DOI: 10.3901/JME.2021.21.106

受多点横向非定常约束梁的稳态与瞬态响应*

丁维高¹ 魏巍¹ 郭悦² 谢进¹

(1. 西南交通大学机械工程学院 成都 610031;
2. 新加坡国立大学理学院 新加坡 117543 新加坡)

摘要: 研究受有多点横向非定常约束梁的动态响应问题。利用横向非定常约束为周期函数梁的微分代数方程的线性特点, 确定出多基频周期性非定常约束激励下梁稳态响应的解析解; 利用截断模态的微分代数方程确定出受有横向非定常约束梁的瞬态响应。为此, 首先利用无阻尼截断模态微分代数方程的齐次形式, 将欧拉-伯努利梁的等效多跨梁模态表示为简单边界条件下模态函数的线性组合, 再利用得到的模态函数与位移影响函数重新将微分代数方程表示为常微分方程的形式, 进而得到横向非定常约束作用下梁的瞬态响应解的积分形式。在此过程中, 研究了微分代数方程齐次式的特征值及其数量、求解方法等相关问题。通过单点多频率的横向非定常约束作用的梁及多点单频横向非定常约束作用梁的算例, 重点分析了非定常约束位置与基频对梁稳态响应的影响。结果表明: 在欠阻尼下, 两种梁模态响应的极大值均在等效多跨梁的各个主频附近; 单点横向非定常约束作用响应极小值在简单边界条件梁的各个主频附近, 而多点横向非定常约束作用梁响应极小值的分布比较复杂。算例也说明了所提出的方法是正确、有效的。

关键词: 非定常约束; 欧拉-伯努利梁; 稳态响应; 微分代数方程; 瞬态响应

中图分类号: TB123

On the Steady and Transient Responses of the Beam with Many Transverse Rheonomic Restraints

DING Weigao¹ WEI Wei¹ GUO Yue² XIE Jin¹

(1. School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031;
2. School of Science, National University of Singapore, Singapore 117543, Singapore)

Abstract: The steady and transient responses of the beam with more than one transverse rheonomic restraints are studied. By virtue of linear characteristic of the differential algebraic equations under the periodical transverse rheonomic restraints, the analytical solution for steady responses of the beam is derived. And for transient responses, truncated modes of the differential algebraic equations are utilized. For this purpose, based on the homogeneous differential algebraic equations without damping, the mode of the equivalent multi span beam is expressed as a linear combination of modal functions of a Euler-Bernoulli beam with simple boundary conditions, and further, an integral form, a vital part in determining the transient responses, is obtained. The eigenvalues of homogeneous differential algebraic equations and its total number, the method to find them are addressed. Finally, two examples, one beam with a rheonomic restraint but multi frequencies, and the other one with many rheonomic restraints but sole frequency, are presented to show the impact of location and frequencies of rheonomic restraint on the responses of the beams. It is shown that the maximum values of the mode response, in both cases, occur near each natural frequency of the equivalent multi span beam. But the minimum values of the mode response with a rheonomic restraint occur near each natural frequency, whereas distribution of minimum values for that with many rheonomic restraints is much more complicated. The two examples also demonstrate that the proposed approaches are useful and effective.

Key words: rheonomic restraint; Euler-Bernoulli beam; steady response; differential algebraic equation; transient responses

* 国家自然科学基金资助项目(51575457)。20201110 收到初稿, 20210327 收到修改稿

0 前言

非定常约束(rheonomic restraint, RR)是指约束中显含时间 t 的几何约束, 反之为定常约束^[1]。作为机械振动的经典研究内容, 受定常约束梁已经被大量的研究了。定常约束包括铰支、固支、自由等简单的边界条件^[2-5], 也包括如多跨梁边界^[6-7]、弹性支撑边界^[8-10]等较为复杂的边界条件。

而目前对非定常约束梁的研究大多集中于梁的轴向或旋转非定常边界问题上。文献[11]考虑了非线性效应, 研究了梁一端受轴向的展开或缩回 RR 下的纵向和横向振动; 文献[12]研究了梁一端受匀速伸展 RR 时, 自由端处和与稳定性问题; 文献[13]对功能梯度梁一端受到旋转 RR 时的自由振动特性进行了分析; 文献[14]建立了太阳能帆板受卫星的旋转 RR 下考虑动力刚化的动力学模型; 文献[15]讨论了受轴向加速 RR Timoshenko 梁在谐波激励下横向振动的非线性动力学行为; 文献[16]研究了受轴向 RR 的正交各向异性叠层板研究在随从力激励下的亚谐波共振问题。

然而, 在工程实际中存在许多梁受有横向非定常约束(Transverse rheonomic restraint, TRR)的工况, 如梁式俘能器被基础激励作用^[17], 轨道梁被转辙机作用^[18-19], 柔顺机构被伺服系统作用^[20]等。

在经典振动力学中, 当 TRR 作用于梁的端点时, 可以视为“承受支撑运动梁”问题^[21]。位移影响函数法是这类问题的经典解法, ERTURK^[22]将位移影响函数法用于梁式压电俘能器的建模, 所得到的结果与实验结果很好地吻合。另外, 通过控制偏微分方程的边界条件, 也能对这类问题进行求解。文献[23]研究了一端被 TRR 作用的梁在附加线性阻尼后波在梁内的传递问题。

由于经典解法较难用于 TRR 作用于梁上非端点时的求解, 文献[24]使用第一类拉格朗日方程研究了单个 TRR 作用于梁上任意一点的动态响应。但是, 对于在多点受有 TRR 作用的梁动态响应问题仍有待进一步的研究。工程中对于多点受有 TRR 作用的梁分析的目的也有所不同: 比如对于压电俘能器之类的分析和设计问题, 需要得到在周期性 TRR 作用较长时间后梁的稳态响应; 而对于转辙机推动钢轨、地震时桥梁被地基所推动之类的问题, 需要得到 TRR 作用后的短时间内梁的瞬态响应。

为求解梁受多点 TRR 作用的响应问题, 首先利用第一类拉格朗日方程建立了线性欧拉-伯努利梁的动力学方程; 并对周期性 TRR 作用梁使用每一基

频展开, 确定出梁响应的稳态解析解; 之后利用无阻尼截断模态齐次微分代数(Differential algebraic equations, DAE)问题的解法, 确定出梁瞬态响应的积分形式。最后, 结合算例, 说明了所提出梁的动态响应的稳态解、瞬态解的求解过程, 并对 TRR 的作用位置对梁稳态响应的影响进行了讨论。

1 受多点非定常约束梁动力学模型

设梁的长度为 l , 在梁的端点处受有定常约束, 定常约束为固支、铰支, 或者为自由边界。同时, 在梁的长度 $a_i l$ ($0 \leq a_i \leq 1, i=1 \sim n$) 处的 n 个位置, 受有 TRR, 即在那些位置处的横向位移是已知的随时间变化的函数, 其中 a_i 为作用位置系数如图 1 所示。

