DOI: 10.3901/JME.2021.21.078

面对称 Bricard-like 机构的设计与研究*

孙学敏¹ 李锐明² 姚燕安²

(1. 山东管理学院智能工程学院 济南 250357;

2. 北京交通大学机械与电子控制工程学院 北京 100044)

摘要: 由于空间单环机构巧妙的几何约束, Bennett 机构、Bricard 机构等被陆续提出并被广泛研究。将多个反四边形机构通过转动副回环连接, 可以构造一类新型空间机构, 该类机构具有类似空间单环机构的运动特点。提出了一种类似面对称 Bricard 机构的面对称 Bricard-like 机构。该 Bricard-like 机构由两个相同的反四边形单元和一个反平行四边形单元构成。根据反四边形单元的运动特点, 将 Bricard-like 机构简化为变杆长的面对称 Bricard 机构。而后通过分析其等价 6R 机构的 D-H 参数及闭环方程, 得到了该机构的自由度以及运动轨迹。此外, 根据运动轨迹, 分析了该机构的运动特性, 揭示了该机构能够实现内翻运动和外翻运动, 进而实现无限翻转运动。并讨论了该机构的无限翻转的可行性条件, 给出了构造无限翻转机构的约束条件。最后通过制作样机模型, 验证了构造方法的可行性和理论分析的正确性。

关键词: 折展机构; 反四边形; Bricard; 面对称; 运动轨迹

中图分类号: TH112

Design and Research of Plane-symmetric Bricard-like Mechanism

SUN Xuemin¹ LI Ruiming² YAO Yanan²

(1. School of Intelligent Engineering, Shandong Management University, Jinan 250357;

2. School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract: Due to the ingenious geometric constraints of the spatial single-loop mechanism, Bennett mechanism and Bricard mechanism have been proposed and studied extensively. A new type of spatial mechanism can be constructed by connecting multiple anti-quadrilateral mechanisms by using revolute joints, which has the motion characteristics similar to a spatial single-loop mechanism. A spatial plane-symmetric Bricard-like mechanism similar to plane-symmetric Bricard mechanism is proposed. The Bricard-like mechanism is composed of two identical anti-quadrilateral units and one anti-parallelogram unit. According to the movement characteristics of the anti-quadrilateral unit, the Bricard-like mechanism can be simplified as a special spatial plane-symmetric mechanism with variable links' lengths. Then the degree of freedom and kinematic paths are further analyzed through the D-H parameters and the closure equations by considering the simplified spatial 6R mechanism with variable links' lengths. In addition, according to the kinematic paths, the motion mode is analyzed, and it is obtained that the mechanism can realize inward and outward motion, then can realize infinitely turnover. The feasibility conditions of infinitely turnover is analyzed, and the constraint conditions for constructing the infinitely turnover mechanism is obtained. Finally, a plane-symmetric Bricard-like mechanism is fabricated to verify the feasibility of the proposed method and the correctness of analysis.

Key words: deployable mechanism; anti-quadrilateral; Bricard; plane-symmetric; kinematic paths

0 前言

航空航天、军事、医疗等领域飞速发展, 卫星天线、空间站、伪装等均需要折展机构, 而创新折

展机构的机构构型具有基础性, 也很具挑战性, 成为机构学领域的热点方向。空间过约束单环机构在折展机构的构造中起到了重要作用, 最具代表的是 BRICARD^[1-2]提出的六种只有转动副构成的过约束单环 6R 机构, 该机构具有 6 个转动副连接而成, 分别为: 普通线对称、普通面对称、三边形、线对称八面体、面对称八面体、可折叠双八面体 Bricard

* 国家自然科学基金资助项目(51905015)。20201210 收到初稿, 20210402 收到修改稿

机构。基于 Bricard 机构也构造了一些空间过约束 6R 机构, 如: ALTMANN^[3]提出了一类特殊的普通线对称 Bricard 机构——Altmann 机构; WOHLHART^[4]提出了一类可以作为一般化的三边形 Bricard 机构, 并且该过约束 6R 机构具有三个部分对称的对称面; SCHATZ^[5]发现了一类特殊的普通面对称 Bricard 机构——Schatz 机构。

