 存在

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\alpha}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

证明: 式(14)等号左侧可以展开成

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} + 0) \times (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} + 0) = \\ & \alpha_1 \mathbf{i} \times (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} + 0) + \alpha_2 \mathbf{j} \times (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} + 0) + \\ & \alpha_3 \mathbf{k} \times (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} + 0) + 0 \times (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} + 0) = \\ & (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{i} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \mathbf{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{k} + 0 = \\ & ((\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2), (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3), (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1), 0)^T \end{aligned}$$

式(14)等号右侧可以展开成

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

对比可知, 式(14)等号左侧等于右侧, 证毕。

### 3.2 完整的反向动力学方程

根据角速度加法公式,  $\{O_2\}$  的绝对角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}_{02}$  可以表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{02} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中,  $\boldsymbol{\omega}_{01}$  为  $\{O_1\}$  相对于  $\{O_0\}$  的角速度矢量

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} = 2(\boldsymbol{\varphi}^-)^T \dot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (16)$$

根据矢量合成定理, 三个坐标系原点之间的位置矢量满足

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{02} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

将式(17)两边同时对时间求一阶导数, 得到  $\{O_2\}$  的绝对线速度

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{02} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} \times {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

计算系统的动能函数

$$T = \frac{1}{2} m (\mathbf{v}_{02}^T \mathbf{v}_{02}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{02}^T \mathbf{I}^{(O_0)} \boldsymbol{\omega}_{02} \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{I}^{(O_0)}$  为在  $\{O_0\}$  中表示的质量块的惯性张量。

为便于建模, 将描述  $\{O_1\}$  相对于  $\{O_0\}$  位姿的七个参量全部选定为系统的广义坐标, 记作  $s_i$ , 即  $s_1 = (r_{01})_x$ 、 $s_2 = (r_{01})_y$ 、 $s_3 = (r_{01})_z$ 、 $s_4 = \varphi_1$ 、 $s_5 = \varphi_2$ 、 $s_6 = \varphi_3$ 、 $s_7 = \varphi_0$ 。显然, 这七个广义坐标是不完全独立的, 故拉格朗日方程不适用于本系统的动力学建模。鉴于此, 运用 Routh 方程建立系统的运动微分方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_i} = \tau_i + \mu \frac{\partial u}{\partial s_i} \quad i = 1 \sim 7 \quad (20)$$

式中,  $t$  为时间,  $\mu$  为 Lagrange 待定乘子,  $\dot{s}_i$  为广义速度,  $\tau_i$  为广义力。根据定义, 构型 A 的广义力为

$$\begin{aligned} \tau_i^A = & \sum_{j=1}^6 \left( {}^0\mathbf{R} \sum_{k=2}^{2j} \left( f_k \begin{pmatrix} \mathbf{e}_k \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_j \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) + \\ & m g (1, 0, 0, 0)^T \cdot \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{e}_k$  为支链  $k$  的单位方向矢量, 可以用支链长度解析表示;  $g$  为重力加速度值。

系统的 Hamilton 函数  $H$ 、动能函数  $T$  以及广义动量  $p_i$ 、广义速度之间满足关系式

$$H = \sum_{i=1}^7 p_i \dot{s}_i - T \quad (22)$$

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_i} = - \frac{\partial H}{\partial s_i} \quad (24)$$

将式(23)、(24)代入式(20), 整理可得

$$\dot{p}_i = \tau_i + \mu \frac{\partial u}{\partial s_i} - \frac{\partial H}{\partial s_i} \quad i = 1 \sim 7 \quad (25)$$

令  $\mathbf{p}_I = (p_1, p_2, p_3, 0)^T$ ,  $\mathbf{p}_{II} = (p_4, p_5, p_6, p_7)^T$ , 根据运算规则式(14), 并结合式(15)、(18)、(19)、(23), 可得

$$\mathbf{p}_I = m \left( \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} \times {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (26)$$

$$\mathbf{p}_{II} = \boldsymbol{\varphi}^- \left( 2m \left( {}^0\mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + {}^0\mathbf{R} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) +$$

$$(4mn^2/3)\left(\left(\begin{matrix}\omega_{01} \\ 0\end{matrix}\right)+{}^0R\left(\begin{matrix}\omega_{12} \\ 0\end{matrix}\right)\right) \quad (27)$$

由式(14)、(26)、(27)反解广义速度, 可得

$$\begin{aligned} (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3, 0)^T &= \frac{3}{4mn^2} {}^0R\left(\begin{matrix}r_{12} \\ 0\end{matrix}\right) \times (\varphi^-)^T p_{11} + \frac{1}{m} p_1 - \\ &{}^0R\left(\left(\begin{matrix}r_{12} \\ 0\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\omega_{12} \\ 0\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}v_{12} \\ 0\end{matrix}\right)\right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} (\dot{s}_4, \dot{s}_5, \dot{s}_6, \dot{s}_7)^T &= \frac{3p_{11}}{8mn^2} - \frac{3\varphi^-}{4mn^2} \left({}^0R\left(\begin{matrix}r_{12} \\ 0\end{matrix}\right) \times p_1\right) - \\ &\frac{\varphi^+}{2} \left(\begin{matrix}\omega_{12} \\ 0\end{matrix}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

将式(28)、(29)代入式(22), 结合式(14), 可得  $H$  的解析表达式

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_1^T p_1}{2m} - p_1^T {}^0R\left(\left(\begin{matrix}r_{12} \\ 0\end{matrix}\right) \times \left(\begin{matrix}\omega_{12} \\ 0\end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix}v_{12} \\ 0\end{matrix}\right)\right) - \frac{3(\varphi^-)^T p_{11}}{4mn^2} \cdot \\ &\left({}^0R\left(\begin{matrix}r_{12} \\ 0\end{matrix}\right) \times p_1\right) - \frac{p_{11} \cdot \left(\varphi^+ \left(\begin{matrix}\omega_{12} \\ 0\end{matrix}\right)\right)}{2} + \frac{3p_{11}^T \varphi^- (\varphi^-)^T p_{11}}{16mn^2} \end{aligned} \quad (30)$$

将式(30)和(13)分别对广义坐标求偏导, 结果再代入式(25), 整理可得

$$\dot{p}_j = S_j(\varphi, p_{11}, t) + 2s_j \mu \quad j = 4 \sim 7 \quad (31)$$

式中,  $S_j(\varphi, p_{11}, t)$  为关于哈密顿变量的函数。

式(25)、(28)、(29)和(13)共同构成了系统的完整的反向动力学方程。

### 3.3 简化的反向动力学方程

如果反向动力学方程中可以不考虑  $\{O_2\}$  相对于  $\{O_1\}$  的运动, 那么方程中的未知量个数会大大减少, 这将有利于提高方程的解算效率。然而, 由于忽略了相对运动项, 反向动力学方程中不可避免地引入了误差项, 这可能又会降低方程的解算精度。因此, 为最优化六维加速度传感器的综合解算性能, 有必要分析出反向动力学方程的可简化条件及简化效果。经检索, 目前尚未有文献针对多维力、加速度传感器的该类问题展开过研究。

