

DOI: 10.3901/JME.2022.05.018

基于线性互补理论的可展开索-桁架结构 静力学分析*

肖 航 吕胜男 李 龙 罗斯达 段海滨 丁希仑
(北京航空航天大学机械工程及自动化学院 北京 100191)

摘要: 空间可展开索-桁架结构具有折展比大、重量轻、刚度高的优点, 广泛应用于天线、太空望远镜、太阳翼等大型航天器关键部件中。在统一框架内进行了梁单元和索单元的刚度矩阵集成, 建立了包含柔性绳索和杆件的可展开索-桁架结构刚度模型。基于线性互补理论, 提出了一种反应绳索真实张紧、松弛状态的结构受力变形计算方法, 得到了准确的结构受力与节点位移的映射关系。最后以剪叉机构单元和圆柱面可展开结构为例, 验证了所提出方法的有效性, 并分析了绳索分布对结构变形的影响。该分析方法可扩展应用于各类索-桁架结构的受力变形计算。

关键词: 可展开索-桁架结构; 柔性绳索; 线性互补理论; 静力学分析

中图分类号: TH123

Static Analysis of Deployable Cable-truss Structures Based on Linear Complementarity Theory

XIAO Hang LÜ Shengnan LI Long LUO Sida DUAN Haibin DING Xilun
(School of Mechanical Engineering and Automation, Beihang University, Beijing 100191)

Abstract: Deployable cable-truss structures have the advantages of large deploy/fold ratio, light weight and high stiffness, which have been widely applied in the key parts of large spacecrafts such as antennas, space telescopes and solar arrays. The stiffness matrices of beam and cable elements are assembled in a unified framework. The stiffness model of deployable cable-truss structures containing flexible cables and beams is established. Based on linear complementarity theory, a structure deformation calculation method which can reflect the actual tensility of cables, namely tensioned or slack, is proposed. The accurate relationship between the loads and deformations of nodes is obtained. The reliability of this method is validated through the simulation of a scissor-like element and a cylindrical deployable structure. The influence of cable distribution on stiffness is revealed. The proposed method can be utilized for the deformation analysis of various cable-truss structures.

Key words: deployable cable-truss structure; flexible cable; linear complementarity theory; static analysis

0 前言

随着航天事业的发展, 空间可展开结构得到了越来越广泛的应用。其中桁架式可展开结构折展比大、刚度高, 且可根据任务需求进行设计以拟合不同的形面, 被广泛用作天线、太空望远镜、太阳翼等航天器关键部件的支撑骨架^[1-3]。可展开结构骨架

的刚度很大程度上决定了航天器功能部件的使用性能, 而由于运载火箭负载能力的限制, 通过增加杆件数目或尺寸提高结构刚度的方式受到很大限制; 绳索质量轻, 在结构中添加张紧绳索可在质量增加有限时显著提高系统的刚度性能^[4-5]。

KWAN 等^[6]在剪叉式伸展臂中添加被动张紧绳以提高系统刚度。YOU 等^[7]研究了不同张紧绳布局方式对环状可展开机构性能的影响。LIU 等^[8]在径向肋可展开机构中添加张紧绳索, 并得到了最优的绳索张力。XIAO 等^[9]通过建立薄膜天线等效模型得到了张紧绳的最优布局。宋小科等^[10]提出了一种索

* 国家自然科学基金(51635002, 52075016)资助项目。20210322 收到初稿, 20210510 收到修改稿

网桁架复合双层结构, 张紧绳不仅可以提高系统刚度, 还可用于拟合多种形面。

绳索只能受拉不能受压, 在进行受力分析时可将其等效为一根仅承受拉力的二力杆^[11]。针对绳索单向受力的特性, 可应用有限元软件对包含绳索的结构进行刚度分析^[12-13]。有限元软件分析简单、快捷, 但仅能对确定参数模型进行仿真。由于绳索只有张紧和松弛两种状态, 也可采用迭代法进行含绳索结构的受力分析计算^[14], 但当绳索数量较多时算法的收敛性无法保证。

本文针对包含柔性绳索的可展开桁架结构开展静力学分析研究, 重点关注绳索的张紧、松弛状态求解。论文第一章建立了可展开索-桁架结构刚度模型, 第二章提出了考虑绳索张紧、松弛状态的结构变形计算方法, 第三章以剪叉机构单元和圆柱面可展开桁架结构为例进行了结构受力变形计算。

1 可展开结构刚度建模

刚度用来衡量结构受到外载作用时抵抗变形的能力, 通过刚度分析可以获得结构在外载作用下的柔性变形。可展开索-桁架结构由杆件和柔性绳索两大部分组成, 分别建立二者的刚度矩阵, 而后进行组合集成, 即可得到结构整体的刚度矩阵。