除此之外, 众多学者开展了对 Bricard 机构的运动学分析。DENAVIT 等^[6]提出了利用矩阵法分析 Bricard 机构。BAKER^[7-8]提出了利用闭环方程分析 Bricard 机构, 并根据 Bennett 机构综合出了三种不同的六杆机构和由双可折叠八面体产生的具有倾斜角度的网格。WOHLHART^[9]分析了正交的 Bricard 机构, 得到了两类机构, 其中之一可以由 BAKER^[7-8]的分析得到。CHEN 等^[10-13]提出了一类特殊的线对称-面对称 Bricard 机构和一类在任何位置均具有三个对称面的 threefold-symmetric 机构; 分析了特殊的线对称-面对称 Bricard 机构——two-fold 机构的分岔及其运动轨迹。ZHANG 等^[14-15]提出了一类具有二阶旋转对称的 6R 机构, 分析了可重构的 Bennett plano-spherical 混联机构。KONG^[16-17]提出了单自由度单环过约束 6RMCTs (6R spatial mechanisms for circular translation) 和具有两对转动副交于一点、一对转动副平行的 6R 空间单环过约束机构的构型综合方法。LÓPEZ-CUSTODIO 等^[18-19]分别研究了一类面对称和一类线对称 Bricard 机构。FENG 等^[20]利用 D-H 矩阵法对面对称 Bricard 机构进行了运动学分析, 并给出了闭环方程的显式解。

基于传统 Bricard 机构, 一些组合机构以及折展机构被构造出来。CHAI 等^[21]讨论并分析了一类既是 double-Bennett 混联机构又是空间过约束 6R 机构的变胞可重构机构, 得到了三种不同构型的变胞机构。HUANG 等^[22-23]利用不规则形状的三角棱柱体单元和一类 threefold-symmetric Bricard 机构得到了新的单自由度折展机构, 该机构具有单自由度和大伸缩比。LU 等^[24]提出了一类由可折叠双八面体 Bricard 机构组成的单自由度网。QI 等^[25]提出了一类由几个面对称 Bricard 机构构造的大型折展机构, 并分析了该机构的运动学。WANG 等^[26]基于正交 Bricard 机构和对称的空间组成单元构造了折展多面体机构。LIU 等^[27]提出了一类基于折弯单元的 Bricard-like 机构的构造方法。秦波等^[28]提出一种利用剪式单元可展机构的可展收抛物柱面天线机构。李端玲等^[29]通过对成角杆剪式单元进行分析, 给出了球形多面体的构造方法。杨栋皓等^[30]提出基于两

环连杆的可展机构构型综合。SUN 等^[31]提出了一类由四个反平行四边形单元和四个转动副构成的多模式机构的构造方法并分析了其运动模式。

文献[32]构造了一类 Bricard-like 机构, 该机构是由三个反平行四边形单元组成, 利用反平行四边形单元替换传统 Bricard 机构中相邻的两杆一转动副, 而后用三个转动副连接三个反平行四边形单元构造而成。得到的 Bricard-like 机构能够实现无限翻转运动, 可以看作一类特殊的变杆长空间 6R 机构。但反平行四边形单元还有更一般的反四边形情况, 不同种类、不同尺寸的反四边形单元构造 Bricard-like 机构的条件以及对应的运动特性仍有待进一步探索。

通过对比和分析六种 Bricard 机构的约束条件, 可知只有面对称 Bricard-like 机构和一般化的三边形 Bricard-like 机构能够通过转动副实现回环构造, 本文拟研究另外一类 Bricard-like 机构: 面对称 Bricard-like 机构, 研究其构造、约束、运动条件以及相应特性。通过将其简化为变杆长的面对称 Bricard 机构, 分析了其 D-H 参数及闭环方程, 给出了该机构的自由度以及运动轨迹。根据运动轨迹, 分析了该机构的运动特性, 得到了该机构能够实现内翻运动和外翻运动, 进而实现无限翻转运动。并讨论了该机构的无限翻转的可行性条件, 得到了构造无限翻转机构的约束条件。最后通过制作样机模型, 验证了构造方法的可行性和理论分析的正确性。