图 1 受有 n 个 TRR 作用梁的物理模型

设梁的横向位移为 $w(x, t)$, n 个 TRR 可以用代数方程表示

$$S_i(t) = w(a_i l, t) - P_i(t) = 0 (i=1 \sim n) \quad (1)$$

假设给定的位移函数绝对值的数值与 l 相比较小, 则可以忽略梁的非线性动力学特性。设 ρ 为梁密度, A 为梁截面面积, 则单位长度梁的质量为 $m = \rho A$ 。使用欧拉-伯努利梁假设, 得到梁的动力学方程为

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_A \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I_A c_s \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + c_a \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

式中, E 为弹性模量; I_A 为极惯性矩; c_s 为线性材料阻尼系数; c_a 为空气阻尼系数。

设仅考虑定常约束时梁的归一化模态函数为 $\phi_r(x) (r=1 \sim \infty)$, 第 r 阶模态坐标响应为 $q_r(t)$, 则 n 个 TRR 可以用模态坐标表示为

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(a_i l) q_j(t) - P_i(t) = 0 (i=1 \sim n) \quad (3)$$

梁的势能 U 与动能 T 可以分别表示为

$$U = \frac{EI_A}{2} \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} [\phi_i''(x) q_i(t)]^2 dx \quad (4)$$

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} [\phi_i(x) \dot{q}_i(t)]^2 dx \quad (5)$$

阻尼力的虚功可以表示为

$$\delta Q = -I_A c_s \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{q}_i(t) \delta w'' dx - \int_0^l c_a \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{q}_i(t) \delta w dx \quad (6)$$

根据第一类拉格朗日方程, 引入 n 个拉格朗日乘子 $\kappa_i(t) \sim \kappa_n(t)$, 有

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'} - \frac{\partial L}{\partial q} = F + \sum_{i=1}^n \kappa_i \frac{\partial S}{\partial q} \\ S_i(q, t) = 0 (i=1 \sim n) \end{cases} \quad (7)$$

便可得到梁的动力学方程为

$$\begin{cases} q_r''(t) + 2\zeta_r \omega_r q_r'(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \sum_{i=1}^n \kappa_i(t) \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \\ \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_1 l) q_r(t) - P_1(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_n l) q_r(t) - P_n(t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

式中, ω_r 为第 r 阶无阻尼固有频率; ζ_r 为第 r 阶模态阻尼比; 其表达式为

$$\omega_r = \frac{\lambda_r^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_A}{m}} \quad \zeta_r = \frac{c_s \omega_r}{2E} + \frac{c_a}{2m\omega_r}$$

2 周期性横向非定常约束下的稳态解

本节研究当 TRR 为周期性函数时, 梁的稳态响应。由于 TRR 具有周期性, 并考虑到 TRR 的周期和频率不尽相同, 将式(8)展开为三角级数的形式, 通过比较不同频率下方程中各个项的系数, 便可以得到稳态响应表达式。

假设第 h 个 TRR 函数可展开为 o 个谐波函数之和。以 I 表示单位虚数, 该 TRR 约束函数复数形式为

$$P_h(t) = f_{h1} \exp(I\varpi_{h1}t) + \dots + f_{ho} \exp(I\varpi_{ho}t) \quad (9)$$

其中第 k 个频率函数幅值为 f_{hk} 。将其代入动力学方程式(8)中得到

$$\begin{cases} q_r''(t) + 2\zeta_r \omega_r q_r'(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \sum_{i=1}^n \kappa_i(t) \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \\ (r=1, 2, \dots, \infty) \\ \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_1 l) q_r(t) = f_{11} \exp(I\varpi_{11}t) + \dots + f_{1o} \exp(I\varpi_{1o}t) \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_n l) q_r(t) = f_{n1} \exp(I\varpi_{n1}t) + \dots + f_{no} \exp(I\varpi_{no}t) \end{cases} \quad (10)$$

有 n 个 TRR 作用, 则共有 $n \times o$ 个激励频率。假设第 r 阶模态坐标的形式为

$$q_r(t) = \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n H_{jkr} \exp(I\varpi_{jk}t) \quad (11)$$

第 i 个拉格朗日乘子的形式为

$$\kappa_i(t) = \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n \kappa_{ijk} \exp(I\varpi_{jk}t) \quad (12)$$

将式(11)与式(12)代入式(10)中的微分方程部分得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n (2\zeta_r \omega_r I\varpi_{jk} - \varpi_{jk}^2 + \omega_r^2) H_{jkr} \exp(I\varpi_{jk}t) = \\ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n \kappa_{ijk} \exp(I\varpi_{jk}t) \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)等式两侧都包含对 k 、 j 的求和, 则

$$\begin{aligned} (2\zeta_r \omega_r I\varpi_{jk} - \varpi_{jk}^2 + \omega_r^2) H_{jkr} \exp(I\varpi_{jk}t) = \\ \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \exp(I\varpi_{jk}t) \end{aligned} \quad (14)$$

比较式(14)中 $\exp(I\varpi_{jk}t)$ 的系数, 得到

$$(2\zeta_r \omega_r I\varpi_{jk} - \varpi_{jk}^2 + \omega_r^2) H_{jkr} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \quad (15)$$

令

$$\Omega_{jk}^{ik_r} = (\omega_r^2 - \varpi_{jk}^2 + 2\zeta_r \omega_r I\varpi_{jk})^{-1} \quad (16)$$

从而根据式(15)得到

$$H_{jkr} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \Omega_{jk}^{ik_r} \quad (17)$$

将其代入式(11)中有

$$q_r(t) = \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \Omega_{jk}^{ik_r} \exp(I\varpi_{jk}t) \quad (18)$$

再将式(18)代入式(10)中的 n 个代数方程, 其中第 h 个方程为

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_h l) \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \Omega_{jk}^{ik_r} \exp(I\varpi_{jk}t) = \\ \sum_{k=1}^o f_{hk} \exp(I\varpi_{hk}t) \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)两侧都对 k 求和, 那么

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_h l) \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \Omega_{jk}^{ik_r} \exp(I\varpi_{jk}t) = \\ f_{hk} \exp(I\varpi_{hk}t) \end{aligned} \quad (20)$$

比较式(20)中 $\exp(I\varpi_{hk}t)$ 系数, 得到

$$\sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_h l) \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \kappa_{ijk} \Omega_{jk}^{ik_r} = f_{hk} \delta_{jh} \quad (21)$$

式中, δ_{jh} 为克洛内克尔符号。令

$$b_{hijk} = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(a_h l) \frac{\phi_r(a_i l)}{m} \Omega_r^{jk} \quad (22)$$

则式(21)可以表示为

$$\sum_{i=1}^n \kappa_{ijk} b_{hijk} = f_{hk} \delta_{jh} \quad (23)$$

观察式(23)的下角标可知, 式(23)实际上是 $n \times o$ 个独立的 n 阶线性方程组, 令

$$\mathbf{B}^{jk} = \begin{pmatrix} b_{11jk} & \cdots & b_{1njk} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1jk} & \cdots & b_{nnjk} \end{pmatrix} \quad (24a)$$

$$(\boldsymbol{\kappa}^{jk})^T = (\kappa_{1jk}, \kappa_{2jk}, \dots, \kappa_{njk}) \quad (24b)$$

$$(\mathbf{F}^{jk})^T = f_{jk} (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}) \quad (24c)$$