由于本文的两个研究对象均具有解析形式的运动学正解, 这为上述问题的解决提供了有利条件。从完整的反向动力学方程可以看出, 在相空间内, 所有的相对运动项都能够解析表达。因此, 只要将它们直接设为零, 就能够精确地给出简化后的反向动力学方程。在后面的章节中, 再详细讨论这种处理所带来的影响。忽略相对运动项后,  $\{O_2\}$  的绝对

速度以及系统的广义力、广义动量、广义速度和哈密顿函数可分别近似表示为

$$\omega_{02} \approx \omega_{01} \quad v_{02} \approx \dot{r}_{01} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \tau_i^A &\approx \sum_{j=1}^6 \left( {}^0R \sum_{k=2j-1}^{2j} \left( f_k \left( \begin{matrix} e_k \\ 0 \end{matrix} \right) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \left( \begin{matrix} r_{01} \\ 0 \end{matrix} \right) + {}^0R \left( \begin{matrix} B_j \\ 0 \end{matrix} \right) \right) \right) + \\ &mg(1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \cdot \frac{\partial}{\partial s_i} \left( \begin{matrix} r_{01} \\ 0 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

$$p^T \approx m \left( \dot{r}_{01}^T \quad \frac{4n^2}{3} \left( \varphi^- \left( \begin{matrix} \omega_{01} \\ 0 \end{matrix} \right) \right)^T \right) \quad (34)$$

$$s^T \approx \frac{1}{m} \left( p_1, p_2, p_3, \frac{3}{8n^2} p_{11}^T \right) \quad (35)$$

$$H \approx \frac{1}{2m} p_1^T p_1 + \frac{3}{16mn^2} p_{11}^T \varphi^- (\varphi^-)^T p_{11} \quad (36)$$

式中,  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)^T$ ,  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7)^T$ 。

这样, 式(25)、(35)和(13)就共同构成了简化之后的反向动力学方程。

### 3.4 反向动力学方程的求解

以完整的反向动力学方程为例, 给出其求解过程和递推公式。根据改进的 Euler 公式, 求解式(25)、(28)、(29)和(13)组成的方程组, 可得第  $N+1$  个采样节点处的哈密顿变量

$$\begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix}^{(N+1)} = \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix}^{(N)} + \frac{h}{2} \left( \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{p} \end{pmatrix}^{(N)} + \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{p} \end{pmatrix}^{(N+1)} \right) \quad (37)$$

式中,  $N$  为采样节点数,  $h$  为采样步长,  $(\bar{\cdot})$  为运用显式 Euler 公式计算得到的预测值。其中, 初始时刻的哈密顿变量通过初始对准技术<sup>[3, 18]</sup>获得。

由于计算过程中存在截断误差和舍入误差, 式(37)中四元数求解结果可能不再满足式(13)所示约束关系, 故需要进行违约修正

$$\varphi'_i = \varphi_i / \sqrt{\varphi^T \varphi} \quad i = 0 \sim 3 \quad (38)$$

式中,  $\varphi'_i$  表示修正后的四元数的第  $i$  个元素。

根据式(37), 可得

$$p_j^{(N+1)} = p_j^{(N)} + \frac{h}{2} \left( \dot{p}_j^{(N)} + \dot{p}_j^{(N+1)} \right) \quad j = 4 \sim 7 \quad (39)$$

将式(39)等号两边分别乘以对应的广义坐标并求和

$$\sum_{j=4}^7 s_j^{(N+1)} p_j^{(N+1)} = \sum_{j=4}^7 s_j^{(N+1)} \left( p_j^{(N)} + \frac{h}{2} \left( \dot{p}_j^{(N)} + \dot{p}_j^{(N+1)} \right) \right) \quad (40)$$



根据广义坐标与广义动量的正交关系<sup>[20]</sup>, 将式(31)代入(40)可得

$$\sum_{j=4}^7 s_j^{(N+1)} \left( p_j^{(N)} + \frac{h}{2} (\dot{p}_j^{(N)} + \bar{s}_j^{(N+1)} + 2\bar{s}_j^{(N+1)} \mu^{(N+1)}) \right) = 0 \quad (41)$$

进一步整理式(41), 可解析求解出  $N+1$  时刻的 Lagrange 待定乘子

$$\mu^{(N+1)} = - \frac{\sum_{j=4}^7 s_j^{(N+1)} \left( p_j^{(N)} + \frac{h}{2} (\dot{p}_j^{(N)} + \bar{s}_j^{(N+1)}) \right)}{h \sum_{j=4}^7 s_j^{(N+1)} \bar{s}_j^{(N+1)}} \quad (42)$$

接着, 通过式(37)更新  $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{p}$  及其导数, 然后运用式(38)修正四元数, 再通过式(35)更新广义速度。最后, 对前三个广义速度进行数值微分运算, 得到待测的三维线加速度; 将后四个广义坐标及广义速度代入式(16)得到角速度, 数值微分运算后得到待测的三维角加速度。为便于理解, 绘制了关于反向动力学方程求解的算法流程, 如图 5 所示。

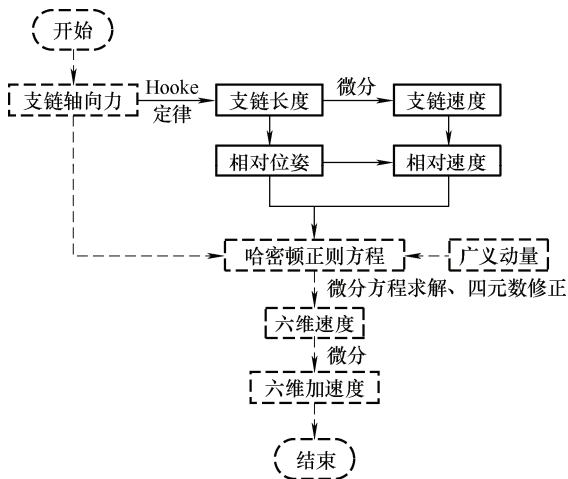


图 5 反向动力学方程的算法流程

注: 图中的全部内容代表完整的反向动力学方程的求解算法, 而虚线内容代表简化之后的反向动力学方程的求解算法。

(1) 对于其他构型(包括弱耦合度和强耦合度构型)的并联式六维加速度传感器而言, 上述完整的、简化的反向动力学方程以及它们的求解算法都完全适用, 即本文构建的反向动力学模型具备普适性。

