DOI: 10.3901/JME.2021.21.126

声腔-弹性板结构在不同激励下声辐射特性研究*

孔德瑜 王 刚 倪俊芳
(苏州大学机电工程学院 苏州 215131)

摘要: 以声腔-弹性板声振耦合模型为研究对象, 对比分析该模型在点力激励和点声源激励下, 激励位置、声腔厚度以及弹性边界等对弹性板声辐射功率、表面振速和腔内声压的影响及两种情况下的区别。弹性板的振动位移函数通过谱几何方法得到, 并采用 Hamilton 原理, 充分考虑了板的振动与板两侧声场之间的耦合。利用 Rayleigh 积分, 可计算出弹性板的声辐射特性参数。结果表明, 在简支约束情况时, 点力和点声源两种激励下, 激励位置、声腔厚度和弹性边界对板的声辐射功率、表面振速和腔内声压有不同的变化。在薄声腔时, 点力激励下, 声腔个别模态对板有明显影响。点声源激励下, 模型耦合作用明显, 弹性板的声辐射功率、表面振速和腔内声压主要受到耦合模态的影响, 且点声源的耦合作用明显强于点力作用。相较于扭转刚度, 直线刚度对声辐射的影响更大。

关键词: 声腔-弹性板模型; 强耦合; 声辐射特性; Rayleigh 积分; 谱几何方法
中图分类号: TB532

Acoustic Radiation Characteristics of Cavity-elastic Plate Model under Different Excitation

KONG Deyu WANG Gang NI Junfang
(School of Mechanical and Electrical Engineering, Soochow University, Suzhou 215131)

Abstract: The vibro-acoustic coupling model of acoustic cavity and elastic plate is taken as the research object, and the influences of excitation location, cavity thickness and elastic boundary on acoustic radiation power, surface vibration velocity and sound pressure of elastic plate under point force excitation and point source excitation of the model are compared and analyzed, as well as the differences between the two cases. The vibration displacement function of the plate is obtained by Spectral Geometry Method, in which the coupling between the vibration of the plate and the sound field on both sides of the plate is fully considered by using Hamiltonian principle. The acoustic radiation characteristic parameters of the plate can be calculated by using Rayleigh integral. The results show that the excitation position, the cavity thickness and elastic boundary have different effects on the acoustic radiation power, surface vibration velocity and the sound pressure in the cavity under the point force and point source. When the cavity is thin, several modes of the cavity have obvious influence on the plate under the point force excitation. Under the point source excitation, the coupling effect of the model is more obvious. The sound radiation power, surface vibration velocity and sound pressure in the cavity are mainly affected by the coupling modes, and the coupling effect of the point source is obviously stronger than that of the point force. Compared with torsional stiffness, linear stiffness has greater influence on acoustic radiation.

Key words: cavity-elastic plate model; fully coupled; acoustic radiation characteristic; Rayleigh integral; spectral geometric method

0 前言

声腔-弹性板结构模型被广泛应用于工程实际中, 模型中弹性板的振动及相关的问题一直是相关

工程领域中重要研究课题。为此, 国内外学者对声腔-弹性板的声振耦合问题进行了诸多研究。1977年, DOWELL 等^[1]提出了弹性板声腔系统的结构-声耦合理论模型, 并分析耦合模型的固有特性, 进行了实验验证。此后研究人员在其理论基础上, 对结构-声耦合问题有了进一步的研究^[2-4]。SADRI 等^[5-7]采用了变分迭代法(VIM)、谐波平衡法、直接积分法和矩阵迭代法等方法来推导耦合系统的固有频率,

* 国家自然科学基金(51805341)、江苏省自然科学基金(BK20180843)、中国博士后科学基金(2020M671412)和江苏省博士后基金(2020Z055)资助项目。20201117 收到初稿, 20210318 收到修改稿

然后对系统进行参数化研究。基于波动理论, 采用时域有限体积法(TDFVM)^[8]研究了声腔与板耦合的瞬时响应及固有特性, 此方法也适用于求解非均匀介质的问题。此外, 为了研究不同边界条件对板腔耦合声场的影响, 基于 Hamilton 函数和 Rayleigh-Ritz 法, 分析了由 2 块弹性支撑的弹性板和四周刚性的封闭矩形声腔构成的耦合模型^[9]。文献[10]则基于变分法计算了弹性板在不同边界条件下, 耦合系统中板的振动位移和腔内声场声压级。

对于封闭矩形声腔内含板结构的耦合模型, 许多学者也进行了声振耦合分析, 研究其弹性板的边界条件对腔内声场的影响作用^[11]。为了研究非规则声腔模型的耦合特性, 基于解析法^[12]和格林函数法^[13]推导出结构-声耦合作用下的系统响应。胡东森等^[14]以敷设多层粘弹性层的复杂弹性板-声腔耦合模型为研究对象, 采用模态展开法, 研究了在点力作用下耦合系统的声振机理。而靳国永等^[15]则通过模态叠加法对耦合系统在点源激励下的声振耦合特性进行分析。葛月等^[16]也曾研究多种激励形式下任意角度耦合板的振动传递特性。吴锦武等^[17]针对层合板结构, 对于固定边界下激励力位置、铺设角度等参数对板声辐射的影响进行试验分析。