式(23)可以表示为

$$\mathbf{B}^{jk} \boldsymbol{\kappa}^{jk} = \mathbf{F}^{jk} \quad (25)$$

记 $\mathbf{B}^{jk}$ 中的元素 b_{hijk} 的代数余子式为 B_{jk}^{hi} , 将式(25)两侧乘以 $\mathbf{B}^{jk}$ 的逆得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^{jk} &= (\mathbf{B}^{jk})^{-1} \mathbf{F}^{jk} = \frac{(\mathbf{B}^{jk})^*}{|\mathbf{B}^{jk}|} \mathbf{F}^{jk} = \\ &= \frac{f_{jk}}{|\mathbf{B}^{jk}|} \begin{pmatrix} B_{jk}^{11} & \cdots & B_{jk}^{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{jk}^{1n} & \cdots & B_{jk}^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix} = \\ &= f_{jk} \left(\frac{B_{jk}^{j1}}{|\mathbf{B}^{jk}|}, \frac{B_{jk}^{j2}}{|\mathbf{B}^{jk}|}, \dots, \frac{B_{jk}^{jn}}{|\mathbf{B}^{jk}|} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

因此得到各拉格朗日乘子每个频率的幅值为

$$\kappa_{ijk} = f_{jk} \frac{B_{jk}^{ji}}{|\mathbf{B}^{jk}|} \quad (27)$$

代入式(17)中得到模态坐标各频率幅值

$$H_{jkr} = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} f_{jk} \frac{B_{jk}^{ji}}{|\mathbf{B}^{jk}|} \Omega_r^{jk} \quad (28)$$

代入式(18)中得到第 r 阶模态坐标响应

$$q_r(t) = \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l)}{m} f_{jk} \frac{B_{jk}^{ji}}{|\mathbf{B}^{jk}|} \Omega_r^{jk} \exp(I \varpi_{jk} t) \quad (29)$$

梁的稳态响应则为

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^o \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\phi_r(a_i l) \phi_r(x)}{m} f_{jk} \frac{B_{jk}^{ji}}{|\mathbf{B}^{jk}|} \Omega_r^{jk} \exp(I \varpi_{jk} t) \quad (30)$$

由以上的分析可见, 本节的研究的关键在于

TRR 为周期性函数, 式(8)的微分方程与代数方程均为线性方程。

3 瞬态响应解

本节研究 TRR 作用下梁的瞬态响应, 横向非定常约束的数目仍然为任意整数 n , 但不限定 TRR 为周期性函数。

由于式(8)为无穷阶 DAE, 而且若采用复模态法等通常的多自由度振动系统分析所常用的方法, 坐标变换后约束将被限定为 0, 得到的解与实际横向位移相差了一个位移影响函数。

本节将只考虑式(8)的截断模态 DAE 瞬态的求解问题。为此, 首先需要研究式(8)截断模态无阻尼齐次形式, 确定其特征值以及特征向量, 然后, 利用特征向量将截断模态 DAE 解耦, 进而求得截断模态 DAE 的瞬态响应。

3.1 截断模态无阻尼齐次方程的特征方程及其性质

设式(8)中的所有的外界激励均为 0, 并去除掉其阻尼项, 以 μ 表示模态截断阶数, $\mu > n$, 则式(8)的截断模态无阻尼齐次方程的形式为

$$\begin{cases} q_r''(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \sum_{i=1}^n \kappa_i(t) \frac{\phi_r(a_i l)}{m} (r=1, 2, \dots, \mu) \\ \sum_{r=1}^{\mu} \phi_r(a_1 l) q_r(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{r=1}^{\mu} \phi_r(a_n l) q_r(t) = 0 \end{cases} \quad (31)$$

式(31)是多跨梁方程的拉格朗日乘子形式^[27-29]。针对研究中 TRR 的数目 n 为任意的特点, 现提出一种无需先行降阶的分析方法。

假设 $q_r(t) = H_r \exp(I \omega t)$, $\kappa_i(t) = K_i \exp(I \omega t)$, 并代入式(31)中, 比较系数后得到

$$\begin{pmatrix} \omega & -\Phi^T \\ \Phi & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{K} \end{pmatrix} = \mathbf{O} \quad (32)$$

$$\{\mathbf{H}, \mathbf{K}\} = \{(H_1, \dots, H_{\mu})^T, (K_1, \dots, K_n)^T\}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \omega_{\mu}^2 - \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(a_1 l) & \cdots & \phi_{\mu}(a_1 l) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(a_n l) & \cdots & \phi_{\mu}(a_n l) \end{pmatrix}$$

为使 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{K}$ 中元素不全为 0, 系数矩阵行列式

需要满足

$$\begin{vmatrix} \omega & -\Phi^T \\ \Phi & \mathbf{O} \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

式(33)包含了反映梁几何属性和质量属性的项。考虑更一般的情形,根据 ω_r 的表达式,假设 $\omega^2 = EI_A / ml^4 \tau^4$, 令

$$\tau = \omega \frac{ml^4}{EI} = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 - \tau^4 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_\mu^4 - \tau^4 \end{pmatrix} \quad (34)$$

为消去式中所包含的梁的几何属性及质量属性项,将式(32)中系数矩阵的第 1 至第 μ 列乘以 ml^4 / EI_A ,再将其第 $\mu+1$ 至第 $\mu+n$ 行乘以 EI_A / ml^4 。令 $y = \tau^4$,由式(33)得到关于 y 的方程

$$\Delta(y) \equiv \begin{vmatrix} \omega & -\Phi^T \\ \Phi & \mathbf{O} \end{vmatrix} \left(\frac{EI}{ml^4} \right)^{n-\mu} = \begin{vmatrix} \tau & -\Phi^T \\ \Phi & \mathbf{O} \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

式(35)给出了简单边界条件下的模态函数和特征值与附加约束后梁的各阶特征值的关系。

在实际计算中,如果截断模态阶数 μ 的取值太大,则会导致计算复杂性及难度提高;如果截断模态的阶数 μ 的取值过小,则会降低计算的准确性。截断模态阶数 μ 、TRR 数量 n 、特征值数量之间的关系涉及后续计算自由度的数量。显然,每增加一个约束便会减少一个自由度。进而可以推知:利用式(35)所确定的 y 的数量最多为 $\mu - n$ 个。