结构中, 典型梁单元如图 1 所示, 其两端点分别记为 i 、 j , 两端点受力与变形的关系为

$$\mathbf{p}_b = \mathbf{K}_b \boldsymbol{\xi}_b \quad (1)$$

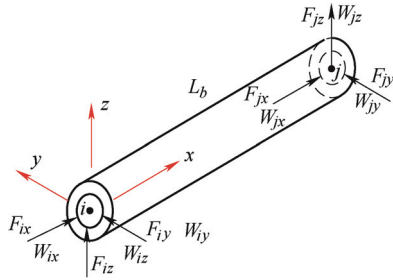


图 1 梁单元

式中, \mathbf{p}_b 和 $\boldsymbol{\xi}_b$ 均为 12×1 矢量, 分别表示杆件所受载荷和变形, 其具体形式为

$$\mathbf{p}_b = [\mathbf{F}_i \quad \mathbf{W}_i \quad \mathbf{F}_j \quad \mathbf{W}_j]^T$$

$$\boldsymbol{\xi}_b = [\mathbf{d}_i \quad \boldsymbol{\theta}_i \quad \mathbf{d}_j \quad \boldsymbol{\theta}_j]^T$$

载荷 \mathbf{p}_b 包含作用在杆件两端点 i 和 j 的力和力矩, 每个节点自由度为 6, 分别为线性变形 \mathbf{d} 和角度变形 $\boldsymbol{\theta}$ 。

刚度矩阵

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{b1} & \mathbf{K}_{b2} \\ \mathbf{K}_{b2}^T & \mathbf{K}_{b3} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (2)$$

$$\mathbf{K}_{b1} = \begin{bmatrix} \frac{A_b E_b}{L_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_b I_z}{L_b^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_b I_z}{L_b^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_b I_y}{L_b^3} & 0 & -\frac{6E_b I_y}{L_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_b J_b}{L_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E_b I_y}{L_b^2} & 0 & \frac{4E_b I_y}{L_b} & 0 \\ 0 & \frac{6E_b I_z}{L_b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_b I_z}{L_b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{b2} = \begin{bmatrix} \frac{A_b E_b}{L_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_b I_z}{L_b^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_b I_z}{L_b^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_b I_y}{L_b^3} & 0 & \frac{6E_b I_y}{L_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_b J_b}{L_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_b I_y}{L_b^2} & 0 & \frac{2E_b I_y}{L_b} & 0 \\ 0 & \frac{6E_b I_z}{L_b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E_b I_z}{L_b} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{b3} = \begin{bmatrix} \frac{A_b E_b}{L_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_b I_z}{L_b^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E_b I_z}{L_b^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_b I_y}{L_b^3} & 0 & \frac{6E_b I_y}{L_b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_b J_b}{L_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E_b I_y}{L_b^2} & 0 & \frac{4E_b I_y}{L_b} & 0 \\ 0 & -\frac{6E_b I_z}{L_b^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_b I_z}{L_b} \end{bmatrix}$$

式中, E_b 为弹性模量; G_b 为切变模量; A_b 为杆件横截面积; L_b 为杆件长度; I_x 和 I_y 为惯性矩; J_b 为极惯性矩。

在结构节点间增添柔性张紧绳索, 可以有效地提高整体刚度性能且不显著增加质量。根据实际受力情况, 柔索存在张紧和松弛两种状态。处于张紧

状态的绳索可以等效为二力杆, 绳索松弛状态时对连接节点的作用力为 0, 因此可以忽略不计。图 2 给出了典型的二力杆单元, 其节点载荷和变形关系为

$$\mathbf{p}_c = \mathbf{K}_c \boldsymbol{\xi}_c \quad (3)$$

式中, \mathbf{p}_c 和 $\boldsymbol{\xi}_c$ 均为 6×1 矢量, 分别表示节点所受载荷和变形。柔索的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_c = \frac{A_c E_c}{L_c} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $A_c = \pi D_c^2 / 4$ 为横截面积, D_c 为绳索直径, E_c 和 L_c 分别表示柔索的弹性模量和长度。

子矩阵

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & s_2^2 & s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_2 s_3 & s_3^2 \end{bmatrix}$$

s_1, s_2, s_3 可通过柔索两端节点坐标计算得到

$$s_1 = \frac{x_i - x_j}{L_c} \quad s_2 = \frac{y_i - y_j}{L_c} \quad s_3 = \frac{z_i - z_j}{L_c}$$