1 面对称 Bricard-like 机构的设计

如图 1 所示, 为反四边形单元和反平行四边形单元, 图 1a 中的反四边形单元包括四个连杆(连杆 AB 、 CD 、 AD 和 BC)和四个转动副, 连杆 AB 和 CD 互相交叉, 该机构具有一个自由度且满足 $AD \neq BC$, $AB \neq CD$; 图 1b 中的反平行四边形单元包括四个连杆(连杆 $A'B'$ 、 $C'D'$ 、 $A'D'$ 和 $B'C'$)和四个转动副, 连杆 $A'B'$ 和 $C'D'$ 互相交叉, 该机构具有一个自由度且满足 $A'D' = B'C'$, $A'B' = C'D'$ 。显然, 反平行四边形单元可以看作是反四边形单元的特殊情况。

图 1 反四边形单元和反平行四边形单元

由反四边形单元的运动特征可将该反四边形单元简化为变杆长的两杆一转动副的开链机构。如图 1a 所示, 反四边形单元 $ABCD$ 简化为机构 $P_1P_2P_3$, 其中点 P_1 和 P_3 的位置分别在连杆 AD 和 BC 的中点, 转动副 P_2 的位置为连杆 AB 和 CD 的交点。随着运动的过程, 转动副 P_2 的位置时时发生改变, 但是转动副 P_2 的方向一直垂直于平面 $ABCD$, 直线 AD 和 BC 或者相交或者平行。

利用三个转动副连接三个反四边形单元或反平行四边形单元的 Bricard-like 机构能够简化为相邻轴线互相垂直的 6R 机构(图 2), 也就是转动副 S_i 的轴线与转动副 S_{i+1} 的轴线互相垂直($i=1, 2, \dots, 6$, 且 $S_7=S_1$)。根据该 Bricard-like 机构的 D-H 参数可知: $\alpha_{12} + \alpha_{61} = \alpha_{23} + \alpha_{56} = \alpha_{34} + \alpha_{45} = 2\pi$ (其中 $\alpha_{i(i+1)}$ 是转动副 S_i 的轴线与转动副 S_{i+1} 的轴线的旋转角度)。对比六种 Bricard 机构的约束条件, 显然只有面对称 Bricard 机构和一般化的三边形 Bricard 机构相邻的两杆一转动副能被反四边形单元和反平行四边形单元替换。

图 2 具有三个单元的 Bricard-like 机构

一般化的三边形 Bricard-like 机构^[32]包括三个反平行四边形单元, 具有三个“部分”对称面(图 3d), 然而面对称 Bricard-like 机构需要满足面对称的特点(图 3a), 也就是满足: $a_{12} = a_{61}$, $a_{34} = a_{45}$, $a_{56} = a_{23}$ ($a_{i(i+1)}$ 是转动副 S_i 的轴线与转动副 S_{i+1} 的轴线公垂线的距离)。因此, 面对称 Bricard-like 机构必须包括一个反平行四边形单元(满足 $a_{34} = a_{45}$)且具有两个镜面对称的反四边形单元。

沿着一个反平行四边形单元和两个相同的反四边形单元的末端连杆利用三个转动副将其进行连接, 得到面对称 Bricard-like 机构, 其中两个相同的反四边形单元镜面对称布置, 如图 3b 所示。该机构具有 12 个连杆和 15 个转动副, 同一个反四边形单元的转动副轴线互相平行, 然而与末端连杆的转动副轴线互相垂直。值得注意的是, 如图 3e 所示的具有三个相同反平行四边形单元的三对称 Bricard-like

机构^[32]既是一般化的三边形 Bricard-like 机构的特殊情况, 又是面对称 Bricard-like 机构的特殊情况。面对称 Bricard-like 机构和一般化的三边形 Bricard-like 机构之间的关系如图 3f 所示。

图 3 两类 Bricard-like 机构的关系

2 面对称 Bricard-like 机构的自由度

如图 4 所示, 面对称 Bricard-like 机构可以看作是变杆长的空间面对称 Bricard 机构。图 4a 表示面对称 Bricard-like 机构的简化过程, 图 4b 表示简化的