下面给出这一结论的证明。

设 $p_1, p_2 \dots p_{\mu+n}$ 为自然数 $1 \sim \mu+n$ 的一个排列。根据行列式的定义

$$\Delta(y) = \sum (-1)^v d_{1,p_1} d_{2,p_2} \dots d_{n,p_{\mu+n}} \quad (36)$$

式中, $d_{i,j}$ 为(35)第 i 行第 j 列元素; v 为排列的逆序数。

任取正整数 $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$,由式(35)形式可知,若 $\mu+1 \leq p_{\mu+a} \leq \mu+n$,则 $d_{\mu+b, p_{\mu+a}} = 0$ 。若使 $d_{1,p_1} d_{2,p_2} \dots d_{n,p_{\mu+n}} \neq 0$,对于任意的 $a \in \{1, 2, \dots, n\}$ 一定有 $1 \leq p_{\mu+a} \leq \mu$ 。因而在式(36)中被的求和所有项中,任取一个满足 $d_{1,p_1} d_{2,p_2} \dots d_{n,p_{\mu+n}} \neq 0$ 的项,总有且仅有 n 个互异的正整数 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\} (c_i \leq \mu)$ 使该项中所有的 $d_{c_i, p_{c_i}}$ 都满足 $\mu+1 \leq p_{c_i} \leq \mu+n$ 。因而,有且仅有 $\mu - n$ 个互异的正整数 $\{e_1, e_2, \dots, e_{\mu-n}\} (e_i \leq \mu)$ 使该项中的所有 p_{e_i} 满足 $1 \leq p_{e_i} \leq \mu$ 。

由于包含 y 的元素均在行列式(35)的前 μ 行 μ 列中,则式(36)中含有的 y 最高次项为 $\mu - n$ 次。如此可将式(35)视为关于 y 的 $\mu - n$ 次代数方程,因而

y 最多为 $\mu - n$ 个。

3.2 特征方程的解与等效多跨梁模态的正交性

为了避免通过展开行列式求解特征值所带来的计算困难,令 $\tilde{\mathbf{K}}$ 为广义刚度矩阵

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \lambda & -\Phi^T \\ \Phi & \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (37)$$

式中 $\lambda = \text{diag}[\lambda_1^4, \dots, \lambda_\mu^4]$ 。再令 $\tilde{\mathbf{m}}$ 为广义质量矩阵 $\tilde{\mathbf{m}} = \text{diag}[1, \dots, 1, 0, \dots, 0]$,其中元素为“1”的数目为 μ ,“0”的数目为 n ,则式(35)可以转化为广义特征值问题

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x} = y\tilde{\mathbf{m}}\mathbf{x} \quad (38)$$

由式(38),便可以利用迭代法等数值方法求出特征值 y 及特征向量 $\mathbf{x}$ 。与一般多自由度系统的模态不同的是,特征向量不仅包含广义坐标,还包含表示广义力的拉格朗日乘子。考虑第 r 、 s 个特征值和特征向量

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x}_r = y_r \tilde{\mathbf{m}}\mathbf{x}_r \\ \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x}_s = y_s \tilde{\mathbf{m}}\mathbf{x}_s \end{cases} \quad (39)$$

分别左乘 $\mathbf{x}_s^T$ 和 $\mathbf{x}_r^T$ 得到

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s^T \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x}_r = y_r \mathbf{x}_s^T \tilde{\mathbf{m}}\mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_r^T \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{x}_s = y_s \mathbf{x}_r^T \tilde{\mathbf{m}}\mathbf{x}_s \end{cases} \quad (40)$$

两式相减得到

$$(y_s - y_r) \mathbf{x}_s^T \tilde{\mathbf{m}}\mathbf{x}_r = 0 \quad (41)$$

由于 $\tilde{\mathbf{m}}$ 对角线上的第 $\mu+1$ 个到第 $\mu+n$ 个元素为0,因此 $\tilde{\mathbf{m}}$ 是半正定的,因而不能认定 $\mathbf{x}_s$ 与 $\mathbf{x}_r$ 具有正交关系。但展开式(41)后,可以得 $\mathbf{x}$ 的前 μ 个元素 $\mathbf{x}^{(0)} \sim \mathbf{x}^{(\mu)}$ 满足

$$(y_s - y_r) \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{x}_r^{(i)} \mathbf{x}_s^{(i)} = 0 \quad (42)$$

利用特征向量的前 μ 个元素,可将梁的第 i 阶模态函数表示为简单边界条件下模态函数的线性组合

$$\tilde{\phi}_i(x) = \sum_{r=1}^{\mu} \phi_r(x) \mathbf{x}_i^{(r)} \quad (43)$$

由式(43)得到梁简单边界条件下模态函数的线性重新组合,称为“等效多跨梁模态函数”,第 r 、 s 个模态函数在区间 $[0, l]$ 的内积为

$$\langle \tilde{\phi}_r, \tilde{\phi}_s \rangle = \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) \mathbf{x}_r^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) \mathbf{x}_s^{(i)} \right) dx \quad (44)$$

再由简单边界条件下梁模态函数的正交条件,式(44)可以简化为

$$m\langle\tilde{\phi}_r, \tilde{\phi}_s\rangle = \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{x}_r^{(i)} \mathbf{x}_s^{(i)} \quad (45)$$

再由式(42)能够看出, 式(45)恰好是等效多跨梁模态函数的正交条件。由于 μ 可以是大于 n 的任意整数, 尽管取不同的模态截断阶数 μ , 其表达式有所不同, 但却总是正交的。最终可以得到归一化条件为

$$m\langle\tilde{\phi}_r, \tilde{\phi}_s\rangle = \delta_{rs} \quad (46)$$

3.3 特征值的计算及其收敛性分析

由第 3.1 节的分析可知, 至少需要用 $n+r$ 个模态函数来计算特征值数量。本小节讨论问题是使用多少阶模态函数来计算特征值, 才能够得到较为准确结果, 即特征值的收敛性问题。

图 2 所示总长为 l 的简支梁在其 $B(al)$ 处受 TRR 作用, TRR 幅值为 0 时的等效二跨简支梁的示意图。由于 B 处的 TRR 幅值为 0, 则图中使用铰支座来表示。

图2 简支梁受单个0幅值 TRR 的等效二跨梁

取截断模态阶数 $\mu = \{2, 5, 10, 20, 30\}$ 来计算受 0 幅值 TRR 后梁的特征值 τ , 计算结果如图 3 所示。图 3 中虚线表示简支梁原特征值位置, 实线表示不同总模态阶数下得到的特征值, 从下到上依次为 1~9 阶。从图中可以看出当 $\mu=5$ 时, 在 a 的大部分区间里前 2 阶特征值具有较好的收敛性; 当 $\mu=10$ 时, 前 5 阶特征值具有较好的收敛性。由此推知: 使用式(40)来计算特征值, 总模态阶数取值应以欲计算数量的 2 倍以上为宜。从整体来看, 给定一个 a 值后, 随着总模态阶数 μ 的增加, 特征值呈现为收敛的柯西列, 并且越远离固定铰支座 A、C 位置的特征值越容易收敛。换言之, 当 $a \rightarrow 1$ 或 0 时, 为保证准确性则需选取更高的阶数来进行计算。