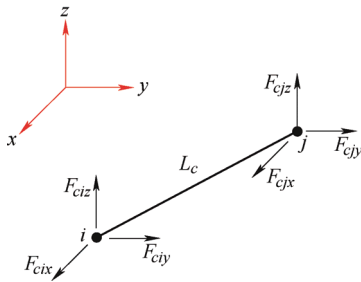


图2 二力杆

上述杆件和柔索刚度矩阵均是在各自局部坐标下建立的。为了获得结构整体刚度矩阵, 需要将杆件和柔索的刚度矩阵转换到同一个坐标系下。

如图 3 所示, \mathbf{R}_{bi} 和 \mathbf{R}_{ci} 分别表示第 i 根杆件和柔索从局部坐标系 $\{O_b x_b y_b z_b\}$, $\{O_c x_c y_c z_c\}$ 到全局坐标系 $\{Oxyz\}$ 的转换矩阵。 \mathbf{R}_{bi} 和 \mathbf{R}_{ci} 均为 3×3 矩阵, 针对不同的可展开结构, 坐标变换矩阵可通过运动学分析得到。因此, 全局坐标系下第 i 根杆件和柔索的刚度矩阵为

$$\begin{cases} {}^O \mathbf{K}_b = \mathbf{T}_{bi}^T \mathbf{K}_b \mathbf{T}_{bi} \\ {}^O \mathbf{K}_c = \mathbf{T}_{ci}^T \mathbf{K}_c \mathbf{T}_{ci} \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_{bi} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{bi} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{bi} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{bi} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{bi} \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

$$\mathbf{T}_{ci} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{ci} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{ci} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

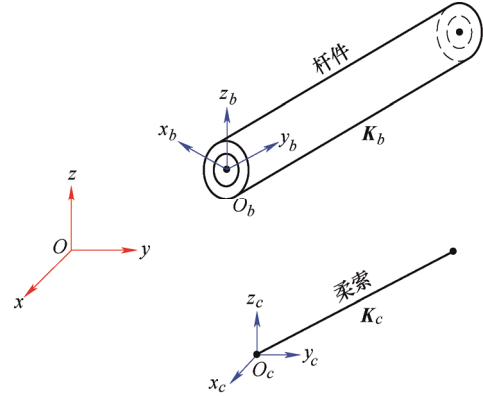


图3 刚度矩阵转换到同一坐标系

图 4 给出了两相邻杆件的组装示意图, 杆 1 和杆 2 在关节 j 处相连。

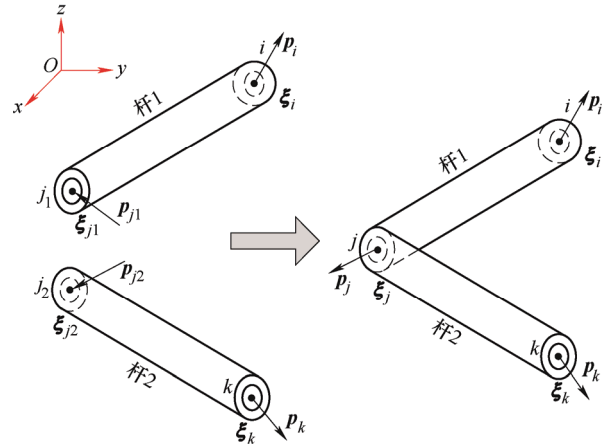


图4 杆1与杆2组装

杆 1 和 2 在全局坐标系下的刚度矩阵可根据式 (2) 和 (5) 得到, 其具体形式为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_{j1} \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_i \\ \boldsymbol{\xi}_{j1} \end{bmatrix}_{12 \times 1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{j2} \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{j2} \\ \boldsymbol{\xi}_k \end{bmatrix}_{12 \times 1} \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{12}, \dots, \mathbf{S}_{42}$ 为杆 1 和 2 刚度矩阵对应的子矩阵。若在关节 j 处两杆件刚性连接, 则 $\boldsymbol{\xi}_{j1} = \boldsymbol{\xi}_{j2}$, $\mathbf{p}_{j1} + \mathbf{p}_{j2} = \mathbf{p}_j$ 。由此可得到杆 1 和 2 组装后的刚度矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_j \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} + \mathbf{S}_{31} & \mathbf{S}_{32} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{S}_{41} & \mathbf{S}_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_i \\ \boldsymbol{\xi}_j \\ \boldsymbol{\xi}_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

整体结构的刚度矩阵可通过上述集成杆件和柔索刚度矩阵的方法获得, 其为

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \boldsymbol{\xi} \quad (8)$$

式中, \mathbf{p} 表示作用在结构上的外部载荷, $\boldsymbol{\xi}$ 表示结构节点的变形。在式(8)中, 假设全部柔索均处于张紧状态, 下一节将对实际情况中绳索的张紧、松弛状态进行分析。

2 考虑柔索状态的变形计算

上述刚度矩阵的推导中, 假设柔索均可等效为二力杆, 即绳索始终处于张紧状态。但在实际应用中, 绳索可能处于松弛状态。因此, 在结构变形分析中, 需要考虑绳索的张紧或松弛状态。针对空间可展开结构在实际工作中没有外部力矩作用在结构上的情况, 外部载荷 \mathbf{F}_i 和结构变形 \mathbf{d}_i , $\boldsymbol{\theta}_i$ 的关系可写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中, \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} , \mathbf{K}_{21} 和 \mathbf{K}_{22} 是式(8)中刚度矩阵的子矩阵。展开式(9)可得到节点纯外力 \mathbf{F}_i 与节点线性变形 \mathbf{d}_i 的关系

$$(\mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21})\mathbf{d}_i = \mathbf{F}_i \quad (10)$$

