

DOI: 10.3901/JME.2022.01.221

# 考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向 派生力的区间不确定性优化<sup>\*</sup>

冯华渊 上官文斌 康英姿

(华南理工大学机械与汽车工程学院 广州 510641)

**摘要:** 以一驱动轴系统为研究对象, 基于分形理论, 首先建立了一种考虑粗糙表面特性的轴向派生力的确定性模型。通过轴向派生力测试, 验证了确定性模型的有效性。在考虑粗糙表面特性后, 轴向派生力具有较大的不确定性。为了更有效地分析和优化轴向派生力, 基于建立的确定性模型和勒让德多项式, 提出了一种轴向派生力的区间不确定性模型。在区间模型中, 输入参数被视为区间变量。以区间模型的上界和不确定度为优化目标, 提出了轴向派生力的多目标区间不确定性优化方法。为了提高优化效率, 结合勒让德多项式特点和顶点法, 提出了一种快速获取区间模型上界和不确定度的方法。数值算例表明: 基于提出的优化方法, 不仅可使轴向派生力的上界满足设计要求, 还可提高轴向派生力的鲁棒性。

**关键词:** 驱动轴系统; 轴向派生力; 分形理论; 区间不确定性; 多目标区间优化

**中图分类号:** TH132; U463

## Interval Optimization for Generated Axial Force of Drive Shaft Systems Considering Rough Surface Characteristics

FENG Huayuan SHANGGUAN Wenbin KANG Yingzi

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641)

**Abstract:** Taking a drive shaft system as the research object, a deterministic model of the generated axial force (GAF) considering rough surface characteristics (RSC) is established based on fractal theory. By measuring the GAF of a drive shaft system, the proposed deterministic model of the GAF is verified. Since there are many factors effecting the GAF after considering RSC, the GAF has greater uncertainty. To study the GAF more effectively, an interval model for the GAF is proposed based on Legendre polynomials and the deterministic model. In the interval model, the influencing factors are considered as interval parameters. Taken the upper bound and the uncertainty level of the GAF as the optimization objectives, a multi-objective interval optimization method for the GAF is proposed. In order to enhance the optimization efficiency, an efficient method for calculating the upper bound and the uncertainty level of the GAF is proposed by combining Legendre polynomials and vertex method. The results of the numerical examples show that through the multi-objective interval optimization, not only the upper bound of the GAF can meet the design requirement, but also the robustness of the GAF is enhanced.

**Key words:** drive shaft systems; generated axial force; fractal theory; interval uncertainty; multi-objective optimization

## 0 前言

驱动轴系统是汽车传动系统中的一个重要组成部件, 其起到等速传递从变速箱到车轮转矩的作用。在驱动轴系统的运行过程中, 由摩擦引起的轴向派

生力是一个重要的动态特性, 其可能会引起汽车的振动甚至异响, 从而降低汽车的稳定性和舒适性。随着生活品质的不断提升, 人们对汽车舒适性的要求日益增加, 轴向派生力从而成为了驱动轴系统研究中的一个重点。为了减少轴向派生力, 很多研究人员对轴向派生力进行了分析。

SA 等<sup>[1-2]</sup>建立了驱动轴系统轴向派生力的测试台, 测试了不同工况下的轴向派生力。为了研究摩擦特性对轴向派生力的影响, LEE 等<sup>[3]</sup>开发了专用

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(11472107)和广东省自然科学基金(2019A1515011612)资助项目。20210104 收到初稿, 20210408 收到修改稿

的摩擦特性测试的试验台。通过测试,建立了轴向派生力与摩擦特性的宏观联系。基于对驱动轴系统的运动学分析,JO 等<sup>[4]</sup>建立了具有三销轴万向节的驱动轴系统的轴向派生计算模型,分析了不同工况下确定性的轴向派生力。LIM 等<sup>[5-7]</sup>建立了可计算确定性轴向派生力的驱动轴系统多体动力学模型。在多体动力学模型中,考虑了接触对之间的接触参数和摩擦参数对轴向派生力的影响。但是,由于多体动力学模型比较复杂,且模型中的影响因素具有一定的不确定性,从而导致了多体动力学模型计算的轴向派生力与测试的结果相对误差较大,最大相对误差达到了 50%<sup>[6]</sup>。

综上所述,目前对驱动轴系统轴向派生力的研究主要集中于宏观意义上的确定性分析。驱动轴系统轴向派生力主要由三销轴万向节内部球环和滚道的摩擦特性引起,而球环和滚道的摩擦特性又与它们的表面粗糙特性有关。对轴向派生力的宏观研究并不能揭示粗糙表面特性对轴向派生力的影响。另外,由于粗糙表面特性、材料参数、尺寸参数和运行工况等因素的综合不确定性影响,轴向派生力具有较大的不确定性。因此,为了更深入和更全面地探索轴向派生力,需要对轴向派生力进行微观意义上的不确定性研究。

对于粗糙表面的微观研究,由于分形理论中用于表征粗糙表面轮廓的分形参数具有不随采样长度和仪器分辨率变化的特点<sup>[8]</sup>,因此,常采用分形理论来进行相关机械粗糙表面的微观特性分析<sup>[9-11]</sup>。在微观特性分析中,通常把两个粗糙表面的接触视为一个光滑平面和一个粗糙平面的接触<sup>[12]</sup>。对于不确定性分析,由于区间模型不需要大量的试验数据以及模型输入参数的统计信息,区间模型的适用性较好<sup>[13]</sup>。在区间模型中,模型的输入参数被定义为区间变量,模型的响应也为区间变量。对于复杂的不确定性模型,一般可通过正交多项式来建立其代理模型,再进行不确定性研究<sup>[14-16]</sup>。在建立区间模型后,一般可通过蒙特卡洛法求解模型的上下边界和不确定度,但是蒙特卡洛法计算效率比较低<sup>[17]</sup>。为了提高轴向派生力区间不确定性分析和优化效率,需要一种可快速获得轴向派生力区间模型响应的方法。对于在区间不确定性下的轴向派生力,其不确定度随着影响因素的变化而变化。轴向派生力的不确定度越大,轴向派生力的鲁棒性越差。因此,为了更有效地优化在区间不确定性下的轴向派生力,除了需要考虑其上界还需考虑其不确定度。本文的主要研究内容如下。