图3 0幅值 TRR 位置对简支梁各阶特征值影响

取 $\mu=15$, 图 4 给出了 a 从 0 取到 1 时梁的前 2 阶模态振型。

图4 0幅值 TRR 位置不同时简支梁前 2 阶模态振型

图 5 为 $l=1$ 的简支梁受到两个幅值为 0 的 TRR(B、C) 的等效三跨简支梁的示意图。取 $\mu=20$, 当 $a_1=0.2$ 和 $a_1=0.5$ 时, 改变 C 的位置, 得到如图 6 所示的特征值分布图。特征值用黑色实线表示, 从下到上依次为 1~9 阶。虚线表示简支梁原特征值位置, 点画线表示仅包含 B 时的特征值位置。

图5 简支梁受两个 0 幅值 TRR 的等效三跨梁

图6 两个 0 幅值 TRR 位置对简支梁各阶特征值影响

对比图 3、6 可以看出, 梁受 0 幅值 TRR 作用, 第 r 阶特征值会增大, 但不会超过第 $r+1$ 个特征值, 这符合本征频率的 Rayleigh-Courant-Fisher 定理^[32]。而当 0 幅值 TRR 的作用位置恰好在第 r 阶模态振型函数的零点处时, 第 $r-1$ 阶新特征值会与第 r 阶特征值重合。

另外, 还可以看出特征值在空间分布具有一定

的规律性: 随着 0 幅值 TRR 在梁长度方向上的位置不同, 各阶特征值呈现周期性波动。0 幅值 TRR 在模态函数的两个零点之间移动时, 特征值总呈现出先减小再增大的趋势。因此, 如果希望梁受到 TRR 作用后的某阶频率尽可能低或高, 应该让 TRR 远离或接近该阶模态函数 0 点。

图 7 所示为图 5 中的 a_1 分别为 0.2、0.5, a_2 取不同值时梁的一阶模态振型。

图 7 固定 $a_1=0.2, 0.5$, a_2 不同时梁的一阶模态

3.4 特征方程解的有限元验证

为了验证第 3.2 节中提出特征方程解法的正确性, 将求解结果与有限元方法所得到的结果进行对比。

使用的计算软件为 COMsol, 取 $\mu=10$, 得到单个 0 幅值 TRR 作用于简支梁 $0.25l$ 处的前三阶模态振型结果如表 1 所示。

表 1 单个 0 幅值 TRR 作用于简支梁 $0.25l$ 处前三阶模态对比

阶数	振形	
1		有限元方法
		特征方程解
2		有限元方法
		特征方程解
3		有限元方法
		特征方程解

3 个 0 幅值 TRR 作用在 $0.25l$ 、 $0.48l$ 、 $0.7l$ 处的前三阶模态振型结果如表 2 所示。

表 2 3 个 0 幅值 TRR 作用在 $0.25l$ 、 $0.48l$ 、 $0.7l$ 处的前三阶模态对比

阶数	振形	
1		有限元方法
		特征方程解
2		有限元方法
		特征方程解
3		有限元方法
		特征方程解

从表 1 和表 3 可以看出, 所提出的解法得到的等效多跨梁模态与有限元方法的结果基本一致。

为了研究特征方程解与有限元法随求解自由度数的变化所产生的收敛性变化之间的差别, 选取图 2 中 $a=0.25$ 的模型为研究对象, 计算在 $El_A=m$ 时梁的一阶固有频率。有限元法网格划分方式采用了有限元软件的自动划分, 得到的结果如 8 所示, 其中实线表示有限元方法, 虚线表示特征方程解。从图 8 中可以看出, 利用特征方程得到的频率随着自由度数量增加始终比有限元方法得到的频率更接近于收敛值。由此可知在 $a=0.25$ 时为达到同样的频率计算精度, 所提出的解法所需的计算自由度数要小于有限元法。

图 8 简支梁受在 $0.25l$ 处单个 0 幅值 TRR 时, 特征值收敛趋势比较

若将 a 在 0 到 1 之间取不同值进行研究, 可以发现: 仅当 $a \rightarrow 1$ 或 0 时, 有限元法才具有更好收敛性。总体而言, 所提出的特征值解法在一定范围

内达到与有限元法相同的计算精度所需自由度较少。

3.5 瞬态解

由于瞬态解总是依赖于对位移影响函数的计算, 而利用式(43)可以确定出梁的模式, 那么, 可以直接利用位移影响函数法求解出方程的瞬态解。

根据最小势能原理, 位移影响函数 $w_b(x, t)$ 应使如下泛函取极值

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l w_b(x, t)^2 + \sum_{i=1}^n \kappa_i(t) P_i(t) dx \quad (47)$$

如果 TRR 的数量较少, 可以使用材料力学中的挠曲线公式来计算位移影响函数。如果 TRR 的数量较多, 式(47)的极值问题将难以直接求解。此时可以考虑使用大于 n 的有限阶, 如 μ 阶简单边界条件下的模态函数对 $w_b(x, t)$ 进行展开

$$w_b(x, t) = \sum_{r=1}^{\mu} \phi_r(x) q_{br}(t) \quad (48)$$

则求解式(47)的极值问题转变为关于 $q_{b_1}(t) \sim q_{b_\mu}(t)$ 和 $\kappa_1(t) \sim \kappa_n(t)$ 的线性方程组, 进而可求得位移影响函数的表达式。

假设第 r 个等效多跨梁模态对应的模态坐标为 $\tilde{q}_r(t)$, 利用位移影响函数, 梁受 TRR 作用的动力学式(8)可以改写为

$$\ddot{\tilde{q}}_r(t) + 2\tilde{\zeta}_r \tilde{\omega}_r \dot{\tilde{q}}_r(t) + \tilde{\omega}_r^2 \tilde{q}_r(t) = f_r(t) \quad (r=1, 2, \dots, \mu) \quad (49)$$

$$\tilde{\omega}_r = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI_A y_r}{m}} \quad \tilde{\zeta}_r = \frac{c_s \tilde{\omega}_r}{2E} + \frac{c_a}{2m\tilde{\omega}_r}$$

模态力 $f_r(t)$ 的计算式为

$$f_r(t) = - \int_0^l \tilde{\phi}_r(\ddot{w}_b + \frac{\tilde{\omega}_r^2 l^4}{y_r^2} w_b''') dx \quad (50)$$

按照通常的处理方法^[11], 式(50)中已经忽略了阻尼激励项, 从而第 r 个响应可利用杜哈梅积分表示为^[21]

$$\begin{aligned} \tilde{q}_r(t) = & e^{-\tilde{\zeta}_r \tilde{\omega}_r t} [\tilde{q}_r(0) \cos(\tilde{\omega}_{dr} t) + \\ & \frac{\tilde{q}'_r(0) + \tilde{\zeta}_r \tilde{\omega}_r \tilde{q}_r(0)}{\tilde{\omega}_{dr}} \sin(\tilde{\omega}_{dr} t)] + \\ & \int_0^t \frac{f_r(s) e^{-\tilde{\zeta}_r \tilde{\omega}_r (t-s)}}{\tilde{\omega}_{dr}} \sin \tilde{\omega}_{dr} (t-s) ds \end{aligned} \quad (51)$$