记 $\boldsymbol{\delta}$ 为绳索沿绳轴向的变形

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \cdots \ \delta_k]^T \quad (11)$$

式中, k 表示结构中绳索的数目, δ_i 是第 i 根绳索沿绳轴向的变形

$$\delta_i = s_1(\Delta_{x2} - \Delta_{x1}) + s_2(\Delta_{y2} - \Delta_{y1}) + s_3(\Delta_{z2} - \Delta_{z1}) \quad (12)$$

式中, $(\Delta_{x1}, \Delta_{y1}, \Delta_{z1})$ 和 $(\Delta_{x2}, \Delta_{y2}, \Delta_{z2})$ 分别表示第 i 根绳索两端节点沿 x, y, z 轴方向的变形。

第 i 根绳索沿绳轴向的拉力与绳索轴向变形的关系为

$$F_{ai} = \begin{cases} 0 & \delta_i < 0 \\ \frac{E_c A_c}{L_c} \delta_i & \delta_i \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

假设

$$V_i = F_{ai} - \frac{E_c A_c}{L_c} \delta_i \quad (14)$$

则可以转换为

$$\begin{cases} F_{ai} = V_i + \frac{E_c A_c}{L_c} \delta_i \\ F_{ai}, V_i \geq 0 \quad F_{ai} V_i = 0 \end{cases} \quad (15)$$

由于 F_{ai} 与 V_i 之间满足互补关系, 上式为一个标准的线性互补公式, 其矩阵形式为

$$\begin{cases} \mathbf{V} \mathbf{F}_a^T = 0 \\ \mathbf{F}_a = \mathbf{V} + \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_a = [F_{a1} \ F_{a2} \ \cdots \ F_{ak}]^T \\ \mathbf{V} = [V_1 \ V_2 \ \cdots \ V_k]^T \\ \mathbf{D} = \text{diag} \left[\frac{E_c A_c}{L_c} \ \frac{E_c A_c}{L_c} \ \cdots \ \frac{E_c A_c}{L_c} \right] \end{cases} \quad (17)$$

由于绳索可能处于松弛状态, 直接通过式(10)计算得到的节点变形并不准确。为了在节点变形计算中考虑绳索的实际状态, 将绳索等效为一个二力杆和作用在关节处的力 \mathbf{F}_c 。如图 5 所示, 以一个 V 形杆和绳为例进行说明; 如图 5a 所示, 当绳受拉处于张紧状态时, 绳和二力杆对系统作用力一样, 因此 \mathbf{F}_c 为一零矢量; 如图 5b 所示, 当绳受压处于松弛状态时, 绳对节点无作用力, 但是二力杆对节点产生额外作用力, 因此 \mathbf{F}_c 用于平衡等效二力杆对节点产生的作用力。

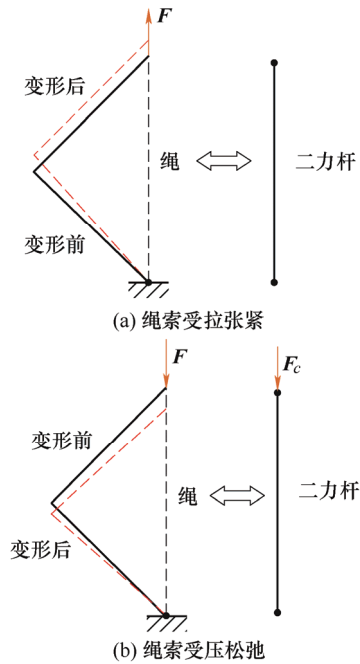


图 5 绳与二力杆、 \mathbf{F}_c 等效转换

则第 i 根绳索对应的 \mathbf{F}_{ci} 可写为

$$\mathbf{F}_{ci} = [-s_1 \ -s_2 \ -s_3 \ s_1 \ s_2 \ s_3]^T V_i \quad (18)$$

则有

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{B}^T \mathbf{V} \quad (19)$$

式中, \mathbf{B} 是由各绳索的方向余弦和零元素组成的矩阵。

为简化后续分析计算, 将机构所有节点的载荷和变形进行划分。 Δ_q 和 \mathbf{F}_q 表示有绳索连接关节的变形和载荷, Δ_p 和 \mathbf{F}_p 表示无绳索连接关节的变形

和载荷。节点划分后对应的刚度矩阵可以通过对式(10)中原始刚度矩阵进行线性变换得到。引入等效作用在关节处的力 F_c , 关节载荷和变形的关系转换为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pq} \\ \mathbf{K}_{qp} & \mathbf{K}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_p \\ \Delta_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_q \end{bmatrix} \quad (20)$$