(2) 在求解完整的和简化的反向动力学方程时, 分别要进行 2 次和 1 次数值微分运算。该环节一定程度上会放大测量噪声。针对该问题, 本文第 6 节中构造了方程的修正算法。

### 3.5 算例验证

作为数值算例, 质量块的质量、边长, 支链的初始长度、刚度分别设置为 0.5 kg、42 mm、24 mm 和  $2.07 \times 10^5$  N/mm。根据文献[5]中构建的频带模型, 可计算出该组参数下六维加速度传感器的最大工作频率为 202 Hz。任意给定一组周期性基础激励, 其中, 线加速度和角加速度的频率均为 10 Hz, 幅值分别为  $7.90 \times 10^4$  mm/s<sup>2</sup> 和  $1.18 \times 10^5$  rad/s<sup>2</sup>。将基础激励代入文献[18]的正向动力学方程中, 计算支链的轴向力, 再将得到的轴向力代入图 5 所示的算法。

易证明, 在周期性基础激励下, 六维加速度传感器的相轨迹应该严格封闭。以后四个广义坐标和广义动量为例, 在相空间内分别绘制两种构型的相轨迹, 如图 6 所示。它们均封闭得较好, 这表明, 本文构建的反向动力学模型是正确的。另外, 结果还表明, 当采样频率不高于 20 kHz 时, 解算/采样时间比小于 1。这表明, 上述求解算法满足实时性要求。

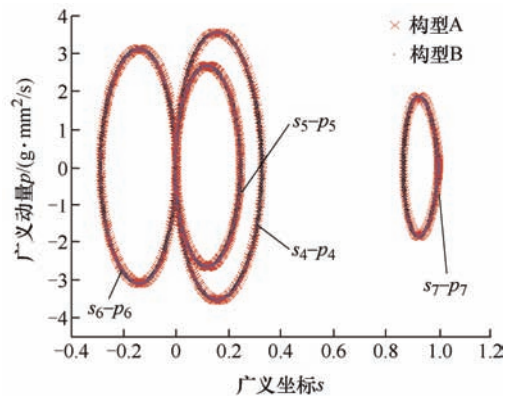


图 6 并联式六维加速度传感器的相轨迹

## 4 方程解算精度的影响因素分析

用综合相对误差来定量评估反向动力学方程的解算精度, 其定义式为

$$\delta = \frac{1}{6N_a} \sum_{w=1}^6 \left( \frac{\sum_{N=1}^{N_a} |a_w^{(N)} - \tilde{a}_w^{(N)}|}{\max_{(N=1 \sim N_a)} (\tilde{a}_w^{(N)}) - \min_{(N=1 \sim N_a)} (\tilde{a}_w^{(N)})} \right) \times 100\% \quad (43)$$

式中,  $N_a$  为采样节点的个数,  $w$  为加速度类型序号(1:  $x$  向线加速度, 2:  $y$  向线加速度, 3:  $z$  向线加速度, 4:  $x$  向角加速度, 5:  $y$  向角加速度,

6:  $z$  向角加速度),  $a$ 、 $\tilde{a}$  分别为加速度的计算值及理论值,  $\max$ 、 $\min$  分别为理论值中的最大、最小值。

运用数值误差理论分析反向动力学方程的数值递推求解算法后发现, 当支链轴向力给定时, 方程的解算精度与测量信号频率、采样频率比(即: 采样频率与测量信号频率之比)和采样时间有关。结合传感器的最大工作频率, 给定这三个影响因素的变化范围及标准值, 如表 1 所示。将完整的、简化的反向动力学方程的综合相对误差分别记为  $\delta_{in}$  和  $\delta_{out}$ , 依次研究三个因素对两个构型的两类误差的影响规律。

表 1 影响因素的变化范围及标准值

	变化范围	测量信号 频率 $f_m/\text{Hz}$	采样 频率比 $\lambda$	采样 时间 $t/\text{s}$
测量信号频率 $f_m/\text{Hz}$	5~200	—	500	3
采样频率比 $\lambda$	100~600	50	—	3
采样时间 $t/\text{s}$	1~60	20	200	—

具体地, 根据控制变量法, 首先, 将采样频率比和采样时间均设定为标准值, 改变测量信号频率, 得到的影响曲线如图 7 所示。经观察: ① 综合相对误差随着测量信号频率的增加而增加; ② 当测量信号频率低于 60 Hz 时, 两类反向动力学的综合相对误差基本相同; ③ 当构型 A 和 B 所对应的测量信号频率分别大于 60 Hz 和 100 Hz 时, 完整反向动力学的综合相对误差反而会大于简化时的误差。

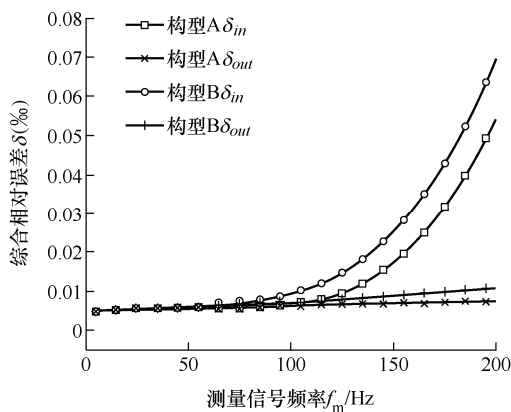


图 7 测量信号频率对方程解算精度的影响

接着, 将测量信号频率和采样时间控制为标准值, 改变采样频率比, 得到如图 8 所示的影响曲线。经观察: ① 同构型的两条曲线基本重合; ② 随着采样频率比的增加, 两种构型的综合相对误差均逐渐减小并趋向平行于横坐标轴。

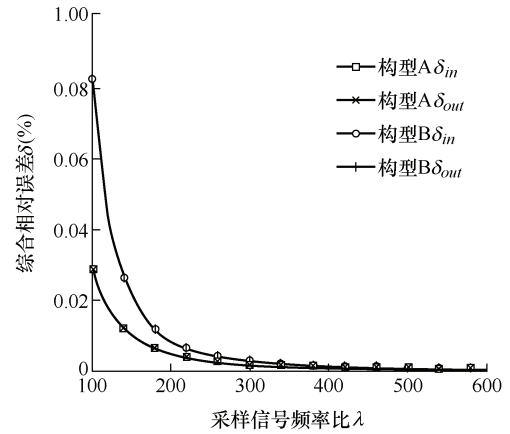


图 8 采样频率比对方程解算精度的影响

最后, 将测量信号频率和采样频率比控制为标准值, 改变采样时间, 得到的影响曲线如图 9 所示。经观察: ① 同构型的两条曲线基本重合; ② 随着采样时间的增加, 两种构型的综合相对误差均逐渐增大, 当采样时间为 1 min 时, 构型 A、B 对应的综合相对误差分别为 0.012% 和 0.065%。关于误差累积的问题, 第 6.1 节给出了一种补偿算法。