(1) 基于分形理论,建立了一种考虑球环和滚道之间粗糙表面特性的轴向派生力确定性计算模型;并通过测试一驱动轴系统的轴向派生力,验证了该模型的有效性。

(2) 基于勒让德多项式和建立的确定性计算模型,建立了一种考虑粗糙表面特性的轴向派生力区间不确定性计算模型。在该不确定性模型中,把分形参数、材料参数和运行工况视为区间变量。

(3) 以轴向派生力的上界和不确定度为优化目标,提出了一种轴向派生力多目标区间不确定性优化方法。通过结合勒让德多项式和顶点法,提出了一种可快速获得轴向派生力的上界以及不确定度的方法,以提高轴向派生力区间不确定性优化的效率。最后,通过数值算例,给出了一驱动轴系统轴向派生力的优化结果。

## 1 考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的确定性模型

在驱动轴系统运行过程中,轴向派生力主要由三销轴万向节内部的摩擦和运动特性引起。驱动轴系统及其三销轴万向节的结构图可见图 1。三销轴万向节内部的球环在三柱槽壳滚道上的运动主要有两种:绕着三销架轴耳的轴线方向的滚动和沿着轴耳轴线方向的滑动。在一定的输入转矩  $T$  和转速  $n$  下,这些运动与球环和滚道之间产生的摩擦力结合,会产生一个沿  $y$  方向的周期性分力,即轴向派生力,见图 2。

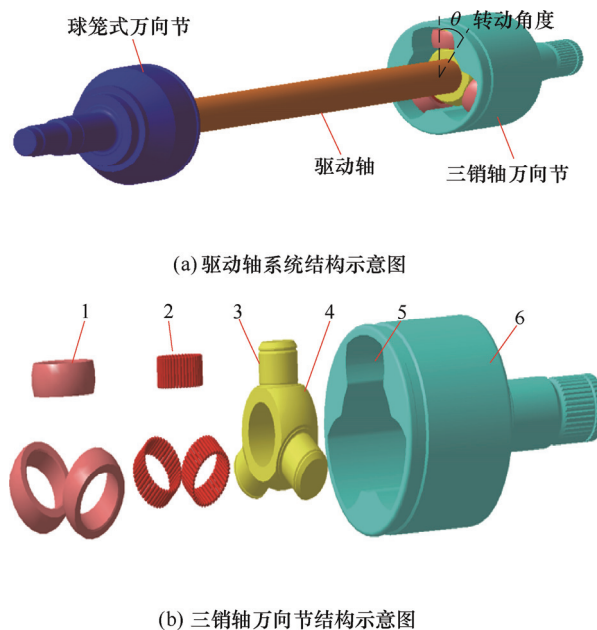


图 1 驱动轴

1. 球环 2. 滚针 3. 销耳 4. 三销架 5. 滚道 6. 三柱槽壳

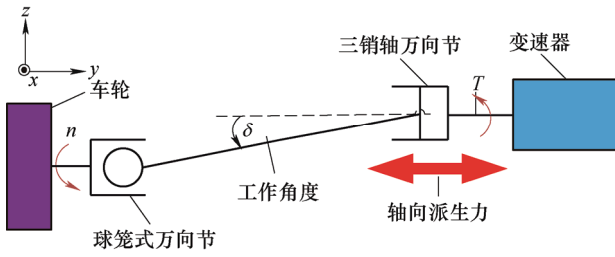


图2 驱动轴系统轴向派生力产生机理示意图

一般情况下, 驱动轴系统的轴向派生力主要与驱动轴系统的负载转矩  $T$ 、三销轴万向节的节圆半径  $r$ 、工作角度  $\delta$ 、转动角度  $\theta$  (图1)、球环和滚道之间的摩擦系数  $\mu$  有关, 其可表达为<sup>[18]</sup>

$$F = \sum_{i=1}^3 F_i = \sum_{i=1}^3 \frac{-T}{3r} \mu \delta \cos(\theta_i) B_i \quad (1)$$

式中,  $F_i$  为球环  $i$  和滚道之间产生的沿驱动轴系统轴向的力;  $\theta_i$  和  $B_i$  分别为

$$\begin{cases} \theta_i = \theta + \frac{2}{3}\pi(i-1) \\ B_i = \text{sign}\left(r\dot{\theta}\sin\delta\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi(i-1)\right) \cdot \right. \\ \left. \delta \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi(i-1)\right)\right) \end{cases} \quad (2)$$

球环和滚道之间的法向载荷  $F_n$  和切向摩擦力  $F_T$  可分别表示为<sup>[18]</sup>

$$F_n = \frac{T}{3r} \quad F_T = F_n \mu \quad (3)$$

结合式(1)和式(3), 轴向派生力可表示为

$$F = \sum_{i=1}^3 -\delta F_T \cos(\theta_i) B_i \quad (4)$$

由式(2)和(4)可知: 对式(1)进行改进后, 驱动轴系统轴向派生力主要与球环和滚道之间的切向摩擦力  $F_T$ 、驱动轴系统工作角度  $\delta$ 、转动角度  $\theta$  有关。在不同的球环和滚道粗糙接触表面上, 球环和滚道之间的切向摩擦力会不同, 从而导致轴向派生力的不同。因此, 粗糙表面特性通过影响切向摩擦力从而对轴向派生力有着一定的影响。为了揭示轴向派生力产生的更深层次的原因, 本文以切向摩擦力为切入点, 基于分形理论, 建立了一种考虑粗糙表面特性的轴向派生力的确定性计算模型。

### 1.1 粗糙表面微凸体分布及变形特性

对于一个机械粗糙表面, 其可用 Weierstrass-Mandelbrot(W-M)分形函数来表征<sup>[12, 19]</sup>。在粗糙表面上, 分布着大量微凸体。这些微凸体的变形会影响接触表面的接触和摩擦特性。两个粗糙平面接触可视为一个光滑平面与一个粗糙平面的接触。在接触