变杆长面对称空间过约束 6R 机构的瞬时状态。

图 4 面对称 Bricard-like 机构的简化

根据面对称 Bricard-like 机构的运动特点, 在运动过程中, 转动副 S_1 、 S_3 和 S_5 的轴线或者相交于一点或者平行, 转动副 S_2 、 S_4 和 S_6 的轴线也相交于一点或平行。显然可把这 6 个转动副的轴线分为四种情况: ① 转动副 S_1 、 S_3 和 S_5 的轴线相交于一点, 且转动副 S_2 、 S_4 和 S_6 的轴线也相交于一点; ② 轴线 $S_1//S_3//S_5$, 转动副 S_2 、 S_4 和 S_6 的轴线相交于一点; ③ 转动副 S_1 、 S_3 和 S_5 的轴线相交于一点, 轴线 $S_2//S_4//S_6$; ④ 轴线 $S_1//S_3//S_5$ 且轴线 $S_2//S_4//S_6$ 。然而, 根据该机构的运动特点情况④不存在, 情况①可以看作是该机构的一般情况。

如图 5 所示, 点 S 为 AD 和 CB 的交点, 且点 E 、 F 和 S 在同一条直线上。由于单元 $ADEF$ 是反平行四边形, 反四边形单元 $ADCB$ 和 $CBEF$ 镜面对称, 设反四边形单元的杆长、 $\angle DAB$ 、 $\angle FEB$ 、 $\angle FAD$ 和 $\angle FED$ 满足

$$\begin{cases} AB = BE = L_1 & AD = EF = L_2 \\ BC = L_3 & DC = CF = L_4 & AF = DE = L_5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\angle DAB = \theta_{A1} = \angle FEB = \theta_{A3} \quad \angle FED = \angle FAD = \theta_{A2} \quad (2)$$

图 5 面对称 Bricard-like 机构的几何示意图

令平面 $ADEF$ 和 $ADCB$ 的二面角为 β , 建立如图 5 所示的坐标系, 其中点 A 设为坐标原点 $o(x, y, z)$, 转动副 S_3 轴线方向设为 x 轴, 在平面 $ADCB$ 中垂直

于 x 轴的直线设为 y 轴, 根据右手定则可以得到 z 轴。因此, 点 A 、 B 、 D 、 E 、 F 的坐标分别为

$$A(0,0,0), B(L_1 \cos \theta_{A1}, L_1 \sin \theta_{A1}, 0), D(L_2, 0, 0) \quad (3)$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{(L_2 - L_5 \cos \theta_{A2})(L_2^2 - L_5^2)}{(L_2^2 + L_5^2) - 2L_2 L_5 \cos \theta_{A2}}, \\ \frac{L_5(L_2^2 - L_5^2) \sin \theta_{A2}}{(L_2^2 + L_5^2) - 2L_2 L_5 \cos \theta_{A2}} \cos \beta, \\ \frac{L_5(L_2^2 - L_5^2) \sin \theta_{A2}}{(L_2^2 + L_5^2) - 2L_2 L_5 \cos \theta_{A2}} \sin \beta \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$F = (L_5 \cos \theta_{A2}, L_5 \sin \theta_{A2} \cos \beta, L_5 \sin \theta_{A2} \sin \beta) \quad (5)$$

设点 C 的坐标为 $C = (C_x, C_y, 0)$, 根据点 A 、 B 、 D 的坐标可得

$$\begin{cases} C_x = \left(L_2^3 + L_2 L_3^2 - L_2 L_4^2 + L_1(L_1^2 - L_2^2 - L_3^2 + L_4^2) \cos \theta - L_1^2 L_2 \cos 2\theta - \sqrt{T} \right) \div \\ 2(L_1^2 + L_2^2 - 2L_1 L_2 \cos \theta) \\ C_y = \left[\csc \theta (L_1^2 + 2L_2^2 - 2L_3^2 + 2L_4^2 - 4L_1 L_2 \cos \theta + L_1^2 \cos 2\theta) \sin^2 \theta + \right. \\ \left. 2L_1^4 \sin^4 \theta - 2(L_2 - L_1 \cos \theta) \sqrt{T} \right] \div \\ 2L_1(L_1^2 + L_2^2 - 2L_1 L_2 \cos \theta) \end{cases} \quad (6)$$