展开上式可以得到

$$\begin{cases} \Delta_p = \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{F}_p - \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pq} \Delta_q \\ \Delta_q = (\mathbf{K}_{qq} - \mathbf{K}_{qp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{K}_{pq})^{-1} (\mathbf{F}_q - \mathbf{K}_{qp} \mathbf{K}_{pp}^{-1} \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_c) \end{cases} \quad (21)$$

有绳节点变形 Δ_q 和绳索轴向变形 δ 之间的关系为

$$\delta = \mathbf{B} \Delta_q \quad (22)$$

将式(19)、(21)、(22)代入式(16)可以得到

$$\begin{cases} \mathbf{F}_a = (\mathbf{I} + \mathbf{DBP}^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{V} - \mathbf{DBP}^{-1} \mathbf{Q} \\ \mathbf{F}_{ai} \quad V_i \geq 0 \quad F_{ai} V_i = 0 \end{cases} \quad (23)$$

由此可以看出, 针对节点变形的求解可以转换成一个典型的线性互补问题进行求解。式(23)为在求解二次规划问题时遇到的线性互补问题, Lemke 提出了一种互补消元法^[15]可有效地求解此类问题。考虑柔索状态的节点变形求解算法如下所示。

算法 1: 可展开索-桁架结构节点变形求解。

输入: 构型参数, 结构参数, 外部载荷。

输出: 结构节点变形(Δ_p, Δ_q)。

(1) 输入参数。

(2) 根据式(2)和式(4)得到杆件和柔索刚度矩阵。

(3) 根据式(8)建立结构整体刚度模型。

(4) 根据式(20)划分结构刚度矩阵、载荷和变形。

(5) 针对式(23)采用 Lemke 算法得到轴向力 F_a 。

(6) 根据式(14)、(19)计算柔索等效力 F_c 。

(7) 根据式(21)计算节点变形 Δ_p 和 Δ_q 。

(8) 返回(Δ_p, Δ_q)。

3 算例分析

3.1 剪叉机构单元

图 6 为一典型剪叉机构单元示意图, AC 、 BD 为杆件, 二者在杆件中点 O 处相连, BC 、 AD 为柔性绳索, $AC = BD = 1\,414\text{ mm}$, $AB = 1\,000\text{ mm}$ 。杆件横截面为空心圆形, 其外径 30 mm 、厚度 6 mm , 弹性模量 $E_b = 350\text{ GPa}$, 密度 $\rho = 1.7 \times 10^3\text{ kg/m}^3$; 柔索截面均匀, 直径为 3 mm , 弹性模量 $E_c = 100\text{ GPa}$, 密度 $\rho = 1.44 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。在节点 C 、 D 处作用有外载 F_C 、 F_D , 下面将分析不同载荷情况下单元变形以

及柔性绳索的张紧、松弛状态。

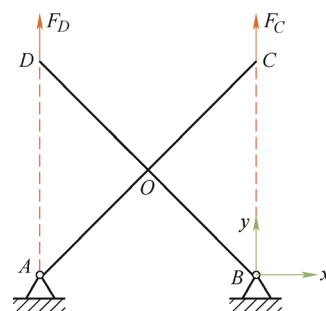
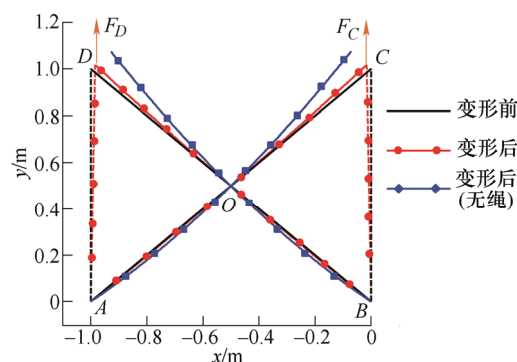
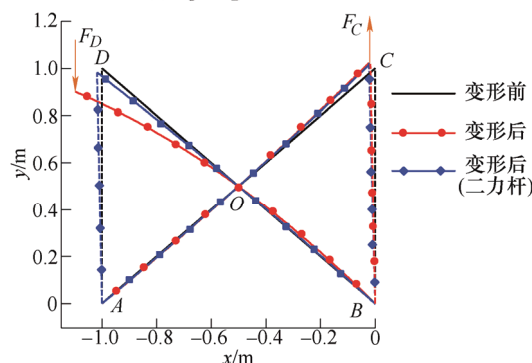


图 6 剪叉机构单元

当外载 $F_C = F_D = 1\,000\text{ N}$ 时, 根据上一节建立的刚度模型和变形算法计算得到单元的变形如图 7a 所示。图中实线条表示原始未变形剪式单元, 虚线条(圆点标记)表示变形后的机构单元, 为了更清晰的表示结构变形, 图中将变形进行了放大处理。采用前述算法计算可知 BC 、 AD 两根绳索均处于张紧状态, 根据节点变形可以计算得到 A 、 D 与 B 、 C 间的距离均变大, 也证明了两根绳索均处于张紧状态。图中方形标记线条表示无 BC 、 AD 绳索时的结构变形, 可以看出无绳索时结构变形明显增大。有绳索时节点最大变形为 1.56 mm , 无绳索时节点最大变形为 6.93 mm ; 剪式单元中杆件质量为 2.18 kg , 柔索质量为 0.02 kg 。增添柔性绳索后, 质量仅增加 0.92% , 而节点最大变形减小 77.49% 。由此可见, 增添张紧绳后, 系统质量增加有限, 但可以有效提高结构刚度、减小变形。