过程中, 接触的微凸体数量  $n$  与微凸体接触面积  $a$  的关系, 即分布函数, 可表示为<sup>[20-21]</sup>

$$n(a) = \frac{D}{2} \psi^{(2-D)/2} a_l^{D/2} a^{-(D+2)/2} \quad (5)$$

式中,  $D$  为分形维数;  $a_l$  为最大微凸体接触面积;  $\psi$  是关于微接触尺寸分布的域扩展因子。  $a_l$  和  $\psi$  可由下式计算

$$\begin{cases} \frac{\psi^{(2-D)/2} - (1 + \psi^{-D/2})^{-(2-D)/D}}{(2-D)/D} = 1 \\ a_l = \frac{2-D}{D} \psi^{(2-D)/2} A_r \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $A_r$  为接触对的实际接触面积。

对于粗糙表面上的单个微凸体, 以其临界接触面积为分界线, 可把其变形分为两个阶段, 即弹性变形阶段和塑性变形阶段。微凸体的临界接触面积可用下式表达<sup>[12]</sup>

$$a_n^c = \left[ 2^{7-2D} \pi^{D-3} \left( \frac{2E^*}{qKY} \right)^2 G^{2D-2} \ln \gamma \right]^{1/(D-1)} \quad (7)$$

式中,  $G$  为表征粗糙表面的特征尺度系数, 其与分形维数  $D$  共同决定粗糙表面特性;  $K$  为较软材料的硬度  $H$  与其屈服强度  $Y$  的比值,  $K$  通常取为 2.8;  $q=0.454+0.41\nu_1$ ,  $\nu_1$  为较软材料的泊松比;  $E^*$  为接触面的等效弹性模量, 可表示为

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (8)$$

式中,  $E_1$  和  $E_2$  分别为两接触材料的弹性模量;  $\nu_1$  和  $\nu_2$  分别为两接触材料的泊松比。

通常情况下, 微凸体实际最大接触面积  $a_{real}$  和实际临界接触面积  $a_{real}^c$  与微凸体的名义最大接触面积  $a_l$  和名义临界接触面积  $a_n^c$  的关系分别如下<sup>[12, 22]</sup>

$$a_{real} = a_l / 2; \quad a_{real}^c = a_n^c / 2 \quad (9)$$

当单个微凸体面积为  $a$  时, 其在弹性变形阶段和在塑性变形阶段的法向载荷可分别表示为<sup>[12]</sup>

$$\begin{cases} F_e = \frac{2^{9/2-D} \pi^{(D-3)/2} E^* G^{D-1} (\ln 1.5)^{1/2}}{3} (a)^{(3-D)/2} \\ F_p = KYa \end{cases} \quad (10)$$

### 1.2 考虑粗糙表面特性的轴向派生力的确定性计算模型

由式(4)可知, 球环和滚道之间的切向摩擦力是一个影响轴向派生力的因素。粗糙表面特性通过影响切向摩擦力而影响轴向派生力。因此, 为了得到考虑粗糙表面特性的轴向派生力计算模型, 首

先需要得到考虑粗糙表面特性的切向摩擦力模型。当粗糙表面上单个微凸体同时承受法向载荷和切向载荷而达到屈服状态时,其承受的切向载荷,即切向摩擦力,可表示为<sup>[22]</sup>

$$F_t = 4C_1 aY + 8C_2 F_e \quad (11)$$

式中,  $C_1$  和  $C_2$  分别为

$$C_1 = \frac{1}{(6-3\nu_1)\pi} \quad C_2 = \frac{(2\nu_1-1)}{(6-3\nu_1)\pi} \quad (12)$$

联立式(5)、(9)、(10)和(11),可得球环和滚道之间考虑粗糙表面特性的切向摩擦力模型为

$$F_T = \begin{cases} \int_{a_n^c}^{a_i} n(a) F_t da = \frac{2^{(19-3D)/2} C_2 D E^* G^{(D-1)} (\ln 1.5)^{1/2} \psi^{(2-D)/2}}{3\pi^{(5-D)/2} (3-2D)} A_2 + \frac{8D\psi^{(2-D)/2} Y}{(2-D)C_1\pi} A_1 & D \neq 1.5 \\ \int_{a_n^c}^{a_i} n(a) F_t da = \frac{24\beta\psi^{1/4} Y}{C_1\pi} A_3 + \frac{2^{19/4}}{\pi^{7/4}} C_2 G^{(1/2)} E^* (\ln 1.5)^{1/2} \psi^{1/4} A_4 & D = 1.5 \end{cases} \quad (13)$$

式中,  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  和  $A_4$  分别为

$$\begin{cases} A_1 = a_{real} - (a_{real})^{D/2} (a_{real}^c)^{(3-2D)/2} \\ A_2 = (a_{real})^{D/2} \left( (a_{real})^{(3-2D)/2} - (a_{real}^c)^{(3-2D)/2} \right) \\ A_3 = a_{real} - (a_{real})^{3/4} (a_{real}^c)^{1/4} \\ A_4 = (a_{real})^{3/4} \ln \frac{a_{real}}{a_{real}^c} \end{cases} \quad (14)$$

联立式(4)和(13),可得考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的确定性计算模型为

$$F = \begin{cases} \left( \frac{8D\psi^{(2-D)/2} Y}{(2-D)C_1\pi} A_1 + \frac{2^{(19-3D)/2} C_2 D E^* G^{(D-1)} (\ln 1.5)^{1/2} \psi^{(2-D)/2}}{3\pi^{(5-D)/2} (3-2D)} A_2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 -\delta \cos(\theta_i) B_i \right) & D \neq 1.5 \\ \left( \frac{24\beta\psi^{1/4} Y}{C_1\pi} A_3 + \frac{2^{19/4}}{\pi^{7/4}} C_2 G^{(1/2)} E^* (\ln 1.5)^{1/2} \psi^{1/4} A_4 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 -\delta \cos(\theta_i) B_i \right) & D = 1.5 \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)可知,影响驱动轴系统轴向派生力的因素主要有:分形参数(分形维数和特征尺度系数)、材料参数(屈服强度、等效弹性模量和泊松比)、运行工况(转动角度和工作角度)、微凸体实际最大接触面积和微凸体实际临界接触面积。

### 1.3 模型参数的识别方法

考虑粗糙表面特性后,轴向派生力的确定性模型(式(15))变得复杂,且模型参数的计算和识别也变复杂。为了方便下文的计算和分析,本节介绍式(15)中微凸体实际最大接触面积、微凸体实际临界接触面积、分形维数和特征尺度系数的参数识别方法。