但以上研究大多着眼于全覆盖的弹性板的振动特性, 而本文采用了部分覆盖的弹性板, 且此方法对于全覆盖弹性板也适用。对于大部分研究, 仅讨论声腔-弹性板结构模型在某一种外界激励下的振动和声学特性等, 点力和点声源两种不同激励下模型的差异, 仍未有学者进行完整的对比分析。且弹性边界对此类耦合模型的声辐射的影响仍未有充分研究。本文利用了 Hamilton 函数和 Rayleigh-Ritz 法, 充分考虑了弹性板与声腔及弹性板与外部声场之间的耦合, 建立了声腔-弹性板-声辐射模型, 声腔四周为刚性壁面, 弹性板弹性安装在腔体壁面上。通过与有限元结果比对, 验证了本文理论推导的正确性。通过算例分析了耦合模型的振动和声学特性, 通过弹性板振速、腔内声压和声辐射功率曲线以及某一频率激励下的声腔模态揭示了模型参数的影响机理。且通过对比模型分别在点力和点声源激励两种情况下, 探索不同激励下模型特性的差异。

1 理论分析

1.1 分析模型

图 1 所示为声腔与弹性板之间的耦合模型, 其中弹性板通过扭转和直线弹簧安装在矩形腔壁上,

通过将四边的弹簧刚度取不同常数来模拟不同的边界条件。扭转和直线弹簧刚度均为无限大, 即固支边; 扭转刚度为零, 且直线刚度为无限大, 即简支边。腔的边界可以是任意的阻抗边界条件, 腔内充满空气。弹性板和矩形声腔的尺寸分别是 $a \times b \times h$ 和 $L_x \times L_y \times L_z$, 且板的尺寸与声腔面可不一致。根据薄板理论, 忽略其转动惯量和横向剪切变形的影响; 且考虑板同内外两侧声场的强作用关系, 即结构与声场的强耦合关系。运用 Rayleigh 法, 结合板表面声压 P_{ext} 可得模型的声辐射功率。本文主要考虑模型中板中心受到单位简谐力 F 作用和声腔内放置一点声源 Q 两种情况。

图 1 声腔-弹性板-声辐射模型

1.2 理论分析

采用谱几何方法, 将板横向位移 $w(x, y)$ 表示为

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{bn} y + \sum_{j=1}^4 (\xi_b^j(y) \sum_{m=0}^M c_m^j \cos \lambda_{am} x + \xi_a^j(x) \sum_{n=0}^N d_n^j \cos \lambda_{bn} y) \quad (1)$$

$$\xi^1(x) = \frac{9L}{4\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \frac{L}{12\pi} \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \quad (2)$$

$$\xi^2(x) = -\frac{9L}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \frac{L}{12\pi} \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \quad (3)$$

$$\xi^3(x) = \frac{L^3}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \frac{L^3}{3\pi^3} \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \quad (4)$$

$$\xi^4(x) = -\frac{L^3}{\pi^3} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \frac{L^3}{3\pi^3} \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \quad (5)$$

式中, A_{mn} , c_m^j , d_n^j 分别为未知的傅里叶展开系数; M , N 分别为 x 和 y 方向上的截断系数; $\lambda_{am} = m\pi/a$, $\lambda_{bn} = n\pi/b$; $\xi^j(x)$ 为辅助函数, 如式(2)~(5)。当位移函数及其低阶导数周期性地扩展到整个 x - y 平面上时, 需要引入附加项 $\xi_b^j(x)$ 和 $\xi_a^j(y)$ 来克服边界处潜在的不连续, 并能使式(1)中的傅里叶级数加速收敛。

为了简化计算, 将式(2)~(5)展开成傅里叶余弦函数, 则板的位移函数可以表示为

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \bar{A}_{mn} \cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{bn} y \quad (6)$$

$$\bar{A}_{mn} = A_{mn} + \sum_{l=1}^4 (\beta_n^l c_m^l + \alpha_m^l d_n^l) \quad (7)$$

式中, 系数 β_n^l 和 α_m^l 可以由式(8)计算求得

$$\begin{aligned} \xi_a^l(x) &= \sum_{m=0}^M \alpha_m^l \cos \lambda_{am} x \\ \xi_b^l(y) &= \sum_{n=0}^N \beta_n^l \cos \lambda_{bn} y \end{aligned} \quad (8)$$

将式(7)改写为矩阵形式

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{W} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{W}$ 为板的傅里叶系数。