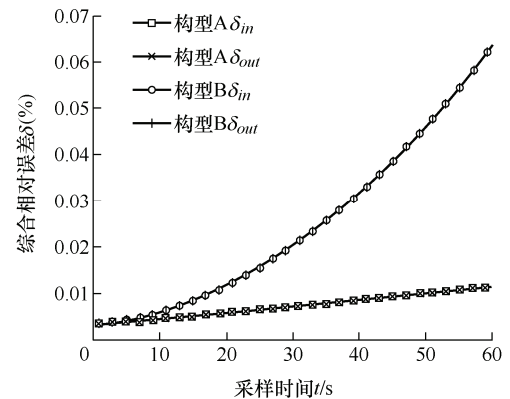


图 9 采样时间对方程解算精度的影响

综合图 7~9, 还能够总结出两个重要结论: ① 不计入质量块相对于基座的运动参数时, 反向动力学方程的计算精度更高; ② 构型 A 的反向动力学方程的解算精度一直高于构型 B 的精度。

一方面, 在动力学方程中计入质量块相对于基座的运动速度后, 理论上会提高方程的原理精度; 另一方面, 式(9)、(10)表明, 为得到上述相对运动参量, 还需要对支链轴向力的实时测量数据进行数值微分运算, 该过程中引入的截断误差和舍入误差超过了相对运动参量对反向动力学方程原理精度的贡献。因此, 简化反向动力学方程的解算精度反而略高于完整时的算法精度, 这就解释了上述结论①。另外, 通过算例计算我们还发现, 简化反向动力学方程的计算效率约是完整方程的

3 倍, 因此, 为保证解算的实时性, 信号的采样频率可以达到 60 kHz。

关于上述结论②, 我们将在接下来的第 5 节中从两种构型的刚度特性入手, 在机理上对此进行解释, 旨在给出关于六维加速度传感器拓扑构型优化或综合的指导性建议。

## 5 构型对解算精度的影响机理分析

基于刚体运动的速度基点法, 构型 A 中六个复合球铰链的速度可以解析表示为

$$\dot{\mathbf{B}}_j = \mathbf{v}_{12} + \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\mathbf{B}_j - \mathbf{r}_{12}) \quad j=1,2,\dots,6 \quad (44)$$

式(44)等号两端同时点乘支链的方向向量, 再结合初始位姿下的式(2)~(4), 结果整理成矩阵形式

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{J}_A \dot{\mathbf{X}} \quad (45)$$

式中,  $\dot{\mathbf{i}} = (\dot{i}_1, \dot{i}_2, \dot{i}_3, \dot{i}_4, \dot{i}_5, \dot{i}_6, \dot{i}_7, \dot{i}_8, \dot{i}_9, \dot{i}_{10}, \dot{i}_{11}, \dot{i}_{12})^T$ ,  $\dot{\mathbf{X}} =$

$(\mathbf{v}_{12}^T \quad \boldsymbol{\omega}_{12}^T)^T$ ,  $\mathbf{J}_A$  为速度雅可比矩阵

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{12} \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{r}_{12}) \times \mathbf{e}_1 & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{r}_{12}) \times \mathbf{e}_2 & \dots & (\mathbf{B}_6 - \mathbf{r}_{12}) \times \mathbf{e}_{12} \end{pmatrix}^T \quad (46)$$

根据一阶等时变分原理, 由式(45)可得虚位移方程和虚速度方程, 分别为

$$\delta \mathbf{l} = \mathbf{J}_A \delta \mathbf{X} \quad (47)$$

$$\delta \dot{\mathbf{i}} = \mathbf{J}_A \delta \dot{\mathbf{X}} \quad (48)$$

根据第 4 节的结论①, 质量块与基座的运动可近似视为相等。因此, 可将质量块的惯性和惯性力矩(分别记为  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{M}$ )等效为系统的外负载。根据虚功率原理

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{v}_{12} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_{12} = \sum_{i=1}^{12} f_i \mathbf{e}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{B}}_j \quad (49)$$

式中, 当  $i=1, 2$  时,  $j$  取 1; 当  $i=3, 4$  时,  $j$  取 2; 当  $i=5, 6$  时,  $j$  取 3; 当  $i=7, 8$  时,  $j$  取 4; 当  $i=9, 10$  时,  $j$  取 5; 当  $i=11, 12$  时,  $j$  取 6。

将式(45)代入式(49)并整理成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix}^T \delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \delta \dot{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \delta \dot{\mathbf{B}}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{12} \cdot \delta \dot{\mathbf{B}}_6 \end{pmatrix} = \mathbf{f}^T \begin{pmatrix} \delta(\mathbf{e}_1 \cdot \dot{\mathbf{B}}_1) \\ \delta(\mathbf{e}_2 \cdot \dot{\mathbf{B}}_1) \\ \vdots \\ \delta(\mathbf{e}_{12} \cdot \dot{\mathbf{B}}_6) \end{pmatrix} = \mathbf{f}^T \delta \dot{\mathbf{i}} \quad (50)$$

式中,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12})^T$ 。

将式(48)代入式(50), 可得

$$\left( \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} - \mathbf{J}_A^T \mathbf{f} \right)^T \delta \dot{\mathbf{X}} = 0 \quad (51)$$

式(51)对于任意虚速度均成立, 因此, 质量块的广义惯性力和支链轴向力之间存在映射关系

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \mathbf{J}_A^T \mathbf{f} \quad (52)$$

为便于分析, 假设各支链的刚度相同(用  $k$  表示), 根据 Hooke 定律

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_{IA} \delta \mathbf{l} \quad (53)$$

式中,  $\mathbf{K}_{IA} = \text{diag}(k, k, k, k, k, k, k, k, k, k, k, k)$ 。

综合式(47)、(52)及(53), 整理可得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \mathbf{K}_A \delta \mathbf{X} \quad (54)$$

式中,  $\mathbf{K}_A$  即为构型 A 的刚度矩阵。

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{J}_A^T \mathbf{K}_{IA} \mathbf{J}_A = \text{diag}(4k, 4k, 4k, 4n^2k, 4n^2k, 4n^2k) \quad (55)$$