微凸体实际临界接触面积可结合式(7)和(9)来确定。对于微凸体实际最大接触面积,其可由球环和滚道之间的法向接触力来确定。法向接触力可分为两个部分:在弹性变形阶段的法向接触力  $F_{NE}$  和在塑性变形阶段的法向接触力  $F_{NP}$ 。根据式(5)、(9)和(10),可得在两个变形阶段球环和滚道之间总的法向接触力  $F_{NT}$  为

$$F_{NT} = F_{NE} + F_{NP} = \int_{a_n^c}^{a_i} n(a) F_e da + \int_0^{a_n^c} n(a) F_p da = \begin{cases} \frac{2^{(12-3D)/2} D G^{(D-1)} E^* (\ln 1.5)^{1/2}}{3\pi^{(3-D)/2} (3-2D) \psi^{-(2-D)/2}} A_2 + \frac{2KYD\psi^{(2-D)/2}}{2-D} A_5 & D \neq 1.5 \\ \frac{2^{7/4} \pi^{-4/3} G^{(1/2)} E^* (\ln 1.5)^{1/2} \psi^{1/4}}{6KY\psi^{1/4}} A_4 + 6KY\psi^{1/4} A_6 & D = 1.5 \end{cases} \quad (16)$$

式中,  $A_5$  和  $A_6$  分别为

$$\begin{cases} A_5 = (a_{real})^{D/2} (a_{real}^c)^{(2-D)/2} \\ A_6 = (a_{real})^{3/4} (a_{real}^c)^{1/4} \end{cases} \quad (17)$$

在一定的负载转矩  $T$  下,令式(3)中的法向载荷和式(16)中的法向接触力相等,则可识别得到微凸体实际最大接触面积。分形参数  $D$  主要与粗糙表面的粗糙度  $Ra$  有关,其可近似的表示为<sup>[23]</sup>

$$D = \frac{1.528}{R_a^{0.042}} \quad (18)$$

在利用式(18)识别分形维数后,可通过下式识别特征尺度系数  $G$

$$\begin{aligned} \min \quad & U(G) = \mu - \mu_F = \mu - \frac{F_T}{F_{NT}} \\ \text{s.t.} \quad & G^l \leq G \leq G^u \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $\mu$  为测试得到的球环和滚道之间的摩擦系数;  $\mu_F$  为计算得到的球环和滚道之间的摩擦系数,

其等于由式(16)中的法向接触力  $F_{NT}$  与式(13)中的切向摩擦力  $F_T$  的比值。 $G^l$  和  $G^u$  分别为特征尺度系数  $G$  的下界和上界。

#### 1.4 模型验证

驱动轴系统轴向派生力测试台架见图 3a、3b。该测试装置和测试方法已在文献[18]中进行了讨论。简而言之, 球笼式万向节和三销轴万向节分别与转速控制电机和液压作动器相连。液压作动器和转速控制电机分别施加负载转矩和转速。通过调整测试台两端的相对位置, 可形成一定的工作角度  $\delta$ 。4 个用于测量轴向派生力的力传感器安装在液压作动器端, 见图 3a。

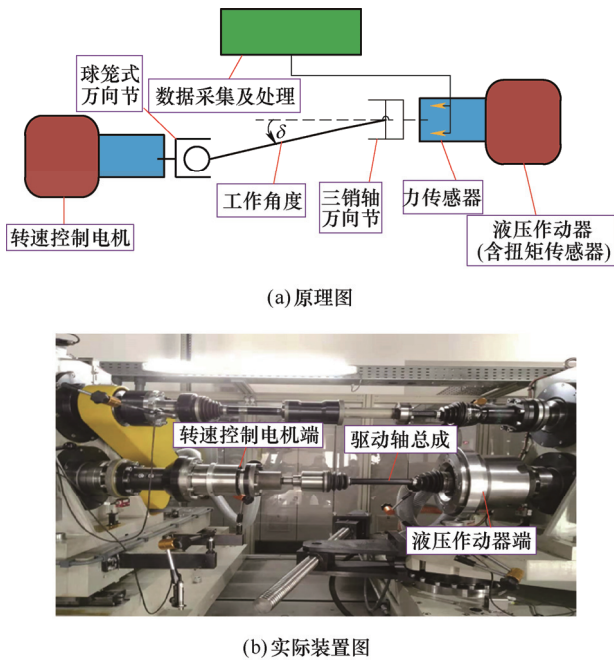


图 3 驱动轴系统轴向派生力测试的原理图和装置图

取一不考虑润滑作用的驱动轴系统为研究对象, 对式(15)进行验证。驱动轴系统相关参数等见表 1。基于表 1 中参数和 1.3 节中的参数识别方法, 可得到分形维度、特征尺度系数、微凸体实际最大接触面积和微凸体实际临界接触面积, 见表 2。基于表 1 和表 2 中参数, 可得轴向派生力与工作角度的关系, 见图 4。同时, 对该驱动轴系统进行不同角度下的轴向派生力测试, 测试结果见图 4。测试转速设为 200 r/min。由图 4 可知, 当工作角度小于  $12^\circ$ , 计算得到的和测试得到的轴向派生力基本一致; 当工作角度大于  $12^\circ$ , 计算得到的和测试得到的轴向派生力误差较大, 这可能是由于不确定性过大引起。由于在实际工程中, 驱动轴系统的工作角度一般不大于  $10^\circ$ , 因此, 图 4 可说明式(15)的有效性。

表 1 驱动轴系统相关参数

参数	数值
三销轴万向节圆半径/mm	27.2
负载转矩/(N·m)	100
滚道屈服强度/MPa	320
弹性模量/GPa	205
泊松比	0.3
粗糙度/ $\mu\text{m}$	0.8
测试得到的摩擦系数	0.32

表 2 识别得到的模型参数

参数	数值
微凸体实际最大接触面积/ $\text{mm}^2$	$6.34 \times 10^{-7}$
微凸体实际临界接触面积/ $\text{mm}^2$	$5.03 \times 10^{-10}$
分形参数	1.54
特征尺度系数/m	$4.41 \times 10^{-10}$