式中, $\tilde{\omega}_{dr} = \tilde{\omega}_r \sqrt{1 - \tilde{\zeta}_r^2}$ 。于是, 根据位移影响函数法, 梁的横向瞬时响应可以表示为位移影响函数与等效多跨梁的响应之和

$$w(x, t) = w_b(x, t) + \sum_{r=1}^{\mu} \tilde{q}_r(t) \tilde{\phi}_r(x) \quad (52)$$

4 算例

本节将呈现两个具有代表性的算例: 一个是单点但具有多个频率的 TRR 作用的梁, 另外一个是多点多频 TRR 作用的梁。通过这两个算例, 说明所提出的方法的计算过程, 并着重讨论 TRR 的基频和位置对梁响应的影响。

4.1 算例 1-单点多频算例

图 9 为短臂曲柄滑块机构带动悬臂梁的计算示意图。假设曲柄滑块机构的曲柄 O_1O_2 远小于悬臂梁长度, 不考虑悬臂梁的几何非线性, 由图中可见, 梁上 TRR 作用点到梁的固定端 O_5 的距离为 al ; 梁的参数 $l=1\text{ m}$ 、 $\omega_1=1\text{ rad/s}$, 曲柄滑块机构的 $O_1O_2=0.01\text{ m}$, $O_2O_3=0.1\text{ m}$, O_1O_2 匀速转动, 与水平面的夹角为 ϖt , 当梁处于平衡时曲柄转角为 0, 则滑块 O_3 的运动规律为

$$P(t) = 0.01 \sin \varpi t + \sqrt{0.01^2 - (0.01 \sin \varpi t)^2} - 0.01 \quad (53)$$

图 9 短臂曲柄滑块机构带动悬臂梁

将式(53)进行傅里叶展开, 常数项和超过 3 阶以上的系数非常接近于 0, 则有

$$P(t) \approx 0.01 \sin \varpi t - 0.000251 \cos 2\varpi t - 0.005I \exp(I\varpi t) - 0.000125 \exp(2I\varpi t) + cc \quad (54)$$

4.1.1 梁的稳态响应

根据式(54)确定出梁的参数: $f_1=0.005I$, $f_2=-0.000125$, $\varpi_k=k\varpi$ 。依次代入式(16)、式(22)、式(24a)、最后代入式(30), 得到

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 \frac{f_k \psi_r(x) \psi_r(a)}{b_k} \Omega_r^k \exp(I\varpi_k t) + cc \quad (55)$$

式中, $\psi_r(x)$ 为悬臂梁的模态函数。

$$\begin{aligned} \psi_r(x) = & \cos \lambda_r x - \cosh \lambda_r x + \\ & \frac{\sin \lambda_r - \sinh \lambda_r}{\cos \lambda_r + \cosh \lambda_r} (\sin \lambda_r x - \sinh \lambda_r x) \end{aligned}$$

为便于讨论, 引入阻尼控制因子 ε , 假设第一、

二阶模态阻尼为 $\zeta_1 = 0.01\varepsilon$ 、 $\zeta_2 = 0.010\ 5\varepsilon$ ，其余阶模态阻尼为

$$\zeta_r = \frac{\zeta_2 \lambda_2^2 (\lambda_1^4 - \lambda_r^4) + \zeta_1 \lambda_1^2 (-\lambda_2^4 + \lambda_r^4)}{(\lambda_1^4 - \lambda_2^4) \lambda_r^2} \quad (56)$$

取 $\varepsilon = 2^{-5}$ ，此时前 10 阶模态阻尼都为欠阻尼。图 10 所示为前三阶模态响应幅值在滑块两个频率上的分量与原动件 O_1O_2 的频率及 a 之间的关系的热力图。

图 10 $H_{11} \sim H_{23}$ 与附加约束位置与原动件频率的关系

模态的响应幅值用热力图的颜色表示，白线为响应的峰值，黑线为响应的极小值。水平方向的黑线对应无 TRR 作用梁的各阶主频，竖直方向的黑线对应该阶模态函数的零点。

取 $a=1$ 得到前三阶模态幅频响应曲线，如图 11 所示。从图 11 中可以看出响应峰值与极小值与图 10 中的黑线与白线的对应关系。需要注意的是，第 i 个模态响应热力图中的第 i 阶主频处并无黑线。这说明在此处梁的运动主要由第 i 阶模态响应所确定，同时可以看到与文献[24]相同的峰值线位置随阻尼变化的规律。

图 11 $a=1$ 时 $H_{11} \sim H_{23}$ 的幅频响应

图 12 所示为分别取 $\omega^{1/2}$ 为 4, 10, 16, 22, 28, 34，稳定时梁在原动件两个周期(0~2T)内的时域热力图。从中可以看到滑块的激励在梁上形成了不同的波形，随着频率的增加，波峰与波谷的数量增多。

图 12 $\omega^{1/2}$ 取 4, 10, 16, 22, 28, 34 (rad/s)^{1/2} 时，梁响应的时域热力图($a=1$)

再分别固定 $a=1$ 和 0.5 、 $\omega^{1/2} = 20$ rad/s，将阻尼控制因子 ε 逐渐地从 2^{-5} 增大到 2^0 ，得到不同阻尼下梁响应的时域热力图，如图 13 所示。从图中可见，随着阻尼的增大，梁上波形的波峰与波谷的边界逐渐模糊，由驻波逐渐变为行波与驻波的混合。而当阻尼因子很大时，非定常边界的运动在梁内部逐渐衰减；当 $a=1$ 时 TRR 离固定端的距离大于 $a=0.5$ 时的距离，前者波在梁长度方向上的衰减更明显。

图 13 $a=1$ 、 $\omega^{1/2}$ 取 20、 ε 取 $2^0 \sim 2^{-5}$ 时，梁响应时域热力图

4.1.2 梁的瞬态响应

假设图 9 的机构处于静止状态，在 $t=1$ s 时，原动件 O_1O_2 突然开始旋转。滑块的运动规律可表示为 $P(t) = [0.01 \sin \omega(t-1) - 0.000\ 251 \cos 2\omega(t-1)]G(t-1)$ (57)

式中, G 为 *Heaviside* 函数。

根据悬臂梁的挠度方程, 位移影响函数为

$$w_b(x, t) = \frac{-P(t)}{2a^3} [x^2(x-3a) + (a-x)^3 G(\frac{x}{a}-1)] \quad (58)$$

取 $a=0.9$, 利用式(38)求得广义特征值与特征向量, 进而得到等效多跨梁模态及其频率; 再利用式(49)~(52)即可得到梁的瞬态响应。由于瞬态响应表达式过于冗长, 在此略去。

图 14 所示为 $\varpi = 2 \text{ rad/s}$ 梁末端点的时域响应曲线, 实线为用第 4 节所述方法确定的瞬态曲线, 虚线为用第 3 节所述方法确定的稳态曲线。