$$T = -L_1^2(L_1^4 + 4L_1^2 L_2^2 + L_2^4 - 2L_1^2 L_3^2 - 2L_2^2 L_3^2 + L_3^4 - 2L_2^2 L_4^2 - 2L_3^2 L_4^2 + L_4^4 - 4L_1 L_2(L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 - L_4^2) \cos \theta_{A1} + 2L_1^2 L_2^2 \cos 2\theta_{A1}) \sin^2 \theta_{A1} \quad (7)$$

由于点 E 、 F 、 S 在同一条直线上, 所以点 S 的坐标为

$$S = \left(\frac{L_2^2 - L_5^2}{2L_2 - 2L_5 \cos \theta_{A2}}, 0, 0 \right) \quad (8)$$

由于点 B 、 C 、 S 也在同一条直线上, 所以角度 θ_{A2} 关于角度 θ_{A1} 的表达式为

$$\begin{aligned} \cos \theta_{A2} = & - \left[L_1^4 L_2^2 + L_1^2 L_2^4 + L_1^2 L_2^2 L_3^2 - L_1^2 L_2^2 L_4^2 + L_1^4 L_5^2 + L_1^2 L_2^2 L_5^2 + \right. \\ & L_1^2 L_3^2 L_5^2 - L_1^2 L_4^2 L_5^2 - L_1^2 \left(\frac{L_1^2 + L_2^2}{L_3^2 - L_4^2} \right) (L_2^2 + L_5^2) \cos 2\theta_{A1} + \\ & L_1^3 L_2^3 \cos 3\theta_{A1} + L_1^3 L_2^2 L_5^2 \cos 3\theta_{A1} - 4L_1^2 L_2^2 \sqrt{T} - 2L_2^3 \sqrt{T} + \\ & \left. 2L_2 L_5^2 \sqrt{T} - L_1 \cos \theta_{A1} \left(\frac{L_1^2 L_2^3 + L_1^2 L_2^2 L_5^2}{-6L_2^2 \sqrt{T} + 2L_5^2 \sqrt{T}} \right) \right] \div \\ & \left[2L_1 L_5 \left(L_2 \cos \theta (L_1^2 L_2 - 2\sqrt{T}) + L_1 (-L_1^2 L_2 - L_2^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. L_2 L_3^2 + L_2 L_4^2 + L_2 \left(\frac{L_1^2 + L_2^2}{L_3^2 - L_4^2} \right) \cos 2\theta_{A1} - \right. \right. \\ & \left. \left. L_1 L_2^2 \cos 3\theta_{A1} + 2\sqrt{T} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

因此该机构的 D-H 参数如表 1 所示。

表 1 面对称 Bricard-like 机构的 D-H 参数

i	1	2	3	4	5	6
$\alpha_{i(i+1)}$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$	$-\pi/2$	$\pi/2$
R_i	0	0	R_3	0	$-R_3$	0
$a_{i(i+1)}$	m_1	m_2	m_3	m_3	m_2	m_1
θ_i	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_3	θ_2

表 1 可以简化为

$$\begin{cases} \alpha_{12} + \alpha_{61} = \alpha_{23} + \alpha_{56} = \alpha_{34} + \alpha_{45} = 0 \\ R_1 = R_4 = 0, R_2 = -R_6 = 0, R_3 = -R_5 \\ a_{12} = a_{61} = m_1(\theta_{A1}), a_{23} = a_{56} = m_2(\theta_{A1}) \\ a_{34} = a_{45} = m_3(\theta_{A2}) \end{cases} \quad (10)$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \arccos \frac{(-L_2^3 - L_2L_3^2 + L_2L_4^2 + L_1(L_1^2 + 3L_2^2 + L_3^2 - L_4^2)\cos\theta_{A1} - 4L_1^2L_2\cos^2\theta_{A1} + L_1^2L_2\cos 2\theta_{A1} + \sqrt{T})}{2L_3(L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\theta_{A1})} \\ \theta_{A1} \leq \arccos \frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - L_4^2 + 2L_2L_3}{2L_1(L_2 + L_3)} \\ -\arccos \frac{(-L_2^3 - L_2L_3^2 + L_2L_4^2 + L_1(L_1^2 + 3L_2^2 + L_3^2 - L_4^2)\cos\theta_{A1} - 4L_1^2L_2\cos^2\theta_{A1} + L_1^2L_2\cos 2\theta_{A1} + \sqrt{T})}{2L_3(L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\theta_{A1})} \\ \theta_{A1} \geq \arccos \frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - L_4^2 + 2L_2L_3}{2L_1(L_2 + L_3)} \end{cases} \quad (14)$$