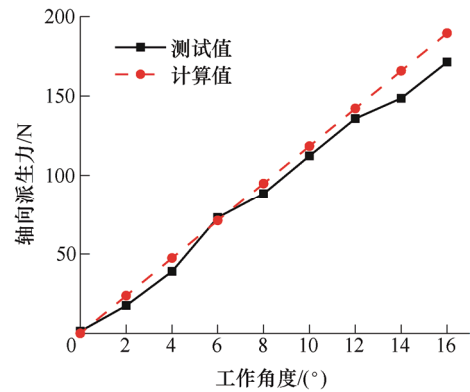


图 4 轴向派生力计算值与测试值的对比图

## 2 考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的区间模型

由式(15)可知, 考虑粗糙表面特性后, 驱动轴系统轴向派生力确定性模型的影响因素很多, 且模型较复杂。如果直接根据式(15)建立考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的区间不确定性模型, 不利用于轴向派生力的区间不确定性分析和优化。为了更有效地研究考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的区间不确定性, 本文基于勒让德多项式和式(15), 建立了考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的区间模型。

### 2.1 勒让德多项式

对于  $x$  在区间  $[-1, 1]$  中的函数  $f(x)$ , 其可用勒让德多项式来近似表示<sup>[15, 24]</sup>

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x) \quad (20)$$

式中,  $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$  是勒让德多项式的常数项系数。 $A_n$  可表示为<sup>[15, 24]</sup>

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \quad (n=1, 2, \dots) \quad (21)$$

根据 Gauss-Legendre 求积公式<sup>[24]</sup>, 可得

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx \approx \sum_{k=1}^n B_k f(x_k) P_n(x_k) \quad (22)$$

式中,  $B_k$  和  $x_k$  分别为 Gauss-Legendre 公式的系数和节点, 它们可通过查取 Gauss-Legendre 公式节点-系数表获得<sup>[24]</sup>。

同理, 对于有  $i$  个输入变量的连续函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_i)$ , 其也可用勒让德多项式近似表示

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i) \approx \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_k=0}^n \left( \prod_{i=0}^k \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{j_i} \right) \cdot A_{j_1, j_2, \dots, j_k} P_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (23)$$

式中,  $A_{j_1, j_2, \dots, j_k}$  为勒让德多项式  $P_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_i)$  的常系数。勒让德多项式  $P_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_i)$  可由下式计算

$$P_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_i) = P_{j_1}(x_1) P_{j_2}(x_2) \dots P_{j_k}(x_i) \quad (24)$$

同理, 基于 Gauss-Legendre 求积公式,  $A_{j_1, j_2, \dots, j_k}$  可表示为

$$A_{j_1, j_2, \dots, j_k} = \left( \prod_{i=0}^k \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{j_i} \right) \cdot \left( \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \left( f(x_1, x_2, \dots, x_k) \cdot P_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) \right) dx_1 dx_2 \dots dx_k \right) \approx \left( \prod_{i=0}^k \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{j_i} \right) \left( \sum_{j_1=1}^{n+1} \sum_{j_2=1}^{n+1} \dots \sum_{j_k=1}^{n+1} f(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}) \cdot P_{j_1, j_2, \dots, j_k}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_k}) \right) \quad (25)$$

式中,  $B_{j_1, j_2, \dots, j_k}$  和  $x_{j_k}$  分别为 Gauss-Legendre 公式的系数和节点<sup>[24]</sup>。

## 2.2 考虑粗糙表面特性的轴向派生力的区间模型

在工程实际中, 一般比较关注分形参数、材料参数和运行工况的影响。因此, 本文把分形参数(分形维数和特征尺度系数)、材料参数(屈服强度、等效弹性模量和泊松比)和运行工况(转动角度和工作角度)视为区间变量  $g_j (j=1, 2, \dots, 7)$ 。如果区间变量的下界  $g_j^l$  和上界  $g_j^u$  已知, 则区间变量的中点值  $g_j^r$ 、半径  $g_j^m$  和不确定度  $U_{g_j}$  可分别表示为

$$\begin{cases} g_j^r = \frac{1}{2}(g_j^l + g_j^u) \\ g_j^m = \frac{1}{2}(g_j^u - g_j^l) \\ U_{g_j} = \frac{g_j^r}{g_j^m} \end{cases} \quad (26)$$

基于式(15)和(23), 可建立考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的区间模型, 模型如下

$$F \approx f_L(\varepsilon) = \sum_{j_1=0}^n \dots \sum_{j_7=0}^n \left( \prod_{i=0}^k \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{j_i} \right) A_{j_1, j_2, \dots, j_7} P_{j_1, j_2, \dots, j_7}(\varepsilon) \quad (27)$$

式中,  $f_L(\cdot)$  表示由勒让德多项式计算得到的轴向派生力;  $n$  为采用的勒让德基函数最高阶次;  $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_7]$ , 其为变量  $g_j (j=1, 2, \dots, 7)$  标准化后的矢量。 $\varepsilon_j (j=1, 2, \dots, 7)$  可通过下式获得

$$\varepsilon_j = \frac{g_j - g_j^r}{g_j^m} \quad (28)$$

式(27)中的轴向派生力  $F$  也为区间变量, 其不确定度可定义为

$$U_F = \frac{F^l - F^u}{F^u + F^l} \quad (29)$$

式中,  $F^l$  和  $F^u$  分别为  $F$  的区间下界和上界。

由于式(27)中影响因素较多, 如果  $n$  取得过大, 会导致式(27)项数过多, 模型过于复杂。另外, 由于各输入参数的不确定度比较小, 且勒让德多项式精度较高, 所以为了简化模型和提高计算效率, 本文的  $n$  取为 1。因此, 考虑粗糙表面特性的驱动轴系统轴向派生力的区间模型为简化为

$$F \approx f_L(\varepsilon) = \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_7=0}^1 \left( \prod_{i=0}^k \left( \frac{2n+1}{2} \right)^{j_i} \right) A_{j_1, j_2, \dots, j_7} P_{j_1, j_2, \dots, j_7}(\varepsilon) \quad (30)$$