(a) $F_C = F_D = 1\,000\text{ N}$



(b) $F_C = 1\,000\text{ N}$ 、 $F_D = -1\,000\text{ N}$

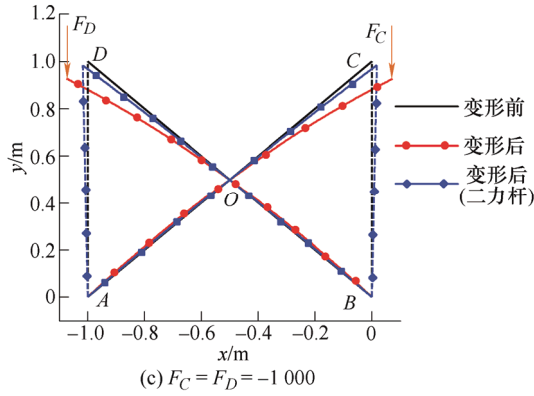


图 7 剪叉机构单元变形

图 7b 给出了外载 $F_C = 1\,000\text{ N}$ 、 $F_D = -1\,000\text{ N}$ 时的结构变形, 圆点标记线条表示变形后的单元, 此时柔索 AD 为松弛状态、柔索 BC 为张紧状态; 方形标记线条表示不考虑柔索张紧松弛状态, 即将柔索等效为二力杆后获得的结构变形。由于柔索的单向受力特性, 其在受拉方向可以提供很好的刚度, 在受压方向无法提供有效的支撑刚度; 因此在柔性绳索的布局设计中, 需要综合考虑结构所受外部载荷。

节点 C 、 D 处外载 $F_C = F_D = -1\,000\text{ N}$ 时单元变形如图 7c 所示, 圆点标记线条表示变形后的单元, 通过计算得到此时 BC 、 AD 两根绳索均处于松弛状态。方形标记线条表示将柔索等效为二力杆时得到的结构变形, 可以看出不考虑柔索状态的计算结果与实际情况有很大偏差。

3.2 剪叉式圆柱面可展开结构

图 8 为由剪叉机构单元组成的拟合圆柱面可展开结构, 其内、外层节点分别位于半径 1.7 m 和 2 m 的半圆弧上。径向由左右对称分布的四个完全相同的剪叉单元组成, 剪叉单元杆件长度为 1.44 m ; 机构轴向也由剪叉单元连接, 机构宽度为 1.5 m , 剪叉单元杆件长度为 1.53 m ; 图中实线表示杆件, 虚线表示柔索。杆件和柔索的机构参数和材料参数与上一小节中相同, 结构在中心 A 、 B 两点固定, 在节点 C 、 D 、 E 、 F 处有外载 F_C 、 F_D 、 F_E 、 F_F 作用。外部载荷共有三种情况, 如表 1 所示。

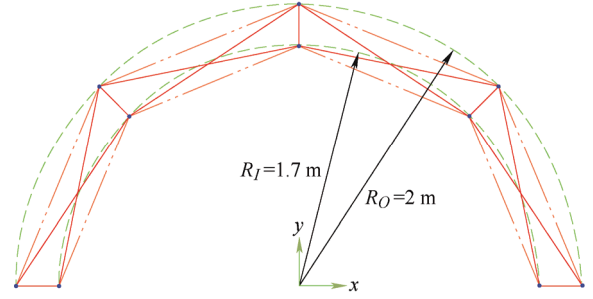
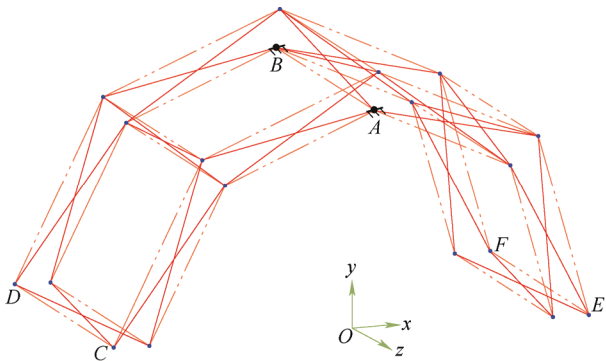


图 8 剪叉式圆柱面可展开结构

表 1 圆柱面可展开结构所受外载

	力矢量/N		
	载荷一	载荷二	载荷三
F_C	$[0, -100, 100]$	$[0, 100, -100]$	$[0, -100, -100]$
F_D	$[0, -100, -100]$	$[0, 100, 100]$	$[0, -100, 100]$
F_E	$[0, -100, 100]$	$[0, 100, 100]$	$[0, 100, 100]$
F_F	$[0, -100, -100]$	$[0, 100, -100]$	$[0, 100, 100]$