板受一单位力作用, 响应因子为 $\exp(j\omega t)$, 则板的振速 $u(x, y)$ 可以表示为

$$u(x, y) = j\omega w(x, y) \quad (10)$$

式中, ω , j 分别为圆频率和复数单位。

根据谱几何方法, 声腔内声压可以表示成三维的傅里叶级数形式

$$\begin{aligned} p_{\text{int}}(x, y, z) &= \sum_{m_x}^{M_x} \sum_{m_y}^{M_y} \sum_{m_z}^{M_z} P_{m_x m_y m_z} \cos \lambda_{m_x} x \cos \lambda_{m_y} y \cos \lambda_{m_z} z + \\ &\quad \zeta_{2L_z} \sum_{m_x}^{M_x} \sum_{m_y}^{M_y} b_{m_x m_y} \cos \lambda_{m_x} x \cos \lambda_{m_y} y \end{aligned} \quad (11)$$

式中, $P_{m_x m_y m_z}$, $b_{m_x m_y}$ 为傅里叶级数的系数; $\lambda_{ms} = m_s \pi / L_s$, $s=x, y, z$; M_x , M_y , M_z 分别为 x , y 和 z 方向上的截断系数; $\zeta_{2L_z} = L_z(z/L_z)^2(z/L_z - 1)$ 为附加项, 当 $z=L_z$ 时, $\zeta_{2L_z}'(L_z) = 1$ 。若没有 ζ_{2L_z} 项, 声压在边界处的导数恒为零, 将会出现振速不连续情况。

板表面的声压可以表示为

$$P_{\text{ext}}(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_{mn} \cos \lambda_{am} x \cos \lambda_{bn} y \quad (12)$$

式中, P_{mn} 为未知的傅里叶系数。

对于耦合振动, 采用 Rayleigh 方法求解, 板的拉格朗日方程为

$$L_{\text{plate}} = U_{\text{plate}} - T_{\text{plate}} - W_F + W_{\text{c\&p}} - W_{\text{out}} \quad (13)$$

式中, U_{plate} 为板的弹性势能; T_{plate} 为板的动能; W_F 为激励力对板的做功; $W_{\text{c\&p}}$ 和 W_{out} 分别为内部和外部声压对板的做功。

板的势能、动能和激励力对板的做功分别可以表示为

$$\begin{aligned} U_{\text{plate}} &= \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^b \left[k_{x0} w^2 + K_{x0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=0} dy + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^b \left[k_{xa} w^2 + K_{xa} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=a} dy + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^a \left[k_{y0} w^2 + K_{y0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=0} dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^a \left[k_{yb} w^2 + K_{yb} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]_{y=b} dx \end{aligned} \quad (14)$$

$$T_{\text{plate}} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^a \int_0^b w^2 dx dy \quad (15)$$

和

$$W_F = \int_0^a \int_0^b w(x, y) F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) dx dy \quad (16)$$

式中, ω 为圆频率; D , μ , ρ , h 分别为板的弯曲刚度、泊松比、板的密度和厚度; k_{x0} , K_{x0} 分别为在边界 $x=0$ 处的直线弹簧刚度和扭转弹簧刚度, 其他刚度也是相同的表述方式; δ 为 Dirac 函数。

内部和外部声压对板的做功可以表示为

$$W_{\text{c\&p}} = \int_0^a \int_0^b w(\bar{x}, \bar{y}) p_{\text{int}}(x, y, L_z) dx dy \quad (17)$$

和

$$W_{\text{out}} = \int_0^a \int_0^b w(\bar{x}, \bar{y}) p_{\text{ext}}(\bar{x}, \bar{y}) dx dy \quad (18)$$

式中, $(\bar{x}, \bar{y})$ 为板上各点在声腔坐标系内的坐标位置; $(x_{\text{pc}}, y_{\text{pc}})$ 为板的中心在声腔坐标下所处的位置; $\bar{x} = x - (x_{\text{pc}} - a/2)$, $\bar{y} = y - (y_{\text{pc}} - b/2)$ 。

声腔的拉格朗日方程可表示为

$$L_{\text{cavity}} = U_{\text{cavity}} - T_{\text{cavity}} + W_{\text{p\&c}} - W_s \quad (19)$$

式中, U_{cavity} , T_{cavity} 分别为声腔的势能和动能; $W_{\text{p\&c}}$ 为板对声腔所做功, 并且 $W_{\text{p\&c}} = W_{\text{c\&p}}$; W_s 为声源对声腔做功。

本文选择点声源和简谐力作为激励, 而点声源对声腔做功可表示为

$$W_s = -\frac{1}{2} \int_V \frac{p_{\text{int}} Q}{j\omega} dV \quad (20)$$

$$Q = Q_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (21)$$

式中, Q_0 , $\mathbf{r}_0$ 分别为单极子点声源的幅值和位置; V 表示声腔体积。

对于声腔, 势能和动能分别可以表示为

$$U_{\text{cavity}} = \frac{1}{2\rho_0 c_0^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} p_{\text{int}}^2(x, y, z) dx dy dz \quad (22)$$

和

$$T_{\text{cavity}} = \frac{1}{2\rho_0 \omega^2} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \left[\left(\frac{\partial p_{\text{int}}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_{\text{int}}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p_{\text{int}}}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \quad (23)$$