从图 14 可以看出, 由于 TRR 的作用, 在机构运动初期, 末端点的瞬态响应曲线在稳态响应曲线附近震荡。经过足够长的时间($t=99.8 \text{ s}$)之后, 收敛于稳态解, 两条响应曲线重合。图 14 也说明了所提出的稳态解和瞬态解的确定方法是有效、一致的。

图 14 $a=0.9$ 、 $\varpi=2 \text{ rad/s}$ 时, 梁末端点稳态与瞬态时域响应曲线比较

4.2 算例 2- 多点单频算例

如图 15 所示, O_4O_5 为柔性梁, 与其固结的“槽型”钢架刚度极大, 柔性梁上 O_3 为固定铰链。转子为原动件, 其上点 O_1 、 O_2 之间的距离远小于梁长度 l 。在转子转动过程中, 梁 O_4O_5 一共受到五个约束作用: 与槽型钢架固结的两端转角保持不变, 此为定常约束; 两端随槽型钢架上下运动, 此为 TRR, 以 $P_1(t)$ 和 $P_3(t)$ 表示; 铰链点 O_3 的约束, 此为定常约束, 在本例中视为 0 幅值 TRR, 以 $P_2(t)$ 表示。

图 15 梁受多点 TRR 约束机构实例

取梁参数 $l=1 \text{ m}$ 、 $\omega_1=1 \text{ rad/s}$ 、 $O_1O_2=0.01 \text{ m}$ 。假设转子匀速转动, 与水平面的夹角为 ϖt , 当梁处于平衡时, 转子转角为 0。从而梁受到的 3 个 TRR 分别为

$$P_1(t)=P_3(t)=0.01\cos\varpi t=0.005\exp(I\varpi t)+cc \quad (59a)$$

$$P_2(t)=0 \quad (59b)$$

定常约束表示为

$$\begin{cases} \phi'(0)=0 & \phi'''(0)=0 \\ \phi'(l)=0 & \phi'''(l)=0 \end{cases} \quad (60)$$

不难求出梁的特征方程

$$\sin(\lambda)\sinh(\lambda)=0 \quad (61)$$

和归一化的模态函数

$$\phi_i(x)=\sqrt{\frac{2}{ml}}[\cos(\frac{\lambda_i}{l}x)+\frac{\sin\lambda_i}{\sinh\lambda_i}\cosh(\frac{\lambda_i}{l}x)] \quad (62)$$

从式(59)可以看出: $a_1=0$, $a_2=a$, $a_3=1$, $f_2=0$, $f_1=f_3=0.005I$, $\varpi_1=\varpi_3=\varpi$ 。依次将这些参数代入式(16)、式(22)、式(24-1)。求出代数余子式后, 再将结果代入式(30)得到

$$w(x, t)=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{j=1}^3\sum_{i=1}^3\frac{\phi_r(a_i l)\phi_r(x)}{m}\frac{B_j^i}{|B_j|}\Omega_r^j\exp(I\varpi_j t)+cc \quad (63)$$

同样引入阻尼控制因子 ε , 假设第二、三阶模态阻尼为 $\zeta_2=0.01\varepsilon$ 、 $\zeta_3=0.0105\varepsilon$ 。用类似 4.1 中式(56)的方法可以算出其余阶阻尼。仍取 $\varepsilon=2^{-5}$, 并取前 10 阶模态进行计算, 由于 O_4 与 O_5 处 TRR 频率相同, 因此两处约束在各个模态上的分量可以直接叠加。

图 16 前两阶模态幅值及分量随 a 与转子频率关系热力图

图 16 所示为前两阶模态响应幅值及其分量与转子的频率及固定铰链点位置 a 之间的关系的热力图。从图 16 可以看出响应的极大值仍然分布在等效多跨梁模态对应的各个主频率附近。与单点 TRR 情

形相比, 每阶模态的响应幅值与其分量的极小值分布之间并没有简单明显的规律。但极小值与响应峰值的交点仍在模态函数的零点处。

由于图 15 梁两端点约束是对称的, 因此第 i 阶模态响应的 H_{1i} 与 H_{3i} 分量热力图是左右对称的。然而与例 4.1 不同的是, O_3 为固定铰链, 其本身并不提供模态振动的分量。如果将 O_3 处铰链替换为一个幅值非 0 的 TRR, 例如使 $f_2 = 0.005I$, 那么 O_3 激励在各个模态的响应分量与频率和位置的关系会如图 17 所示。

图 17 将 O_3 铰链替换为单频 TRR 后, 其激励在前六阶模态上的分量

从图 17 可以看出: 响应极大值的分布规律不变; 尽管仍然有不在原主频处的响应极小值, 但是极小值在原来各个主频附近是有一定的分布的。与单点 TRR 情形不同的是, 水平方向极小值线并不在对应阶模态处消失。

从本例可以看出, 多点 TRR 共同作用时响应极小值的分布规律更为复杂, 需要根据特定的约束形式作不同的分析。

5 结论

(1) 利用第一类拉格朗日方程建立了欧拉-伯努利梁受到多个横向非定常约束(TRR)的动力学方程。利用 TRR 为周期性函数时, 梁的微分方程及代数方程均为线性方程的特点, 确定出了周期性 TRR 作用梁稳态响应的一般形式。

(2) 提出了确定受 TRR 作用梁的瞬态响应的方法。首先利用无阻尼截断模态 DAE 的齐次形式, 将等效多跨梁模态表示为简单边界条件下模态函数的线性组合。之后, 利用得到的模态函数与位移影响函数重新将 DAE 方程表示为 ODE 形式, 便可得到一般 TRR 作用下梁的瞬态响应解的积分形式。其中对特征值与特征向量的求解结果得到了有限元方法

的验证。

(3) 研究表明: 当 TRR 与梁端受到的定常约束之间的距离比较大时, 特征值随求解自由度数的收敛性要优于有限元法; 受单点多频 TRR 作用梁的瞬态解经历了一段时间之后便会达到稳态解, 随着频率的增加, 波峰与波谷的数量增多; 受多点单频 TRR 作用的梁与单点作用梁响应有一定的差别: 两种情况下的极大值均在其等效多跨梁模态对应的各个主频附近取得; 单点作用下响应极小值在简单边界条件下各阶模态对应主频附近, 而多点作用下响应极小值的分布十分复杂, 在特定工况下需做具体分析。

梁在受到任意 TRR 作用下的稳态及瞬态响应规律, 为进一步研究奠定了基础, 也为受有 TRR 作用梁的设计、检测等提供了理论依据。后续研究工作, 一方面, 可以继续探索其他形式非定常约束对梁或板、壳等柔性结构的作用问题; 另一方面, 可将研究成果应用到具体的工程设计问题, 比如新型梁式俘能器的设计等。

参考文献

- [1] 陈滨. 分析动力学[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2012.
CHEN Bin. Analytic dynamics[M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2012.
- [2] CHEN H, GUIRAO J L G, CAO D, et al. Stochastic Euler-Bernoulli beam driven by additive white noise: Global random attractors and global dynamics[J]. Nonlinear Analysis, 2019, 185: 216-246.
- [3] 王淑云, 朱雅娜, 阚君武, 等. 旋磁激励式预弯梁压电俘能器建模仿真与试验[J]. 机械工程学报, 2020, 56(14): 224-230.
WANG Shuyun, ZHU Yana, KAN Junwu, et al. Prebending-cantilever Piezo-harvester excited by rotary magnet[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(14): 224-230.
- [4] JOÃO M D O B, KAREL N, VAN D. Dynamic response of an infinite beam periodically supported by sleepers resting on a regular and infinite lattice: Semi-analytical solution[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 458: 276-302.
- [5] CARRELLA A, BRENNAN M J, WATERS T P. Optimization of a quasi-zero-stiffness isolator[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2007, 21(6): 946-949.
- [6] KIM H K, KIM M S. Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using fourier series[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 245(5): 771-784.