将刚度矩阵中的各元素展开后发现, 元素的量纲不统一, 其中, 左上三角、右下三角的  $3 \times 3$  分块矩阵的量纲分别为 N/mm 和 N•mm, 这将不利于构型特性的定量分析。经分析, 雅可比矩阵元素量纲的不统一造成了刚度矩阵元素量纲的不统一。参考 Jorge Angeles 的特征长度法<sup>[22-23]</sup>, 将  $\mathbf{J}_A$  前三列和后三列分别记为  $\mathbf{J}_1$  和  $\mathbf{J}_2$ , 并将  $\mathbf{J}_2$  中的各元素除以特征长度  $l_{JA}$ , 即

$$\mathbf{J}'_A = (\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2) \text{diag}(1, 1, 1, 1/l_{JA}, 1/l_{JA}, 1/l_{JA}) \quad (56)$$

式中,  $l_{JA} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{J}_2^T \mathbf{J}_2) / \text{tr}(\mathbf{J}_1^T \mathbf{J}_1)} = n$ 。

由式(55)、(56), 统一量纲后的刚度矩阵  $\mathbf{K}'_A$  为

$$\mathbf{K}'_A = \mathbf{J}'_A^T \mathbf{K}_{IA} \mathbf{J}'_A = \text{diag}(4k, 4k, 4k, 4k, 4k, 4k) \quad (57)$$

同理, 构型 B 的统一量纲后的刚度矩阵  $\mathbf{K}'_B$  为

$$\mathbf{K}'_B = \begin{pmatrix} 3k & 0 & 0 & 0 & -k' & k' \\ 0 & 3k & 0 & k' & 0 & -k' \\ 0 & 0 & 3k & -k' & k' & 0 \\ 0 & k' & -k' & 3k & 0 & 0 \\ -k' & 0 & k' & 0 & 3k & 0 \\ k' & -k' & 0 & 0 & 0 & 3k \end{pmatrix} \quad (58)$$

式中,  $k' = \sqrt{6}k/2$ 。

机构的刚度大小可以用刚度矩阵的最小特征值来度量<sup>[24]</sup>。经计算, 矩阵  $\mathbf{K}'_A$  的最小特征值  $4k$  恒大于  $\mathbf{K}'_B$  的最小特征值  $(3 - 3\sqrt{2}/2)k$ 。这表明, 构型 A 的刚度优于构型 B 的。结合刚度的物理定义可知, 在同样大小的基础激励下, 构型 A 中质量块相对于基座的微位移、微速度小于构型 B 中的对应参量。

在完整的反向动力学方程中, 根据数值分析理论可知, 若上述理论微位移、微速度量越大, 则相对速度的真实值和数值微分之间的偏差就越大, 即对应模型的原理性误差就越大, 故构型 A 的解算精度高于构型 B 的。在简化的反向动力学方程中, 上述理论微位移、微速度量越大, 则因忽略相对位移、相对速度而引起的方程原理性误差就越大, 故构型 A 的解算精度也高于构型 B 的。这就解释了第 4 节的结论②。

由此可见, 在综合该类系统的弹性体拓扑构型时, 如果以待测加速度的解算精度为指标, 则应该考虑构型统一量纲后的刚度矩阵的最小特征值。该最小特征值与支链的数量以及支链组的布置方位有关。限于篇幅, 该问题将另文研究。

## 6 方程中含扰动时的修正算法

六维加速度传感器在实际测量时, 由于噪声等原因, 轴向力中可能存在小扰动; 另外, 在短时间内的累积误差也可以折算为一种小扰动。更严重的是, 数字滤波不彻底会引起信号失真、偏置电压会引起信号偏置、电源干扰会引起冲击故障、线路断裂会引起断路故障等, 这些因素会导致支链轴向力中存在大扰动(也称为故障)。无论出现上述哪种扰动, 都会影响反向动力学方程的求解效果, 甚至会导致测量系统完全瘫痪。本节针对这两类常见情况, 基于简化的动力学方程分别构建了一种误差补偿算法和一种故障修复算法, 旨在提高反向动力学模型的可靠性。

### 6.1 含小扰动时的误差补偿算法

反向动力学方程中最先被求解的未知量为四元数, 故本文从四元数入手解决小扰动问题。由基础激励的定义可知, 六维加速度传感器的基座在运动过程中往往会多次经过零姿态点(即转动方向交替点), 对应于四元数

$$\varphi = (0, 0, 0, 1)^T \quad (59)$$

然而, 当系统中存在小扰动时, 即使在理论的转动方向交替点, 实际计算值也不满足式(59)。如果能够监测到该点, 就可以将该点处的四元数值修正为式(59)的结果, 这也正是本文误差补偿算法的基本思想。首先, 定义第  $N$  个采样节点处的状态观测测量

$$Z_{\varphi}^{(N)} = \sum_{i=1}^3 \left( \varphi_i^{(N)} \right)^2 + \left( \varphi_0^{(N)} - 1 \right)^2 \quad (60)$$

显然, 在转动方向交替点处, 上述状态观测测量理论上为最小值。为了避免可能将非最小值的极小值点误判成方向交替点, 根据式(11)、(60)计算第 1 个采样节点处的观测测量, 并将其用作为观测阈值,

$$Z_{\varphi}^{(1)} \approx \left( h^2/4 \right) \left\| \varepsilon^{(1)} \right\|_2^2 \quad (61)$$

式中,  $\varepsilon^{(1)}$  表示计算得到的第 1 个采样节点处的角加速度矢量。

接着, 给出转动方向交替点的判定依据, 即:  $Z_{\varphi}^{(N+1)}$  同时小于  $Z_{\varphi}^{(N)}$ 、 $Z_{\varphi}^{(N+2)}$  以及阈值  $Z_{\varphi}^{(1)}$ 。六维加速度传感器工作过程中, 实时计算相邻三个采样节点处的状态观测测量。当其满足上述判据时, 则判定对应点为转动方向交替点。如果该点的四元数不满足式(59), 则对其修正。算法流程如图 10 所示。

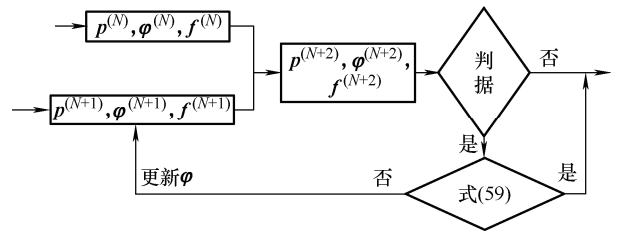


图 10 误差补偿算法的流程图

作为一组算例, 在构型 A 的 1、2、3、5 支链的输出信号中添加 -1%~1% 的随机扰动, 误差自补偿前、后的相轨迹分别如图 11 所示。数据显示, 自补偿前、后的综合相对误差分别为 3.063% 和 0.139%。这表明, 上述误差补偿算法是有效、可行的。