式中, ρ_0 为声腔内介质密度; c_0 为声腔内声速。

将式(1)、(11)和(12)代入式(13)和(19), 并对拉格朗日函数的未知系数求偏导, 可以得到板腔耦合系统矩阵形式的运动方程

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{C}_{a\&pint} & \mathbf{C}_{a\&pext} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_a & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{a\&pint}^T & \mathbf{M}_a & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{P}_{\text{int}} \\ \mathbf{P}_{\text{ext}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_p \end{Bmatrix} \quad (24)$$

式中, $\mathbf{W}$, $\mathbf{P}_{\text{int}}$, $\mathbf{P}_{\text{ext}}$ 分别为板、内部声压和外部声压的傅里叶系数; $\mathbf{F}_p$ 为系统所受激励的系数; $\mathbf{K}_p$, $\mathbf{M}_p$ 和 $\mathbf{K}_a$, $\mathbf{M}_a$ 分别为板和声腔的刚度矩阵和质量矩阵; $\mathbf{C}_{a\&pint}$, $\mathbf{C}_{a\&pext}$ 分别为声腔与内外声压的耦合项。由式(24)可以看出, 平板的振动受平板外侧声压的影响。然而, 声压也可以通过 Rayleigh 积分由板的振动获得, 这说明两个子结构之间存在着耦合。

为了简化计算, 假设板置于无限大的屏障中, 因

此板的表面声压可以采用 Rayleigh 声辐射积分获得

$$p_{\text{ext}}(x, y) = -\frac{i\omega\rho_1}{2\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{u(x', y') \exp(ikR)}{R} dx' dy' \quad (25)$$

式中, k 为声波; ρ_1 为外部介质密度;

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}。$$

对于 Rayleigh 积分, 可以将 $\exp(ikR)/R$ 展开为傅里叶余弦表达式

$$\begin{aligned} \frac{\exp(ikR)}{R} &= \frac{\exp(ik\sqrt{\tau^2 + \sigma^2})}{\sqrt{\tau^2 + \sigma^2}} = \\ &= \sum_{t=0}^T \sum_{s=0}^S E_{ts} \cos(\lambda_{at}\tau) \cos(\lambda_{bs}\sigma) = \\ &= \sum_{t=0}^T \sum_{s=0}^S E_{ts} \times \\ &\quad (\cos \lambda_{at}x \cos \lambda_{at}x' \cos \lambda_{bs}y \cos \lambda_{bs}y' + \\ &\quad \cos \lambda_{at}x \cos \lambda_{at}x' \sin \lambda_{bs}y \sin \lambda_{bs}y' + \\ &\quad \sin \lambda_{at}x \sin \lambda_{at}x' \cos \lambda_{bs}y \cos \lambda_{bs}y' + \\ &\quad \sin \lambda_{at}x \sin \lambda_{at}x' \sin \lambda_{bs}y \sin \lambda_{bs}y') \end{aligned} \quad (26)$$

式中, $\tau=x-x'$, $\sigma=y-y'$; E_{ts} 为傅里叶余弦展开系数, 可由快速傅里叶变换(FFT)获得。

将式(12)和(26)代入式(25), 利用傅里叶级数的正交性, 两边同时乘以 $\cos \lambda_{am}x \cos \lambda_{bn}y$, 然后对板的区域积分可得

$$\begin{aligned} \kappa_m \kappa_n P_{mn} &= \frac{\omega^2 \rho_1}{2\pi ab} \sum_{m'=0}^M \sum_{n'=0}^N \sum_{t=0}^T \sum_{s=0}^S \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b \bar{A}_{m'n'} E_{ts} \times \\ &\quad \cos \lambda_{am}x \cos \lambda_{bn}y \cos \lambda_{am'}x' \cos \lambda_{bn'}y' \times \\ &\quad (\cos \lambda_{at}x \cos \lambda_{at}x' \cos \lambda_{bs}y \cos \lambda_{bs}y' + \\ &\quad \cos \lambda_{at}x \cos \lambda_{at}x' \sin \lambda_{bs}y \sin \lambda_{bs}y' + \\ &\quad \sin \lambda_{at}x \sin \lambda_{at}x' \cos \lambda_{bs}y \cos \lambda_{bs}y' + \\ &\quad \sin \lambda_{at}x \sin \lambda_{at}x' \sin \lambda_{bs}y \sin \lambda_{bs}y') dx dy dx' dy' \end{aligned} \quad (27)$$

将式(27)改写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{\kappa} \mathbf{P}_{\text{ext}} = \omega^2 \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \quad (28)$$