- [7] 王其申, 吴磊, 王大钧. 多跨梁离散系统的频谱和模态的定性性质[J]. 力学学报, 2009, 41(6): 947-952.
WANG Qishen, WU Lei, WANG Dajun. Some qualitative properties of frequency spectrum and modes of difference discrete system of multibearing beam[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2009, 41(6): 947-952.
- [8] ONČEVIĆ G Š, RONČEVIĆ B, SKOBLAR A, et al. Closed form solutions for frequency equation and mode shapes of elastically supported Euler-Bernoulli beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 457: 118-138.
- [9] HERYUDONO A R H, LEE J. Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams with non-ideal clamped boundary conditions by using Padé approximation[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2019, 33(3): 1169-1175.
- [10] 鲍四元, 曹津瑞. 具有任意弹性边界单跨梁结构的振动特性分析[J]. 苏州科技大学学报(自然科学版), 2019, 36(1): 16-20.
BAO Siyuan, CAO Jinrui. Analysis of vibration characteristics of single-span beam structure[J]. Journal of Suzhou University of Science and Technology (Natural Science), 2019, 36(1): 16-20.
- [11] PARK S, HONG H Y, CHUNG J. Vibrations of an axially moving beam with deployment or retraction[J]. Aiaa Journal, 2013, 51(3): 686-696.
- [12] 刘明, 杨晓东, 张伟, 等. 伸展运动悬臂梁的稳定性分析[J]. 振动. 测试与诊断, 2019, 39(1): 102-105+224.
LIU Ming, YANG Xiaodong, ZHANG Wei, et al. The stability analysis of deploying cantilever beam[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2019, 39(1): 102-105+224.
- [13] ZHANG D G, ZHU W D. Free vibration analysis of a rotating hub-functionally graded material beam system with the dynamic stiffening effect[J]. Journal of Sound & Vibration, 2014, 333(5): 1526-1541.
- [14] 方柳, 刘玉亮, 赵桂平. 考虑动力刚化的挠性航天器的动力学建模与分析[J]. 兵器装备工程学报, 2017, 38(9): 67-72.
FANG Liu, LIU Yuliang, ZHAO Guiping. Dynamic modeling and analysis for flexible spacecraft with dynamic stiffening[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2017, 38(9): 67-72.
- [15] CHEN Q Y H D L. Nonlinear dynamics of axially moving viscoelastic Timoshenko beam under parametric and external excitations[J]. Applied mathematics and Mechanics-English Edition, 2015, 36 (8): 971-984.
- [16] 张晓宇, 胡宇达. 随从力作用轴向运动叠层板的亚谐波共振[J]. 工程力学, 2019, 36(12): 15-23.
ZHANG Xiaoyu, HU Yuda. Subharmonic resonance of axially moving laminated plates subjected to follower forces[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(12): 15-23.
- [17] ERTURK A, INMAN D J. Piezoelectric energy harvesting[M]. Sussex: John Wiley & Sons, 2011.
- [18] 赵梦瑶. 基于分布式全电子联锁的智能转辙机研究[D]. 北京: 中国铁道科学研究院, 2018.
ZHAO Mengyao. Research on an intelligent switch machine based on distributed full-electronic interlocking system[D]. Beijing: China Academy of Railway Sciences, 2018.
- [19] 江海洋. 铁路转辙机测试与管理综合系统的研究与开发[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2005.
JIANG Haiyang. Research and development on testing and management system of rail point machine[D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2005.
- [20] HOWELL L. 柔顺机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
HOWELL L. Compliant mechanisms[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007.
- [21] TIMOSHENKO. 工程中的振动问题[M]. 北京: 人民铁道出版社, 1978.
TIMOSHENKO. Vibration problems in engineering[M]. Beijing: People's Railway Press, 1978.
- [22] ERTURK A, INMAN D J. A distributed parameter electromechanical model for cantilevered piezoelectric energy harvesters[J]. Journal of Vibration & Acoustics, 2008, 130(4): 1257-1261.
- [23] CHENG X, BERGMAN L A, MCFARLAND D M, et al. Co-existing complexity-induced traveling wave transmission and vibration localization in Euler-Bernoulli beams[J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 458: 22-43.
- [24] 丁维高, 谢进. 受单点横向非定常约束梁的响应分析[J]. 振动与冲击, 2021, 40(2): 176-184.
DING Weigao, XIE Jin. On the response of a beam with a one-point transverse rheonomic restraint[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(2): 176-184.
- [25] 胡振东, 洪嘉振. 刚柔耦合系统动力学建模及分析[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(10): 1087-1093.
HU Zhendong, HONG Jiazhen. Modeling and analysis of a coupled rigid flexible system[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, 20(10): 1087-1093.
- [26] 郭小炜. 刚柔耦合系统的动力学建模与响应分析[D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
GUO Xiaowei. Dynamic Modeling and dynamic response for the rigid-flexible coupling system[D]. Chongqing: Chongqing University, 2016.
- [27] POSIADA A B. Free vibrations of uniform Timoshenko

- beams with attachments[J]. Journal of Sound & Vibration, 1997, 204(2): 359-369.
- [28] JACQUOT R G, GIBSON J D. The effects of discrete masses and elastic supports on continuous beam natural frequencies[J]. Journal of Sound & Vibration, 1972, 23(2): 237-244.
- [29] PIERRE C, TANG D M, DOWELL E H. Localized vibrations of disordered multispan beams-Theory and experiment[J]. AIAA journal, 1987, 25(9): 1249-1257.
- [30] EDGE B L, MAYER P G, PIERCE G A. An analysis technique for composite structures subject to dynamic loads[J]. Journal of Applied Mechanics, 1971, 38(1): 118.
- [31] DOWELL E H. Free vibrations of an arbitrary structure in terms of component modes[J]. Journal of Applied Mechanics, 1972, 39(3): 727.
- [32] ARNOLD B И. 经典力学的数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- ARNOLD B И. Mathematical methods of classical mechanics[M]. Beijing: Higher education press, 2006.
-
- 作者简介: 丁维高, 男, 1994 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机械非线性动力学。
- E-mail: dingweigaoswjt@163.com
- 谢进(通信作者), 男, 1959 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学、机械非线性动力学。
- E-mail: xj_6302@263.net