由式(30)可知, 其含有  $2^7(128)$  项。

## 3 驱动轴系统轴向派生力的多目标区间不确定性优化方法

### 3.1 轴向派生力的多目标区间不确定性优化模型

在一般情况下, 可以式(30)的上界值为优化目标, 使其小于某个设计值, 从而实现轴向派生力的单目标区间不确定性优化<sup>[18]</sup>。然而, 在考虑粗糙表面特性的情况下, 轴向派生力的区间模型影响因素较多。虽然各影响因素本身的不确定性较小, 但是

这些不确定性混合叠加在一起时, 其可使轴向派生力产生很大的不确定度。如果只考虑轴向派生力的上界值, 可能会使优化得到的轴向派生力的鲁棒性较差。因此, 为了有效地进行轴向派生力的区间优化, 本文提出一种驱动轴系统轴向派生力的多目标区间不确定性优化方法。在该方法中, 除了保证轴向派生力的上界值小于一定的设计值, 还需保证对应轴向派生力的不确定度小于一定的值, 从而保证轴向派生力的鲁棒性。驱动轴系统轴向派生力的多目标区间不确定性优化模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}^c) = \begin{cases} f_1(\mathbf{x}^c) = |\max(f_L(\mathbf{x}^c)) - M|, \\ f_2(\mathbf{x}^c) = |U_F - N| \end{cases} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^- \leq \mathbf{x}^c \leq \mathbf{x}^+ \\ & \mathbf{x}^l = \mathbf{x}^c(1 - U_x), \mathbf{x}^u = \mathbf{x}^c(1 + U_x) \\ & f_L(\mathbf{x}^c) \leq M \\ & U_F \leq N \end{aligned} \quad (31)$$

式中,  $\mathbf{x}^c$  为设计变量中点值组成的矢量;  $\mathbf{x}^-$  与  $\mathbf{x}^+$  分别为设计变量  $\mathbf{x}^c$  的最小值与最大值;  $U_x$  和  $U_F$  分别为设计变量和轴向派生力的不确定度;  $M$  和  $N$  分别指的是在某指定工况下轴向派生力的设计上限值 and 不确定度要求值。

由于式(31)含有 2 个优化目标, 直接基于式(31)进行优化比较困难。本文通过目标规划法<sup>[25]</sup>对优化目标进行统一, 然后对统一的目标进行优化。统一目标后的优化模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}^c) = \left[ \frac{\max(f_L(\mathbf{x}^c)) - M}{M} \right]^2 + \left[ \frac{U_F - N}{N} \right]^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^- \leq \mathbf{x}^c \leq \mathbf{x}^+ \\ & \mathbf{x}^l = \mathbf{x}^c(1 - U_x), \mathbf{x}^u = \mathbf{x}^c(1 + U_x) \\ & f_L(\mathbf{x}^c) \leq M \\ & U_F \leq N \end{aligned} \quad (32)$$

区间优化模型(式(32))是一个双层嵌套循环。其中, 外层循环是对设计变量的寻优, 指的是寻找既能满足轴向派生力设计目标  $M$  又能保证不确定度小于  $N$  的最优轴向派生力和最优设计参数, 其可通过遗传算法实现; 内层循环是计算轴向派生力的上边界和不确定度。一般情况下, 可通过蒙特卡洛法计算轴向派生力的上下界及不确定度。但是, 由于蒙特卡洛法是一种穷举法, 其需要大量的计算时间。因此, 下文提出了一种可快速计算内层循环中的轴向派生力的上边界和不确定度的方法, 从而提高轴向派生力的区间不确定性优化的效率。

### 3.2 轴向派生力的上边界和不确定度的计算方法: 勒让德-顶点法

如果对式(30)中的  $P_{j_1, j_2, \dots, j_8}(\varepsilon)$  求各变量  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) 的一阶偏导, 可得:

$$\frac{\partial P_{j_1, j_2, \dots, j_7}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_k} = \frac{\partial P_{j_1}(\varepsilon_1) P_{j_2}(\varepsilon_2) \cdots P_{j_7}(\varepsilon_7)}{\partial \varepsilon_k} = C_k \quad k=1, 2, \dots, 7 \quad (33)$$

式中,  $C_k$  为常数。

从式(33)可知,  $P_{j_1, j_2, \dots, j_7}(\varepsilon)$  对各变量  $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) 的一阶偏导均为常数。由于式(30)中除了  $P_{j_1, j_2, \dots, j_7}(\varepsilon)$ , 其它部分均为常数, 因此, 式(30)随着每个变量都是单调递增或者单调递减。因此, 对于式(30), 可通过顶点法<sup>[26]</sup>获取其最大和最小值, 即轴向派生力的上界和下界

$$F^l = \min F(\varepsilon_k), F^u = \max F(\varepsilon_k) \quad (34)$$

式中,  $\varepsilon_k$  表示第  $k$  个顶点矢量, 其由各变量的上下界进行排列组合而组成。

对于式(30), 其含有 7 个区间变量, 且每个变量含有 2 个顶点: 一个上顶点(即上界)和一个下顶点(下界)。因此, 式(30)中的顶点矢量共有  $2^7(128)$  个, 即  $k$  为 128。因此, 轴向派生力的上界和下界可通过下式快速获取

$$\begin{aligned} F^l = \min F(\varepsilon_k), F^u = \max F(\varepsilon_k) \\ k=1, 2, \dots, 128 \end{aligned} \quad (35)$$

在式(35)中, 只需要计算 128 个顶点矢量对应的轴向派生力值, 然后取最大的轴向派生力值作为上界, 取最小的轴向派生力值作为下界。获得轴向派生力的上下界后, 通过式(29)可计算轴向派生力的不确定度。相对于蒙特卡洛的大量采样, 式(35)只需 128 个采样点就可获得轴向派生力的上下界及不确定度, 计算效率可以大大提高。由于式(35)结合了勒让德多项式的特性和顶点法, 因此, 本文把这种可快速获取轴向派生力上下界的方法称为勒让德-顶点法。

## 4 数值算例

### 4.1 勒让德-顶点法有效性的验证

取相关参数如表 1 所示的驱动轴系统为研究对象, 当模型(式(30))输入参数的初始值和不确定度见表 3 时, 采用勒让德-顶点法可获得轴向派生力的上下边界, 它们分别为 83.8 N 和 58.0 N。采用勒让德-顶点法获得轴向派生力上下边界的计算机