$$\theta_4 = \pi - \arccos \frac{(L_2^2 + L_5^2)\cos\theta_{A2} - 2L_2L_5}{(L_2^2 + L_5^2) - 2L_2L_5\cos\theta_{A2}} - \theta_{A2} \quad (15)$$

$$R_3 = \frac{(L_2\cos\theta_{A1}(L_1^2(L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - 2L_1L_2\cos\theta_{A1})\sin^2\theta_{A1} + (-L_2 + L_1\cos\theta_{A1})\sqrt{T}))}{(L_1L_2(L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - 2L_1L_2\cos\theta_{A1})\sin^2\theta_{A1} + (L_1 - L_2\cos\theta_{A1})\sqrt{T})} - \frac{(L_2^2 - L_5^2)\cos\theta_{A2}}{2L_5\cos\theta_{A2} - 2L_2} \quad (16)$$

显然, 满足上述条件的 Bricard-like 机构属于面对称情况, 然而, 传统面对称 Bricard 机构的杆长一直保持不变, 而面对称 Bricard-like 机构的杆长随着输入角度的变化而发生改变。

将公式(9)分别代入式(14)、(15), 得到旋转角度 θ_2 和旋转角度 θ_4 , 根据闭环方程 $[T_{12}][T_{23}][T_{34}] = [T_{16}][T_{65}][T_{54}]$, 得到旋转角度 θ_1 和旋转角度 θ_3 为

$$\cos\theta_3 = \frac{\sin\theta_4}{-\tan\theta_2(1 + \cos\theta_4)} \quad (17)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\tan\theta_2\cos\theta_4 + \cos\theta_3\sin\theta_4}{-\tan\theta_2} \quad (18)$$

值得注意的是, 当输入角度 $\theta_{A1} = \arccos(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - L_4^2 + 2L_2L_3) / (2L_1(L_2 + L_3))$ 时, 根据式(9)可得

$$\cos\theta_{A2} = \frac{L_2}{L_5} \quad (19)$$

此时即为情况②, 也就是轴线 $S_1//S_3//S_5$, 转动副 S_2 、 S_4 和 S_6 的轴线相交于一点。

$$m_1 = \sqrt{T} \left\{ L_2(L_1^2L_2 - 2\sqrt{T})\cos\theta_{A1} + L_1[-L_1^2L_2 - L_2^3 - L_2L_3^2 + L_2L_4^2 + 2\sqrt{T} + L_2(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 - L_4^2)\cos 2\theta_{A1} - L_1L_2^2\cos 3\theta_{A1}] \right\} \csc\theta_{A1} \div 2L_1L_3 \left\{ L_2(L_1^2L_2 + 2\sqrt{T}) \right. \quad (11)$$

$$\left. \cos\theta_{A1} + L_1[-L_1^2L_2 - L_2^3 + L_2L_3^2 - L_2L_4^2 - 2\sqrt{T} + L_2(L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 + L_4^2)\cos 2\theta_{A1} - L_1L_2^2\cos 3\theta_{A1}] \right\} \\ m_2 = [L_2\sin\theta_{A1}(-L_1^2(L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 + L_4^2)\sin^2\theta_{A1} + (L_2 - L_1\cos\theta_{A1})\sqrt{T} + L_1^3L_2\sin\theta_{A1}\sin 2\theta_{A1})] \div \\ [-L_1L_2(L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - 2L_1L_2\cos\theta_{A1})\sin^2\theta_{A1} - (L_1 - L_2\cos\theta_{A1})\sqrt{T}] \quad (12)$$

$$m_3 = \frac{(L_2^2 - L_5^2)\sin\theta_{A2}}{2(L_2\cos\theta_{A2} - L_5)} \quad (13)$$