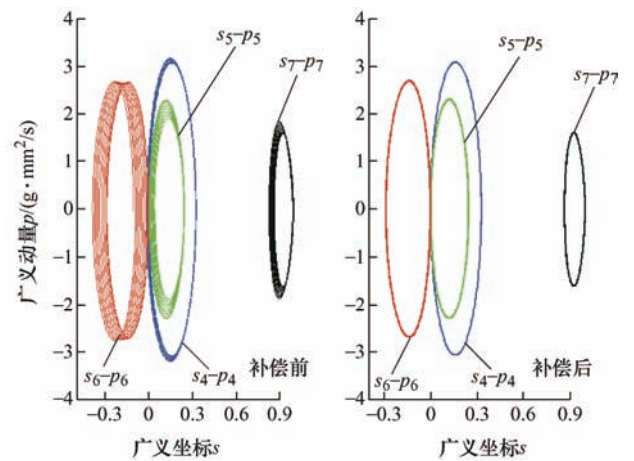


图 11 误差补偿前、后的相轨迹对比

### 6.2 含大扰动时的故障修复算法

由于质量块被视为刚体, 传感器工作时, 质量块上各点之间的距离应为恒定值。对于构型 A



$$\begin{cases} |B_i - r_{12}| = \sqrt{2}n & i=1,2,3 \\ |B_1 - B_2| = |B_1 - B_3| = \sqrt{2}n, & |B_2 - B_3| = \sqrt{6}n \end{cases} \quad (62)$$

将式(2)、(3)代入式(62), 整理后可得支链的长度协调方程

$$\begin{cases} l_1 - l_3 - l_7 + l_9 = 0, & l_4 + l_6 - l_{10} - l_{12} = 0 \\ l_2 - l_5 - l_8 + l_{11} = 0, & l_5 + l_6 + l_{11} + l_{12} = 4L \\ l_1 + l_2 + l_7 + l_8 = 4L, & l_3 + l_4 + l_9 + l_{10} = 4L \end{cases} \quad (63)$$

基于 Hooke 定律, 长度协调方程式(63)可换算成力协调方程

$$\begin{cases} f_1 - f_3 - f_7 + f_9 = Q_1 & (A1) \\ f_4 + f_6 - f_{10} - f_{12} = Q_2 & (A2) \\ f_2 - f_5 - f_8 + f_{11} = Q_3 & (A3) \\ f_5 + f_6 + f_{11} + f_{12} = Q_4 & (A4) \\ f_1 + f_2 + f_7 + f_8 = Q_5 & (A5) \\ f_3 + f_4 + f_9 + f_{10} = Q_6 & (A6) \end{cases} \quad (64)$$

式中,  $Q_i$  与各支链的预紧力和刚度值有关<sup>[18]</sup>。

式(64)满足正六边形协调闭链关系, 如图 12a 所示。同理, 构型 B 的力协调方程满足正三角形协调闭链关系, 如图 12b 所示。其中, 正多边形的每个顶点分别对应于一个力协调方程; 相邻两个顶点对应的力协调方程中含有两个或一个共同的支链力, 分别列于两顶点之间的边上。进一步分析后发现, 通过简单的加、减法运算, 可以从力协调方程中消去某些边上的部分或全部的支链轴向力。这也正是本节故障修复算法的基本思想。

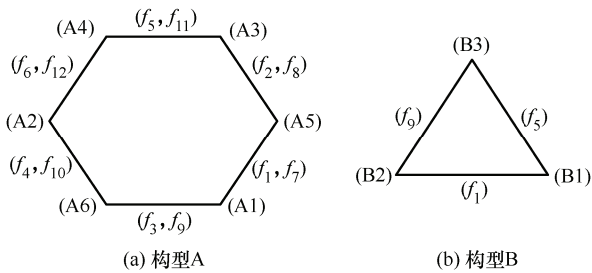


图 12 正多边形结构的协调闭链

具体地, 当六维加速度传感器的若干条支链出现故障(构型 A、B 的故障支链数分别小于 7 和 4)时, 则至少有 2 个力协调方程不成立。首先, 如果消去若干支链力后, 力协调方程由不成立变为成立, 则消去的支链可被诊断为故障支链。接着, 依次求解故障支链所在的力协调方程, 进而修正故障支链力。算法流程如图 13 所示。

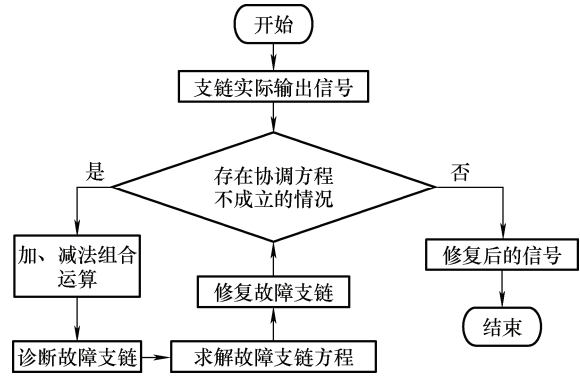


图 13 故障诊断、修复算法的流程图

为更加直观地阐释上述算法, 现列举一例说明, 假设支链 1 发生断路故障(0 N), 支链 2 发生偏置故障(偏置+2 N), 支链 3 和支链 5 发生随机扰动故障(扰动幅值为 1 N)。经计算, 此时的故障力协调方程为 (A1)、(A3)、(A4)、(A5)、(A6)。基于图 12a 的协调闭链, 将上述方程进行加、减法组合计算, 即 (A1)+(A6)-(A5)+(A3)+(A4)。结果显示, 组合计算后, 该组合方程成立, 这表明, 消去的支链 1, 2, 3, 5 为故障支链。进一步地, 求解故障支链所在的力协调方程

$$\begin{cases} \tilde{f}_3 = Q_6 - f_4 - f_9 - f_{10}, & \tilde{f}_1 = Q_1 + \tilde{f}_3 + f_7 - f_9 \\ \tilde{f}_2 = Q_5 - \tilde{f}_1 - f_7 - f_8, & \tilde{f}_5 = -Q_3 + \tilde{f}_2 - f_8 + f_{11} \end{cases} \quad (65)$$

式中,  $\tilde{f}_i$  为修复后的故障支链力。

将修复前、后的轴向力分别代入反向动力学方程中, 得到的相轨迹如图 14 所示。数据结果显示, 修复前、后的综合相对误差分别为 42.202% 和 0.181%。这表明, 上述故障修复算法是有效、可行的。