当载荷一作用时, 结构变形如图 9 所示。结构左右两侧变形完全对称, 结构在 C 、 D 、 E 、 F 处变形最大, 均为 9.69 mm ; 图中圆点标记线条表示载荷作用下处于张紧的柔索, 松弛状态的绳索未显示。在外载作用下结构向下弯曲变形, 通过受力分析可知, 位于结构外层的绳索受拉张紧, 内层的绳索受压松弛, 这与通过上述算法计算得到的柔索张紧松弛状态结果一致。若结构中无柔索, 则在相同外载作用下, 计算可得结构最大变形为 12.2 mm ; 结构中杆件总质量为 29.5 kg , 柔索总质量为 0.37 kg ; 增添柔索后, 质量增加 1.25% , 最大变形减小 20.6% 。由此可见, 增添柔索是减小结构变形的有效手段。

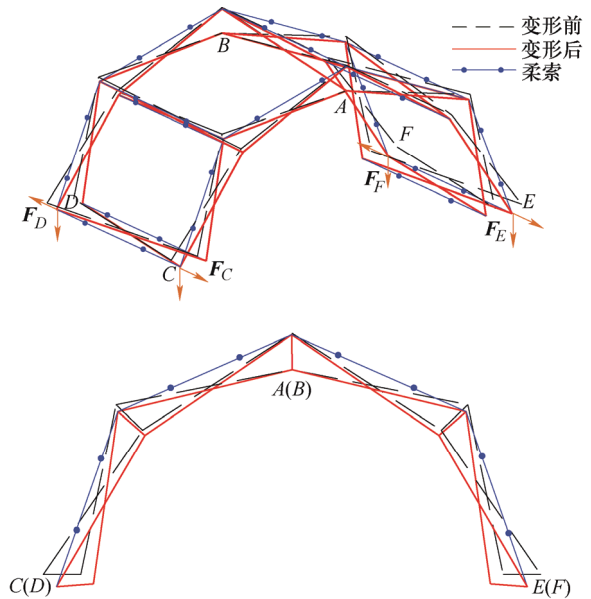


图 9 载荷一作用下结构变形

图 10 给出了载荷二作用时的结构变形。两侧结

构均向上弯曲变形, 内层的绳索受拉张紧, 外层的绳索受压松弛, 最大变形发生在离固定节点最远的 C 、 D 、 E 、 F 处, 均为 11.5 mm。与无柔索变形相比, 此时最大变形减小了 5.7%。

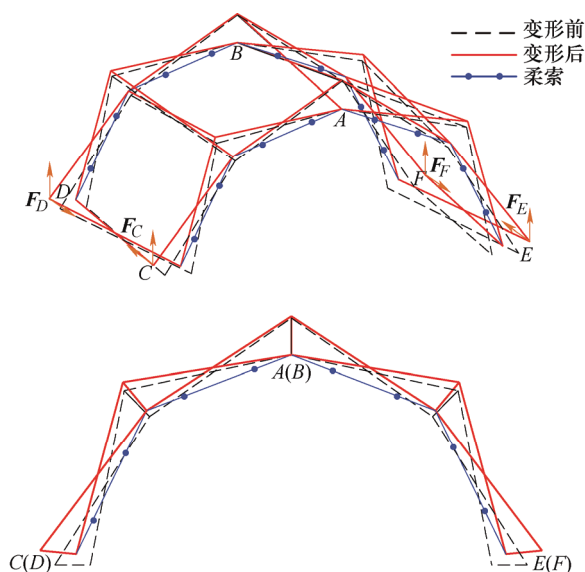


图 10 载荷二作用下结构变形

当载荷三作用时, 结构变形如图 11 所示。左侧向下弯曲变形, 对应的外层柔索张紧、内层柔索松弛; 右侧向上弯曲变形, 内层柔索张紧而外层柔索松弛。左侧最大变形发生在 C 处, 变形为 19.1 mm。右侧最大变形为 20.4 mm, 最大变形节点为 E 。左侧节点变形小于右侧, 与无柔索结构的变形对比, 有柔索时 C 和 E 处的变形分别减小了 11.2%和 5.1%。可以看出, 外层柔索比内层柔索对减小结构变形更为有效, 因此在实际应用中需根据实际载荷的作用方式进行张紧柔索的布局设计。