式中, $\mathbf{P}_{\text{ext}}$ 为外部声压的系数; 矩阵 $\bar{\mathbf{Q}}$ 则可由式(29)表示。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{p,q} &= \frac{\rho_1}{2\pi ab} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b E_{ts} \times \\ &\quad (\cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \cos \lambda_m x' \cos \lambda_n y' \times \\ &\quad \cos \lambda_t x \cos \lambda_t x' \cos \lambda_s y \cos \lambda_s y' + \\ &\quad \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \cos \lambda_m x' \cos \lambda_n y' \times \\ &\quad \cos \lambda_t x \cos \lambda_t x' \sin \lambda_s y \sin \lambda_s y' + \\ &\quad \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \cos \lambda_m x' \cos \lambda_n y' \times \\ &\quad \sin \lambda_t x \sin \lambda_t x' \cos \lambda_s y \cos \lambda_s y' + \\ &\quad \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y \cos \lambda_m x' \cos \lambda_n y' \times \\ &\quad \sin \lambda_t x \sin \lambda_t x' \sin \lambda_s y \sin \lambda_s y') dx dy dx' dy' \end{aligned} \quad (29)$$

式中, $p=m \times (N+1)+n+1$, $q=m \times (N'+1)+n'+1$ 。

将式(9)代入式(28), 可以得到外部声压与板的振速之间的关系

$$\kappa P_{\text{ext}} = \omega^2 Q \bar{A} = \omega^2 Q T W \quad (30)$$

根据式(25)和(30), 板腔耦合系统的控制方程可以表示为

$$\begin{Bmatrix} K_p & C_{a\&point} & C_{a\&pent} \\ 0 & K_a & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{Bmatrix} M_p & 0 & 0 \\ -C_{a\&point}^T & M_a & 0 \\ QT & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ P_{\text{int}} \\ P_{\text{ext}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

1.3 声辐射分析参数

板的声辐射功率可以表示为

$$W_{\text{rad}}(\omega) = \int_0^b \int_0^a I(x, y) dx dy \quad (32)$$

式中, $I(x, y)$ 为板的表面声强, $I(x, y) = \frac{1}{2} \text{Re}(u^*(x, y) p_{\text{ext}}(x, y))$ 。为了简化声学计算, 将式(6)和(12)代入式(32), 板的声辐射功率可以表示为

$$W_{\text{rad}} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_0^b \int_0^a u^*(x, y) p(x, y) dx dy = \frac{ab}{2} \text{Re} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N i \omega \kappa_m \kappa_n P_{mn} \overline{A_{mn}}^* \quad (33)$$

板的辐射阻抗为

$$R_{\text{rad}} = \frac{W_{\text{rad}}}{\langle u^2 \rangle} \quad (34)$$

式中, Re 和 $*$ 为实部和复共轭; $\langle u^2 \rangle$ 为板的平方振速。

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{S} \iint_{\text{plate}} u^2 dS \quad (35)$$

式中, S 为板的面积。

在实际应用中, 通常采用无量纲的辐射系数来代替辐射阻抗, 可表示为

$$\sigma = \frac{R_{\text{rad}}}{\rho_0 c S} \quad (36)$$

2 结果与讨论

2.1 方法验证

为了验证本文方法的正确性, 本节将本文结果与有限元结果进行比对。采用模型参数为: 声腔尺寸 $L_x \times L_y \times L_z = 0.9 \text{ m} \times 0.9 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$; 简支板的尺寸和材料参数为 $a \times b = 0.9 \text{ m} \times 0.9 \text{ m}$, $h = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\rho =$

2770 kg/m^3 , 弹性模量 $E = 71 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.33$ 。内外流体均为空气, 声速为 340 m/s , 密度为 1.2 kg/m^3 。激励采用单位简谐力, 作用于板的中心位置。采用商用有限元软件 LMS Virtual.Lab 建立相同模型, 网格尺寸大小为 20 mm 。图 2a 为腔体内 $(0.44 \text{ m}, 0.44 \text{ m}, 0.1 \text{ m})$ 点的声压值大小, 图 2b 为板上 $(0.44 \text{ m}, 0.44 \text{ m}, 0.005 \text{ m})$ 点的振速。由比对结果可知, 本文结果与有限元结果吻合良好, 验证了本文方法的正确性。

(a) 腔体内 $(0.44 \text{ m}, 0.44 \text{ m}, 0.1 \text{ m})$ 点的声压比较

(b) 板上 $(0.44 \text{ m}, 0.44 \text{ m}, 0.005 \text{ m})$ 点的振速比较

图 2 简支边界下腔内声压与板上振速的比对验证

2.2 激励位置对板的声辐射及腔内声压的影响

本节分别对声源的放置位置和简谐力的作用点进行分析讨论, 考察两者情况下, 板的声辐射及耦合声场内声压的变化。采用的模型参数为: 声腔尺寸 $L_x \times L_y \times L_z = 2.52 \text{ m} \times 2.51 \text{ m} \times 2.07 \text{ m}$; 板的尺寸和材料参数为 $a \times b = 0.3 \text{ m} \times 1.5 \text{ m}$, $h = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$, 弹性模量 $E = 71 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.33$ 。内外流体均为空气, 声速为 340 m/s , 密度为 1.2 kg/m^3 。激励分别采用单位简谐力和点声源 ($Q_0 = 0.002 \text{ m}^3/\text{s}$)。分析板在简支情况下的声辐射功率及耦合声场内点声压和板表面中心点的振速, 表 1 和