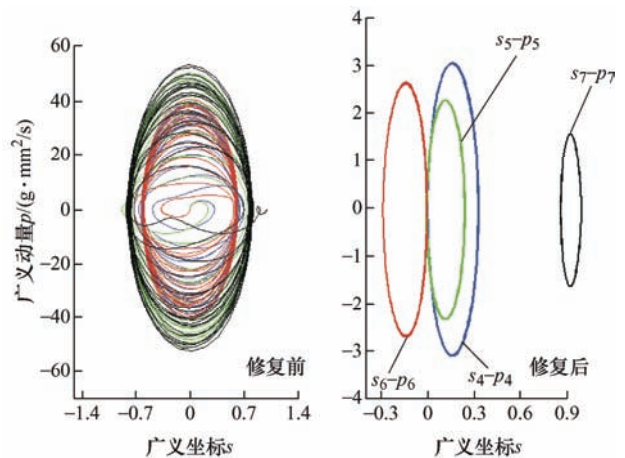


图 14 故障修复前、后的相轨迹对比

## 7 实物样机测试

为验证本文设计方案、数学模型及结论的有效性,加工制作了两种构型的六维加速度传感器的实物样机,如图 15 所示,主要结构参数如表 2 所示。

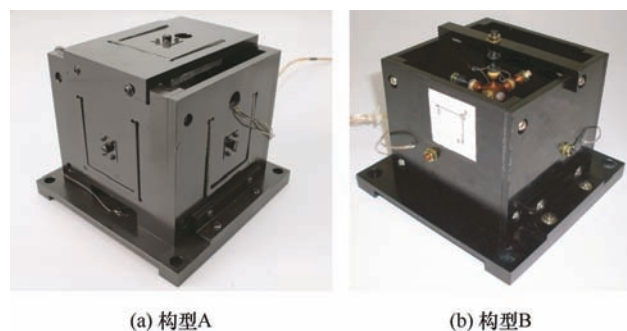


图 15 并联式六维加速度传感器的实物样机

表 2 实物样机的主要参数

物理量名称	构型 A	构型 B
质量块的质量 $m/\text{kg}$	1.45	0.19
质量块的半边长 $n/\text{mm}$	30	15
支链的初始长度 $L/\text{mm}$	37	33.5
支链的轴向刚度 $k/(\text{N}/\text{mm})$	$8.73 \times 10^5$	$5.24 \times 10^5$

搭建实物样机的试验平台,如图 16 所示,包括惯性测量单元(IMU)、直流电源、驱动器、运动控制器(PMAC)、电荷放大器、数据采集卡(DAQ 卡)、六维标定平台、倾角斜块以及课题组自行开发的虚拟仪器客户端。其中,六维标定平台由两个伺服电

机驱动的曲柄滑块机构组成<sup>[5]</sup>,倾角斜块用于调整传感器的安装姿态,以实现不同方向的基础激励。

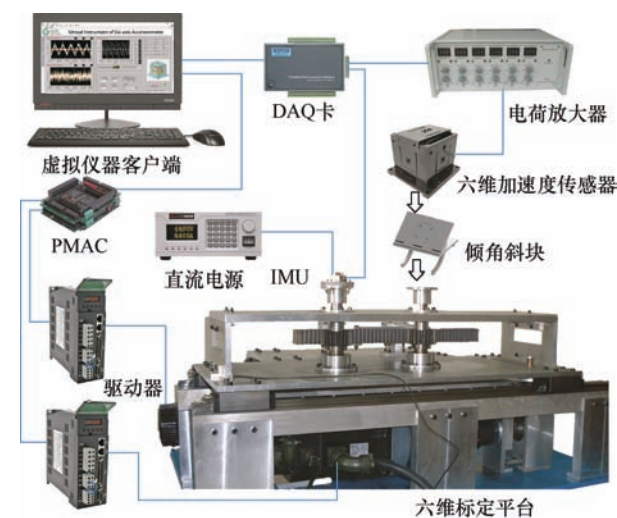


图 16 六维加速度传感器的试验平台

首先,在传感器及标定平台样机的工作量程范围内任选一组基础激励进行试验。将支链轴向力的采样数据进行预处理后,分别代入完整的和简化的反向动力学模型中,统计 1 min 内的综合相对误差和解算/采样时间比。然后,将误差补偿算法添加至反向动力学模型中,由上述采样数据重新计算六维加速度。接下来,人为地将 1 号支链的信号通道断开以模拟断路故障,重新开始一组新的试验,并将预处理后的支链轴向力数据分别代入一般的反向动力学模型和含故障修复算法的反向动力学模型中。以上试验的统计结果均列于表 3 中。

表 3 实物样机的试验结果

验证项	对比项	构型 A		构型 B	
		综合相对误差 $\delta(\%)$	解算/采样时间比	综合相对误差 $\delta(\%)$	解算/采样时间比
反向动力学方程	完整	5.562	0.084	6.486	0.062
	简化	5.562	0.026	6.485	0.019
误差补偿算法	补偿前	5.562	0.026	6.485	0.019
	补偿后	3.489	0.035	4.946	0.028
故障修复算法	修复前	49.864	0.021	59.986	0.019
	修复后	5.822	0.394	6.781	0.301

## 8 结论

(1) 通过将具有解析式运动学正解的并联机构设计成六维加速度传感器的弹性体结构,并引入四

元数矩阵和关于四阶向量的叉乘运算规则,能够在相空间内推导出完整的和简化的反向动力学方程。这为全面剖析该类系统反向动力学方程的数值性态提供了有利条件,所得结论也同样适用于其他构型(包括低耦合度和强耦合度构型)的并联式六维加速



度传感器。

(2) 运用改进的 Euler 公式并借助于广义坐标与广义动量之间的正交关系,能够推导出两类反向动力学方程中未知量的显式递推公式。对比结果显示,两种原理样机的简化方程的求解误差分别为 0.012% 和 0.065%,均小于完整方程的误差值;而且,简化方程的求解效率约是完整方程的 3 倍。这表明,该类系统的反向动力学方程中应不计入质量块与基座之间的相对运动参量。

(3) 反向动力学方程的解算精度与弹性体拓扑构型、测量信号的频率、采样频率比和采样时间有关,具体影响规律见图 7~9。另外,当采样频率不高于 60 kHz 时,解算效率满足实时性要求。

(4) 结合虚功率原理和特征长度法,能够求解出弹性体拓扑构型刚度矩阵的最小特征值。理论分析和算例结果均表明,该值越大,则对应的反向动力学方程的解算精度就越高,这为多维传感器的构型综合和优化提供了重要的理论依据。

(5) 通过观测并更新基座转动方向交替点的四元数值,能够有效补偿反向动力学方程中的小扰动,补偿后的误差为 0.139%。通过构造关于输入量的正多边形协调闭链,并借助于简单的加减法组合运算,能够有效修复反向动力学方程中的大扰动,修复后的误差为 0.181%。这两个扰动处理算法为提高该类系统反向动力学模型的可靠性提供了新思路。

(6) 实验室条件下,两台实物样机在 1 min 内的测量误差分别为 5.822% 和 6.781%,且满足实时性要求,其精度和效率均优于同类型其他六维加速度传感器的样机测试性能<sup>[15-16]</sup>。