当旋转角度 θ_1 和旋转角度 θ_3 为 0 时, 即为情况③: 转动副 S_1 、 S_3 和 S_5 的轴线相交于一点, 轴线 $S_2//S_4//S_6$ 。此时, 根据式(17)、(18)可以得到输入角度 θ_{A1} 的最大值和最小值。

根据式(9)、(17)、(18), 可以得到所有的输出变量均可由输入角度 θ_{A1} 表示, 因此, 可知该面对称 Bricard-like 机构的自由度为 1。

3 面对称 Bricard-like 机构的运动轨迹

将角度 θ_{A1} 设为输入变量, 可以得到输出变量 ($m_1, m_2, m_3, \theta_1 - \theta_4, \theta_{A2}$ 和 R_3) 运动轨迹的变化曲线。

设 $L_1 = L_4 = 150.00$ mm, $L_2 = 120.00$ mm, $L_3 = 100.00$ mm, $L_5 = 140.00$ mm, 根据公式(17)、(18)可以得到输入角度 θ_{A1} 的最大值和最小值为: $17.48^\circ \leq \theta_{A1} \leq 109.82^\circ$, 当输入角度 θ_{A1} 取最大值或最小值 ($\theta_{A1} = 17.48^\circ$ 或 $\theta_{A1} = 109.82^\circ$) 时, $\theta_1 = \theta_3 = 0$ 。此时,

两个互为镜面对称的反四边形单元和反平行四边形单元在同一个平面上。根据输入角度 θ_{A1} 的变化, 可得输出变量的运动轨迹如图 6 所示, 其中图 6a 表示 m_1 、 m_2 、 m_3 和 R_3 的长度变化曲线, 图 6b 表示旋转角度 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 和 θ_{A2} 的变化曲线。

图 6 面对称 Bricard-like 机构的运动轨迹

如图 6b 所示, 该面对称 Bricard-like 机构能够实现内翻运动和外翻运动, 当旋转角度 θ_1 和旋转角度 θ_3 均大于等于 0° 且输入角度小于 $\theta_{A1\max}$ 时, 该机构的运动形式称为内翻运动。如表 2 所示, 根据输出变量的运动轨迹可得到四种典型的内翻运动构型。四种内翻运动构型 In-1、In-2、In-3、In-4 分别对应 $\theta_{A1} = 17.48^\circ$ 、 $\theta_{A1} = 30.59^\circ$ 、 $\theta_{A1} = 42.83^\circ$ 、 $\theta_{A1} = 68.88^\circ$, 随着输入角度 θ_{A1} 的增大, In-1 到 In-4 的点 A 和点 C 之间的距离越来越小。

表 2 面对称 Bricard-like 机构的四种内翻运动构型

θ_{A1}	17.48°	30.59°	42.83°	68.88°
内翻运动构型	In-1 	In-2 	In-3 	In-4

当旋转角度 θ_1 和旋转角度 θ_3 均小于等于 0° 且输入角度大于 $\theta_{A1\min}$ 时, 该机构的运动形式称为外翻运动。如表 3 所示, 根据输出变量的运动轨迹可得到四种典型的外翻运动构型。四种外翻运动构型 Out-1、Out-2、Out-3、Out-4 分别对应 $\theta_{A1} = 109.82^\circ$ 、 $\theta_{A1} = 68.88^\circ$ 、 $\theta_{A1} = 42.83^\circ$ 、 $\theta_{A1} = 30.59^\circ$, 随着输入角