表 2 分别为板表面上随机选取的 4 个点和声腔内随机选取的 4 个点。图 3 为简谐力位置和声源位置不同时板的声辐射功率, 图 4 为声腔内点(1.26 m, 1.25 m, 0.9 m)处两种激励情况下的声压, 图 5 为板表面中心点处两种激励情况下的振速。

表 1 简谐力的不同作用点

简谐力编号	坐标/m	
	x	y
1	0.15	0.15
2	0.15	0.3
3	0.25	0.3
4	0.25	0.15

表 2 点声源放置的不同位置

点声源编号	坐标/m		
	x	y	z
1	0.28	0.25	0.25
2	0.45	0.25	0.55
3	0.45	0.75	0.65
4	0.43	0.23	0.53

通过图 3 可以看出, 简谐力的不同作用点和点声源位置对板声辐射功率均具有明显的影响。由图 3a 可知, 简谐力的作用位置不同, 板的声辐射功率曲线总体趋势差异不大, 且峰值所对应的频率为板的固有频率。在 270 Hz 处(板的第 5 阶固有频率), 位置 1 和位置 4 的曲线出现明显波峰, 而位置 2 和位置 3 的曲线仅有微小波动。结合表 1, 这主要由于简谐力作用点的 y 方向位置的不同引起的。由图 3b 可知, 不同位置的曲线差异较大, 但整体趋势接近。与图 3a 相比, 图 3b 中曲线更为复杂, 且峰值已无法体现出板自身振动特性, 峰值主要与声腔模态和耦合固有频率对应。可以看出, 相比简谐力, 在点声源激励下, 声腔与板的耦合作用更为明显。为了更明显观察 270 Hz 处情况, 图 6 为此频率下声腔内声压分布图。

由图 4a 和图 5a 可知, 简谐力的作用位置改变, 对板的振速和腔内声压影响较小, 曲线整体趋势变化不大。其中振速曲线与声功率曲线变化相似, 峰值所对应频率为板的固有频率, 且在 270 Hz 处有相同变化。而声压曲线, 则明显受到声腔和耦合关系的影响, 曲线波动主要由声腔模态和耦合模态决定, 且在 0~200 Hz 范围内, 曲线较吻合。当点声源激励时, 其位置改变对板的振速和腔内声压均有着明显影响, 但整体上, 峰谷对应的位置较为一致。

(a) 简谐力激励

(b) 点声源激励

图 3 在简支情况下, 不同激励位置时板的声辐射功率

(a) 简谐力激励

(b) 点声源激励

图 4 在简支情况下, 不同激励位置时腔体内点(1.26 m, 1.25 m, 0.9 m)处声压

图 5 在简支情况下, 不同激励位置时板表面中心点处振速

图 6 在简支情况下, 不同激励位置时在 270 Hz 处声腔内声压分布图

2.3 声腔厚度对板的声辐射及腔内声压的影响

本节研究了声腔厚度对模型的声辐射影响, 保持其他参数与 2.2 节一致, 改变声腔厚度为 0.03 m、0.15 m、0.3 m、1.5 m 进行对比分析。其中简谐力作用在板中心, 点声源放置在腔中心。图 7 为简支情况下两种激励的声辐射功率曲线, 图 8 为声腔内点 $(0.5L_x, 0.5L_y, 0.5L_z)$ 处两种激励情况下的声压, 图 9 为板表面中心点处两种激励情况下的振速。

如图 7 所示, 两种激励下板的声功率有明显变化。随着声腔厚度的增加, 简谐力激励下板的声功率变化不大, 仅在声腔前几阶声模态处略有变化, 且波动幅度逐渐减小。如图 7a 所标注, 在 135 Hz、192 Hz、270 Hz 和 300 Hz 处, 声功率曲线($h=0.03$ m)出现波动, 这主要由于声腔模态所引起的。在 135 Hz 处, 随着厚度增加, 波动逐渐变小, 直至平滑, 无

波动。而声源激励下板的声功率变化更为明显, 幅值随着厚度增加而减小, 但曲线总体趋势变化不大。对比两种不同激励下的情况, 可以看出声源激励下的声功率曲线较之于简谐力激励下的曲线明显更复杂。但当厚度较大时, 曲线稍有偏差。这说明当声腔较薄时, 声腔模态对板的影响作用更大, 同时点声源激励的影响作用更为明显。

由图 8 可知, 两种激励下, 随着声腔厚度的增加, 声压值均呈现出减小趋势, 且在声腔较薄时, 这种减小还出现衰减趋势。厚声腔情况下, 曲线比薄声腔情况下的曲线更为复杂, 这说明弹性板与厚声腔模态叠加作用更明显, 同时点声源激励的影响作用也更为明显。