CPU 计算时间为 11.5 s。为了验证勒让德-顶点法,同时采用蒙特卡洛法对式(15)进行轴向派生力上下边界计算。上下边界随着蒙特卡洛法采样次数的变化见图 5。

表 3 模型(式(30))输入参数的初始值和不确定度

参数	初始值	不确定度
分形维数	1.54	0.01
特征尺度系数/m	$4.41 \times 10^{-10}$	0.01
泊松比	0.3	0.01
等效弹性模量/GPa	112.64	0.01
屈服强度/MPa	320	0.01
工作角度/(°)	6	0.01
转动角度/(°)	90	0.01

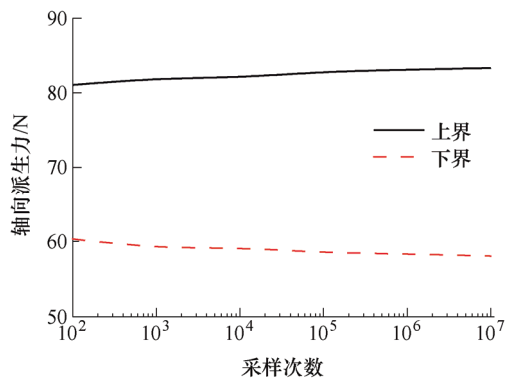


图 5 轴向派生力上下边界与采样次数的关系图

由图 5 可知,随着采样次数的增加,轴向派生力的上下边界分别趋于 83.4 N 和 58.1 N。当采样次数为  $10^7$  次时,计算机 CPU 计算时间为  $1.69 \times 10^6$  s。因此,由蒙特卡洛法获得的和由勒让德-顶点法获得的轴向派生力上下边界的相对误差较小,说明了勒让德-顶点法的有效性;相对于蒙特卡洛法,采用勒让德-顶点法可大大提高模型上下界和不确定度的计算效率,从而可提高轴向派生力的区间多目标优化效率。另外,计算得到的轴向派生力的上下界之间的差值较大,说明了区间不确定性对轴向派生力的影响很大。因此,在分析和优化轴向派生力时,需要考虑区间不确定性的影响。

#### 4.2 考虑粗糙表面特性的轴向派生力区间优化算例

在实际工程,一般要求在负载转矩为 100 N·m 和设计的工作角度不大于  $10^\circ$  的情况下轴向派生力不超过 80 N。由第 4.1 节分析可知,对于相关参数如表 1 所示的驱动轴系统,其上界大于 80 N,即该驱动轴系统的轴向派生力不符合设计要求。因此,本节取该驱动轴系统为研究对象,以其轴向派生力的上界和不确定度为优化目标,对其进行区间不确

定性优化。由于驱动轴系统一直保持转动,转动角度非可设计变量。因此,本节以分形维数、特征尺度系数、泊松比、等效弹性模量、屈服强度和工作角度为设计变量。各设计变量的设计区间见表 4。其中,转动角度仍视为区间变量,其中点值固定为  $90^\circ$ ;所有输入参数的不确定度仍取为 0.01;  $M$  和  $N$  分别设为 80 N 和 0.1。基于式(32),可得优化前后的设计参数和轴向派生力,分别见表 4 和表 5。

由表 4 可知,对考虑粗糙表面特征的轴向派生力进行区间优化,可得到相关的球环和滚道之间的分形参数和材料参数的优化结果。这些参数是驱动轴系统的重要设计参数。如果不考虑粗糙表面特性,则无法对这些参数进行设计和优化。在实际工程,通过改变球环和滚道之间的粗糙表面特性,可得到相对应的分形维数和特征尺度系数。由表 5 可知,通过同时优化轴向派生力的不确定度和上界,不仅可使轴向派生力上界符合设计要求(80N),还可使轴向派生力上下界之间的波动量和不确定度减少,即轴向派生力鲁棒性增强。

表 4 优化前后的设计参数

参数	初始值	设计区间	优化前	优化后
分形维数	1.54	[1.45,1.95]	1.54	1.61
特征尺度系数/m	$4.41 \times 10^{-10}$	$[1 \times 10^{-10}, 1 \times 10^{-9}]$	$4.41 \times 10^{-10}$	$8.52 \times 10^{-10}$
泊松比	0.3	[0.1,0.5]	0.3	0.27
等效弹性模量/GPa	112.64	[50,200]	112.64	120.19
屈服强度/MPa	320	[200,400]	320	340
工作角度/(°)	6	[2,10]	6	6.59

表 5 优化前后的轴向派生力

变量	优化前	优化后
不确定度	0.1818	0.0999
上界/N	83.8	79.95
下界/N	58.0	65.42

## 5 结论

(1) 相对于蒙特卡洛法,采用勒让德-顶点法可大大提高区间不确定性模型上下界和不确定度的计算效率。因此,在对较复杂的模型进行区间不确定性分析和优化时,可先通过勒让德多项式拟合该模型,再利用勒让德-顶点法可快速和有效计算区间不确定性模型上下界和不确定度的特性,以提高区间不确定性分析和优化的计算效率。

(2) 计算得到的轴向派生力的上下界之间的差

值很大, 说明了区间不确定性对轴向派生力的影响很大。因此, 在分析和优化轴向派生力时, 需要考虑区间不确定性对轴向派生力的影响。

(3) 相对于不考虑粗糙表面特性的轴向派生力区间不确定性优化, 考虑粗糙表面特征的轴向派生力区间不确定性优化可得到球环和滚道之间的分形参数和材料参数的优化结果。这些参数都是驱动轴系统的重要设计参数, 可为改进驱动轴系统及其轴向派生力提供参考。通过同时优化轴向派生力的不确定度和上界, 不仅可使轴向派生力上界符合设计要求(80N), 还可使轴向派生力上下界之间的波动量以及轴向派生力的不确定度大大减少, 即轴向派生力鲁棒性增强。