## 参 考 文 献

- [1] 余龙焕,邱志成,张宪民. 基于加速度反馈的平面 3-RRR 柔性并联机器人自激振动控制[J]. 机械工程学报, 2019, 55(21): 40-50.  
YU Longhuan, QIU Zhicheng, ZHANG Xianmin. Self-excited vibration control of the planar 3-RRR flexible parallel manipulator based on acceleration feedback[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(21): 40-50.
- [2] NGUYEN V, JOHNSON J, MELKOTE S. Active vibration suppression in robotic milling using optimal control[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2020, 152: 103541.
- [3] HUANG Lei, LI Zhaochun, XIE Fei, et al. Strapdown sculling velocity algorithms using novel input combinations[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 2018(2): 1-9.
- [4] NWEKE H F, TEH Y W, MUJTABA G, et al. Data fusion and multiple classifier systems for human activity detection and health monitoring: review and open research directions[J]. Information Fusion, 2019, 46: 147-170.
- [5] YOU Jingjing, WANG Linkang, XI Fengfeng, et al. Decoupling algorithm and maximum operation frequency of a novel parallel type six-axis accelerometer[J]. IEEE Sensors Journal, 2020, 20(21): 12637-12651.
- [6] AMARASINGHE R, DAO D V, TORIYAMA T, et al. Development of miniaturized 6-axis accelerometer utilizing piezoresistive sensing elements[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2007, 134(2): 310-320.
- [7] SUN Zhibo, LIU Jinhao, YU Chunzhan, et al. A small range six-axis accelerometer designed with high sensitivity DCB elastic element[J]. Sensors, 2016, 16(9): 1552-1569.
- [8] 程向红,赵莹,田芸. 一种自适应  $H_\infty$  滤波的运动学约束惯性导航方法[J]. 中国惯性技术学报, 2019, 27(3): 295-300.  
CHENG Xianghong, ZHAO Ying, TIAN Yun. An adaptive  $H_\infty$  filtering approach for inertial navigation with motion constrained[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2019, 27(03): 295-300.
- [9] SHEN Xiaorong, ZHANG Hao, XU Yong, et al. Observation of alpha-stable noise in the laser gyroscope data[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(7): 1998-2003.
- [10] SCHULER A R, GRAMMATIKOS A, FEGLEY K A. Measuring rotational motion with linear accelerometers[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1967, AES-3(3): 465-472.
- [11] WANG Daihua, YUAN Gang. A six-degree-of-freedom acceleration sensing method based on six coplanar single-axis accelerometers[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2011, 60(4): 1433-1442.
- [12] ZOU Tian, NI Fenglei, GUO Chuangqiang, et al. A 6-DOF acceleration sensor with cylindrical configuration[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2016, 251: 167-178.
- [13] 王东江,杨新民. 一种无陀螺捷联惯导的九加速度计测姿方法[J]. 电子测量技术, 2017, 40(10): 70-74.  
WANG Dongjiang, YANG Xinmin. Nine-accelerometer attitude determination method for gyroscope free strap-down inertial navigation system[J]. Electronic Measurement Technology, 2017, 40(10): 70-74.
- [14] WU Qi, LI Kui, LIU Juncheng. The asynchronous gimbal-rotation-based calibration method for lever-arm errors of two rotational inertial navigation systems[J]. IEEE Access, 2019, 7: 4653-4663.
- [15] CHAPSKY V, PORTMAN V T, SANDLER B-Z.

- Single-mass 6-DOF isotropic accelerometer with segmented PSD sensors[J]. *Sensors & Actuators A*, 2007, 135(2): 558-569.
- [16] WAN Zhen, CUI Feng, ZHANG Yunkui, et al. Design of proof mass and system-level simulation of a micromachined electrostatically suspended accelerometer[C]//2011 International Conference on Advanced Design and Manufacturing Engineering, Guangzhou, China. 2011: 1631-1634.
- [17] SHEN Nanyan, GENG Liang, LI Jing, et al. Improved stiffness modeling for an exechon-like parallel kinematic machine (PKM) and its application[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 33(1): 40.
- [18] 尤晶晶, 李成刚, 吴洪涛, 等. 预紧式并联六维加速度传感器的解耦算法研究[J]. *仪器仪表学报*, 2017, 38(5): 1216-1225.
- YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao, et al. Research on the decoupling algorithm of pre-stressed parallel six-axis accelerometer[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2017, 38(5): 1216-1225.
- [19] 尤晶晶, 符周舟, 吴洪涛, 等. 12-6 台体型 Stewart 冗余并联机构正向运动学研究[J]. *农业机械学报*, 2017, 48(12): 395-402.
- YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward kinematics of general 12-6 Stewart redundant parallel mechanism[J]. *Transactions of the Chinese Society of Agricultural Machinery*, 2017, 48(12): 395-402.
- [20] 尤晶晶, 李成刚, 吴洪涛. 并联式六维加速度传感器的哈密顿动力学研究[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(15): 9-17.
- YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao. Research on Hamiltonian dynamics of parallel type six-axis accelerometer[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(15): 9-17.
- [21] 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构拓扑学理论的基本思想与数学方法——从方法论角度回顾几种原创性理论与方法[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(3): 1-15.
- YANG Tingli, SHEN Huiping, LIU Anxin, et al. Basic ideas and mathematical methods of mechanism topology theory --review of several original mechanism topology theories in a methodological perspective[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(3): 1-15.
- [22] ZANGANEH K E, ANGELES J. Kinematic isotropy and the optimum design of parallel manipulators[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1997, 16(2): 185-197.
- [23] CUI Guohua, ZHANG Haiqiang, XU Feng, et al. Kinematics dexterity analysis and optimization of 4-UPS-UPU parallel robot manipulator[C]//Intelligent Robotics and Applications. Cham: Springer International Publishing, 2014: 1-11.
- [24] EL-KHASAWNEH B S, FERREIRA P M. Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulators[J]. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 1999, 39(2): 321-342.

作者简介: 尤晶晶(通信作者), 男, 1985 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师, 加拿大 Ryerson University 访问学者。主要研究方向为机器人机构学、可重构并联机器人、六维加速度传感器。

E-mail: youjingjing251010@njfu.edu.cn

王林康, 男, 1995 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为六维加速度传感器、并联机器人机构学。

E-mail: wlk0710@njfu.edu.cn

刘云平, 男, 1979 年出生, 博士, 教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为机器人技术、无人机技术。

E-mail: liuyunping@nuist.edu.cn

李成刚, 男, 1975 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。主要研究方向为工业机器人技术、传感器技术。

E-mail: lichenggang@nuaa.edu.cn

吴洪涛, 男, 1962 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为并联机构学理论、机械多体系统理论。

E-mail: mehtwu@126.com