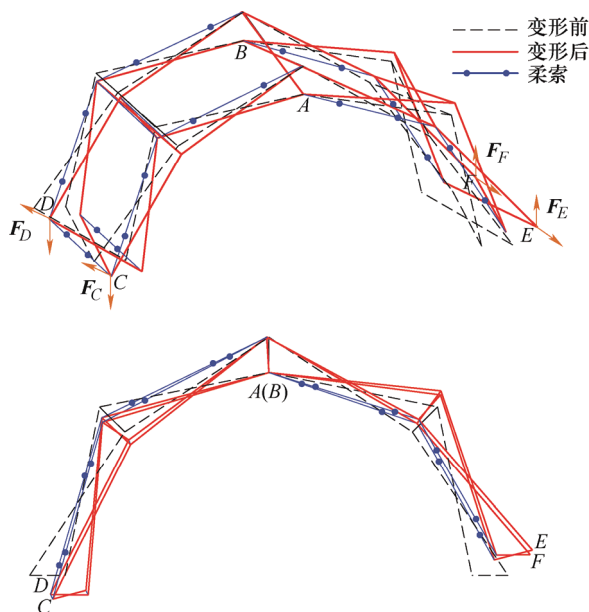


图 11 载荷三作用下结构变形

4 结论

本文建立了集成柔性绳索和杆件刚度的可展开索-桁架结构刚度模型; 将绳索等效为二力杆与沿绳轴向作用力, 分析了绳索实际受力状况。提出了一种应用线性互补理论处理外载作用下绳索张紧、松弛状态的求解方法, 得到了绳索的真实状态和准确的节点变形。采用该方法对含有张紧绳索的剪叉机构单元和圆柱面可展开结构进行了静力学分析, 验证了所提出方法的正确性; 分析结果表明, 增添张紧绳索在质量增加有限的情况下有效提高了系统刚度, 圆柱面可展开结构中外层分布绳索比内层绳索对减小结构变形更为有效。所提出的方法可用于分析不同类型索-桁架结构的受力变形并指导张紧绳索的布局设计。

参 考 文 献

- [1] 邓宗全. 空间折展机构设计[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2013.
DENG Zongquan. Design of space deployable and foldable mechanisms[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2013.
- [2] 秦波, 吕胜男, 刘全, 等. 可展收抛物柱面天线机构的设计及分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 114-121.
QIN Bo, LÜ Shengnan, LIU Quan, et al. Structural design and analysis of a deployable parabolic-cylinder antenna[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 114-121.
- [3] 刘荣强, 史创, 郭宏伟, 等. 空间可展开天线机构研究与展望[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 15-26.
LIU Rongqiang, SHI Chuang, GUO Hongwei, et al. Review of space deployable antenna mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 1-12.
- [4] LIEW J, VU K K, KRISHNAPILLAI A. Recent development of deployable tension-strut structures[J]. Advances in Structural Engineering, 2008, 11(6): 599-614.
- [5] XIAO H, LYU S N, DING X L. Optimizing accuracy of a parabolic cylindrical deployable antenna mechanism based on stiffness analysis[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(5): 192-202.
- [6] KWAN A S K, YOU Z, PELLEGRINO S. Active and passive cable elements in deployable/retractable masts[J]. International Journal of Space Structures, 1993, 8(1-2): 29-40.
- [7] YOU Z, PELLEGRINO S. Cable-stiffened pantographic deployable structures part 2: Mesh reflector[J]. AIAA Journal, 1997, 35(8): 813-820.

- [8] LIU R W, GUO H W, LIU R Q, et al. Shape accuracy optimization for cable-rib tension deployable antenna structure with tensioned cables[J]. *Acta Astronautica*, 2017, 140: 66-77.
- [9] XIAO H, LU S N, DING X L. Tension cable distribution of a membrane antenna frame based on stiffness analysis of the equivalent 4-SPS-S parallel mechanism[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 124: 133-149.
- [10] 宋小科. 空间展开机构的单元构型综合与组网的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.
SONG Xiaoke. Configuration synthesis and networking of units for spatial deployable mechanism[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2018
- [11] NAGARAJ B P, PANDIYAN R, GHOSAL A. A constraint Jacobian based approach for static analysis of pantograph masts[J]. *Computers & Structures*, 2010, 88(1): 95-104.
- [12] CAI J, MA R, DENG X, et al. Static behavior of deployable cable-strut structures[J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2016, 119: 63-75.
- [13] LIU R W, GUO H W, ZHANG Q, et al. Dynamic characteristics analysis of cable-rib tension deployable antenna[C]// ASME 2016 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Charlotte, USA: ASME, 2016: 1-8.
- [14] SHAN W. Computer analysis of foldable structures[J]. *Computer Structures*, 1992, 42(6): 903-912.
- [15] LEMKE C E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming[J]. *Management Science*, 1965, 11(7): 681-689.

作者简介: 肖航, 男, 1992 年出生, 博士后。主要研究方向为绳驱动与可展收机构设计。

E-mail: xiaohang@buaa.edu.cn

吕胜男(通信作者), 女, 1987 年出生, 博士, 副教授, 博士研究生导师。主要研究方向为折展机构、折纸及其衍生机构、模块化可重构机构等。

E-mail: shengnan_lyu@buaa.edu.cn