### 参 考 文 献

- [1] SA J S, KANG T W, KIM C M. Experimental study of the characteristics of idle vibrations that result from axial forces and the spider positions of constant velocity joints[J]. *International Journal of Automotive Technology*, 2010, 11(3): 355-361.
- [2] LEE K H, LEE D W, CHUNG J H, et al. Design of generated axial force measurement tester for tripod constant velocity joints under shudder condition[J]. *Journal of Mechanical Science & Technology*, 2014, 28(10): 4005-4010.
- [3] LEE C H, POLYCARPOU A A. A phenomenological friction model of tripod constant velocity (CV) joints[J]. *Tribology International*, 2010, 43(4): 844-858.
- [4] JO G H, KIM S H, KIM D W, et al. Estimation of generated axial force considering rolling-sliding friction in tripod type constant velocity joint[J]. *Tribology Transactions*, 2018(1): 1-48.
- [5] LIM Y H, SONG M E, LEE W H, et al. Multibody dynamics analysis of the drive shaft coupling of the ball and tripod types of constant velocity joints[J]. *Multibody System Dynamics*, 2009, 22(2): 145-162.
- [6] SERVETO S, MARIOT J P, DIABY M. Modelling and measuring the axial force generated by tripod joint of automotive drive shaft[J]. *Multibody System Dynamics*, 2008, 19(3): 209-226.
- [7] CAI Q C, LEE K H, SONG W L, et al. Simplified dynamics model for axial force in tripod constant velocity joint[J]. *International Journal of Automotive Technology*, 2012, 13(5): 751-757.
- [8] MAJUMDAR A, TIEN C L. Fractal characterization and simulation of rough surfaces[J]. *Wear*, 1990, 136: 313-327.
- [9] 运睿德, 丁北. 考虑多尺度接触状态的新接触模型[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(9): 80-89.  
YUN Ruide, DING Bei. New fractal contact considered multi-scale levels[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(9): 80-89.
- [10] 马登秋, 侯力, 魏永峭, 等. 基于分形理论的圆弧齿轮滑动摩擦接触力学模型[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(15): 121-127.  
MA Dengqiu, HOU Li, WEI Yongxiao, et al. Sliding friction contact mechanics model of the involute arc cylindrical gear based on fractal theory [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(15): 121-127.
- [11] 陈奇, 张振, 刘鹏, 等. 考虑摩擦的圆柱面切向接触刚度分形模型研究[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(23): 168-175.  
CHEN Qi, ZHANG Zhen, LIU Peng, et al. Research on fractal model of tangential contact stiffness between cylindrical surfaces considering friction factors[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(23): 168-175.
- [12] JIANG Shuyun, ZHENG Yunjian, ZHU Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory[J]. *Journal of Tribology-transactions of the ASME*, 2010, 132: 011401.
- [13] ZHU Jingjing, LÜ Zheng, LIU Hu. A novel iterative algorithm for natural frequency analysis of FG thin plates under interval uncertainty[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 60: 1389-1405.
- [14] WU Jinglai, LUO Zhen, ZHANG Yunqing, et al. An interval uncertain optimization method for vehicle suspensions using Chebyshev metamodels[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38(15-16): 3706-3723.
- [15] LI Xiao, QIU Zhiping. A most probable point-based univariate method for reliability evaluation of composite laminates with random and interval parameters[J]. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, 2020, 69(3): 873-886.
- [16] 刘坚, 雷济荣, 夏百战. 基于 Chebyshev 展开的区间穿孔板超材料分析[J]. *力学学报*, 2017, 49(1): 137-148.  
LIU Jian, LEI Jirong, XIA Baizhan. The interval analysis of multilayer-metamaterials with perforated apertures based on Chebyshev expansion[J]. *Chinese journal of theoretical and applied mechanics*, 2017, 49(1): 137-148.
- [17] CAI Bohao, SHANGGUAN Wenbin, LÜ Hui. An efficient analysis and optimization method for powertrain mounting systems involving interval uncertainty[J].

- Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D-Journal of Automobile Engineering, 2019, 234(5): 1318-1329.
- [18] FENG Huayuan, RAKHEJA Subhash, SHANGGUAN Wenbin. Analysis and optimization for generated axial force of a drive shaft system with interval uncertainty[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2021, 63: 197-210.
- [19] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84(7): 3617-3624.
- [20] 魏龙, 刘其和, 张鹏高. 基于分形理论的滑动摩擦表面接触力学模型[J]. 机械工程学报, 2012, 48(17): 106-113.
- WEI Long, LIU Qihe, ZHANG Penggao. Sliding frictional surface contact mechanics model based on fractal theory[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(17): 106-113.
- [21] 孙见君, 嵇正波, 马晨波. 粗糙表面接触力学问题的重新分析[J]. 力学学报, 2018, 50(1): 68-77.
- SUN Jianjun, JI Zhengbo, MA Chenbo. Reanalysis of the contact mechanics for rough surfaces[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2018, 50(1): 68-77.
- [22] 兰国生, 张学良, 丁红钦, 等. 基于分形理论的结合面静摩擦因数改进模型[J]. 农业机械学报, 2012, 43(1): 213-128.
- LAN Guosheng, ZHANG Xueliang, DING Hongqin, et al. Modified model of static frictional coefficient of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(1): 213-218.
- [23] 刘鹏, 赵韩, 黄康, 等. 线段齿轮法向接触刚度的改进分形模型研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(7): 114-122.
- LIU Peng, ZHAO Han, HUANG Kang, et al. Research on normal contact stiffness of micro-segments gear based on improved fractal model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(7): 114-122.
- [24] 郑咸义, 姚仰新, 雷秀仁, 等. 应用数值分析[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2008.
- ZHENG Xianyi, YAO Yangxin, LEI Xiuren, et al. Applied numerical analysis[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2008.
- [25] 黄平, 孟永钢. 最优化理论与方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- HUANG Ping, MENG Yonggang. Optimal theories and methods[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009.
- [26] DONG Weimin, SHAH H C. Vertex method for computing functions of fuzzy variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 24(1): 65-78.
- 
- 作者简介: 冯华渊, 男, 1993 年出生, 博士研究生。主要研究方向为驱动轴系统的动力学、接触摩擦和不确定性。  
E-mail: 2728455611@qq.com
- 康英姿(通信作者), 女, 1970 年出生, 博士, 副教授, 主要研究方向为汽车零部件的设计理论与方法、汽车动力学分析、通风与空调系统的节能优化。  
E-mail: yzkang@scut.edu.cn