由图 9 可知, 振速曲线变化与声功率曲线一致。当简谐力激励时, 振速曲线基本重合, 仅在声腔的

模态处有差异, 与上述一致; 而当点声源激励时,

随着厚度增加, 板的表面振速逐渐减小。

图 7 在简支情况下, 不同声腔厚度时板的声辐射功率

图 8 在简支情况下, 不同声腔厚度时腔体内点(0.5L_x, 0.5L_y, 0.5L_z)处声压

图 9 在简支情况下, 不同声腔厚度时板表面中心点处振速

2.4 弹性边界下板的声辐射及腔内声压的变化

本节主要考察板在弹性边界对模型的声辐射的影响及腔内声压的影响。此处采用的模型的物理参

数与第 2.2 节保持一致。通过改变直线弹簧和扭转弹簧刚度, 来分析弹性安装边界对模型的影响。为使分析简单化, 首先对弹簧进行无量纲化。在调节

弹簧刚度时,将四边的刚度进行统一,同时改变四边的刚度。其中,简谐力和点声源分别放置在(0.15 m, 0.75 m, 0.005 m)和(0.43 m, 0.23 m, 0.53 m)。

图 10 和图 11 分别为简谐力和点声源激励下,改变弹性板的安装边界的声辐射功率曲线。图 12 和图 13 分别为简谐力和点声源激励下,改变弹性板的安装边界下,腔内(1.26 m, 1.25 m, 0.9 m)处的声压。其中,图 10a 和 10b 分别为设定直线刚度 $ka^3/D=1$ 和 $ka^3/D=10^6$ 时调节扭转刚度 $Ka/D=1, 10, 100, 10^6$ 。图 10c 和 10d 分别为设定扭转刚度 $Ka/D=1$ 和 $Ka/D=10^6$ 时调节直线刚度 $ka^3/D=1, 10, 100, 10^6$,

图 11~13 条件相同。

对于简谐力激励下,在图 10 所列的四种情况下,曲线均随着刚度增大而有一个向右偏移的趋势。且可以看出直线刚度对声辐射的影响更大。对于点声源激励下,直线刚度较小时,扭转刚度对声辐射的影响很小几乎可忽略。相比之下,不论扭转刚度大小,直线刚度对声辐射的影响均很大。在点声源激励下,腔内同一点声压均一致;在简谐力激励下,随着弹性板的不同安装边界,腔内同一点声压有明显变化。在直线刚度较小时,声压变化较小,且相较于扭转刚度,直线刚度对曲线的影响更大。

图 10 在简谐力激励下,不同弹性边界时板的声辐射功率

图 11 在点声源激励下, 不同弹性边界时板的声辐射功率

图 12 在简谐力激励下, 不同弹性边界时腔内(1.26 m, 1.25 m, 0.9 m)点声压

图 13 在点声源激励下, 不同弹性边界时腔内(1.26 m, 1.25 m, 0.9 m)点声压

3 结论

本文以声腔-弹性板的强耦合模型为研究对象, 分析了模型在不同激励下的声辐射功率、腔内声压和板的表面振速问题。以弹性板简支为例, 对比分析了在简谐力和点声源激励下, 激励位置、声腔厚度对板声辐射、表面振速和腔内声压的影响。得出以下结论。

(1) 当声腔流体为空气时, 简谐力作用点变化时, 板的声辐射功率变化不大, 仅在板的第 5 阶固有频率处出现差别, 且与作用位置的 y 方向有关。点声源位置改变时, 板的辐射声功率、表面振速和腔内声压均差异较大, 但整体上, 峰谷出现位置较为一致。

(2) 随着声腔厚度增加, 简谐力激励下板的声功率变化不大, 在声腔前几阶声模态处出现波动, 且波动幅度逐渐减小; 而声源激励下板的声辐射功率曲线更为复杂, 保持整体趋势不变, 幅值逐渐减小。振速曲线变化规律与声功率曲线变化相吻合。

(3) 两种激励下, 随着声腔厚度增加, 声压值均呈现出减小趋势, 且在声腔较薄时, 这种减小还出现衰减。厚声腔情况下曲线比薄声腔情况下曲线更为复杂, 这说明弹性板与厚声腔模态叠加作用更为明显, 同时点声源激励的影响作用也更为明显。

(4) 在简谐力和点声源两种激励下, 弹簧刚度对声辐射的影响均较大, 仅在扭转刚度较小时, 影响较小, 且相较于扭转刚度, 直线刚度对其影响更大。不同的弹簧刚度对点声源下腔内声压影响不大, 而对简谐力下腔内同一点声压有影响, 在扭转刚度较小时, 影响较小。

参 考 文 献

- [1] DOWELL E H, GORMAN G F, SMITH D A. Acoustoelasticity: General theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiment[J]. Journal of Sound and Vibration, 1977, 52(4): 519-541.
- [2] KIM S M, BRENNAN M J. A compact matrix formulation using the impedance and mobility approach for the analysis of structural-acoustic systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 223(1): 97-113.
- [3] ZHANG Hong, SHI Dongyan, ZHA Shuai, et al. Vibro-acoustic analysis of the thin laminated rectangular plate-cavity coupling system[J]. Composite Structures, 2004, 116(6): 3312-3318.
- [4] SARIGUL A S, KARAGOZLU E. Vibro-acoustic coupling in composite plate-cavity systems[J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(11): 2274-2283.
- [5] LEE Yiuyin. Free vibration analysis of a nonlinear panel coupled with extended cavity using the multi-level residue harmonic balance method[J]. Thin-Walled Structures, 2016, 98: 332-336.
- [6] PRETLOVE A J. Free vibrations of a rectangular panel backed by a closed rectangular cavity[J]. Journal of Sound and Vibration, 1965, 2(3): 197-209.
- [7] SADRI M, YOUNESIAN D. Nonlinear free vibration analysis of a plate-cavity system[J]. Thin-Walled Structures, 2014, 74: 191-200.
- [8] 宣领宽, 明平剑, 张文平, 等. 封闭声腔的结构-声耦合的瞬态响应及固有特性分析的时域有限体积分法[J]. 声学学报, 2014, 39(2): 215-225.

XUAN Lingkuan, MING Pingjian, ZHANG Wenpin,

- et al. Time domain finite volume method for the transient response and natural characteristics of structural-acoustic coupling in an enclosed cavity[J]. *Acta Acustica*, 2014, 39(2): 215-225.
- [9] 姚昊萍, 张建润, 陈南, 等. 不同边界条件下的封闭矩形声腔的结构-声耦合分析[J]. *声学学报*, 2007, 32(6): 497-502.
- YAO Haoping, ZHANG Jianrun, CHEN Nan, et al. Analysis of structural-acoustic coupling of elastic rectangular enclosure[J]. *Acta Acustica*, 2007, 32(6): 497-502.
- [10] XIE Xiang, ZHENG Hui, QU Yegao. A variational formulation for vibro-acoustic analysis of a panel backed by an ir-regularly-bounded cavity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 373: 147-163.
- [11] 姚昊萍, 张静. 具有弹性板的矩形封闭声腔结构-声耦合分析[J]. *中国机械工程*, 2012, 23(20): 2434-2437.
- YAO Haoping, ZHANG Jing. Analysis of structural-acoustic coupling of a panel in a rectangular enclosure[J]. *China Mechanical Engineering*, 2012, 12(20): 2434-2437.
- [12] 王园, 张建润, 李磊, 等. 不同边界约束的弹性板封闭梯形声腔的结构-声耦合特性分析[J]. *振动工程学报*, 2018, 31(6): 1021-1030.
- WANG Yuan, ZHANG Jianrun, LI Lei, et al. Analysis of structural-acoustic coupling of a trapezoidal cavity surrounded by flexible panel subjected to different restrained boundaries[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(6): 1021-1030.
- [13] 罗超, 饶柱石, 赵玫. 基于格林函数法的封闭声腔的结构-声耦合分析[J]. *振动工程学报*, 2004, 17(3): 48-52.
- LUO Chao, RAO Zhushi, ZHAO Mei. Analysis of structural-acoustic coupling of an enclosure using Green function method[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(3): 48-52.
- [14] 胡东森, 白振国. 复杂板-腔系统声振耦合机理分析[J]. *应用力学学报*, 2018, 35(1): 141-146+233.
- HU Dongsan, BAI Zhenguo. Analysis of vibro-acoustic coupling theory of a complex plate-cavity model[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2018, 35(1): 141-146+233.
- [15] 靳国永, 杨铁军, 刘志刚, 等. 弹性板结构封闭声腔的结构-声耦合特性分析[J]. *声学学报*, 2007, 32(2): 178-188.
- JIN Guoyong, YANG Tiejun, LIU Zhigang, et al. Analysis of structural-acoustic coupling of an enclosure surrounded by flexible panel[J]. *Acta Acustica*, 2007, 32(2): 178-188.
- [16] 葛月, 牛军川, 刘知辉. 多种激励形式下任意角度耦合板振动传递特性研究[J]. *机械工程学报*, 2017, 53(7): 94-103.
- GE Yue, NIU Junchuan, LIU Zhihui. On energy transmission characteristics of coupled plates with arbitrary coupling angles to multiple types of excitation[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(7): 94-103.
- [17] 吴锦武, 原海朋. 铺设角度对层合板结构声功率的影响分析[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(19): 73-80.
- WU Jinwu, YUAN Haipeng. Influence of laying angle on acoustic radiation power of laminated composite plates[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(19): 73-80.
-
- 作者简介: 孔德瑜, 男, 1997 年出生。主要研究方向为振动与噪声控制。
E-mail: 1006583275@qq.com
王刚(通信作者), 男, 1987 年出生, 博士, 副教授, 硕士研究生导师。
主要研究方向为振动与噪声控制。
E-mail: wanggang81@suda.edu.cn
倪俊芳, 男, 1968 年出生, 博士, 教授, 硕士研究生导师, 主要研究方向为计算机纺织装备与自动化系统。
E-mail: jfni9999@sina.com