度 θ_{A1} 的减小, Out-1 到 Out-4 的点 A 和点 C 之间的距离越来越大。

表 3 面对称 Bricard-like 机构的四种外翻运动构型

θ_{A1}	109.82°	68.88°	42.83°	30.59°
外翻运动构型	Out-1 	Out-2 	Out-3 	Out-4

一个完整的内翻运动和一个完整的外翻运动称为一个翻转运动周期, 经历一个翻转运动周期, 该机构能够运动到初始位置。如图 6 所示, 该机构的一个翻转运动周期可以简化为: In-1~In-2~In-3~In-4~Out-1~Out-2~Out-3~Out-4~In-1。如图 7 所示, 为该机构内翻运动构型和外翻运动构型的三维模型, 根据三维模型可知: 该机构能够折叠成一个平面(运动构型 In-1 和运动构型 Out-1), 展开成一个三棱柱(运动构型 In-3 和运动构型 Out-3), 并且能够实现无限翻转运动。

图 7 面对称 Bricard-like 机构的三维模型

4 无限翻转运动的可行性和包络分析

4.1 无限翻转运动的可行性分析

无限翻转运动是很巧妙的, 但是杆长会影响其翻转效果, 甚至在一些情况下, 该面对称 Bricard-like 机构不能实现无限翻转运动。因此, 下面研究该面对称 Bricard-like 机构能够实现无限翻转运动的约束条件。

为了实现无限翻转运动, 该面对称 Bricard-like 机构需要折叠成一个平面(运动构型 In-1 和运动构型 Out-1)。如图 8a 所示, 当面对称 Bricard-like 机构折叠成一个平面(运动构型 In-1), 由于该机构的对称性, 向量 AD 和向量 FE 夹角必须小于 180° 才能够构造反平行四边形, 因此, 在极限位置时反四边形单元的末端轴线之间的夹角需要大于 90° , 也就

是向量 FE 和向量 BC 之间的夹角大于 90° 。同理, 如图 8b 所示, 即当面对称 Bricard-like 机构折叠成一个平面(运动构型 Out-1)。因此该机构能够实现无限翻转运动, 必须同时满足运动构型 In-1 和运动构型 Out-1 的约束条件。显然, 存在两种情况: ① AD 的长度大于 BC 的长度; ② AD 的长度小于等于 BC 的长度。

图 8 面对称 Bricard-like 机构折叠为一个平面

情况①: 如图 9 所示, 当 AD 的长度大于 BC 的长度时, 即 $l_2 > l_3$ 。

图 9 反四边形单元的两种极限位置

当 CD 和 BC 重合时(图 9a), 此时满足 $l_4 > l_3$ 、 $l_1 > l_2$, 并且由 $\angle ADC > 90^\circ$ 得到

$$(l_4 - l_3)^2 + l_2^2 - l_1^2 < 0 \quad (20)$$

同理, 当 AB 和 BC 重合时(图 9b), 此时满足 $l_4 > l_3$ 、 $l_1 > l_3$, 并且由 $\angle BAD > 90^\circ$ 得到

$$(l_1 - l_3)^2 + l_2^2 - l_4^2 < 0 \quad (21)$$

根据两种极限位置以及公式(20)和公式(21)可知, 当 $l_2 > l_3$ 时, 能够实现无限翻转运动得约束条件为

$$\begin{cases} (l_1 - l_3)^2 + l_2^2 - l_4^2 < 0 \\ (l_4 - l_3)^2 + l_2^2 - l_1^2 < 0 \\ l_1 > l_2 > l_3 \\ l_4 > l_2 > l_3 \end{cases} \quad (22)$$

情况②: 当 AD 的长度小于等于 BC 的长度时, 即 $l_2 \leq l_3$ 时, 同理可得能够实现无限翻转运动得约束条件为

$$\begin{cases} (l_1 - l_2)^2 + l_3^2 - l_4^2 < 0 \\ (l_4 - l_2)^2 + l_3^2 - l_1^2 < 0 \\ l_1 > l_3 \geq l_2 \\ l_4 > l_3 \geq l_2 \end{cases} \quad (23)$$

综上可得, 当面对称 Bricard-like 机构满足公式(22)或者公式(23)时, 该机构能够实现无限翻转运动。

4.2 包络的分析

折展比是衡量一个折展机构的重要指标, 折展比通常是计算最大和最小尺寸的比值, 例如长度、高度和体积。由于面对称 Bricard-like 机构能够被五面体包络并能折叠成一个平面, 因此该机构的最小体积为 0, 其体积的折展比此时接近无穷。下面将对该机构的包络五面体的上下底面面积以及体积进行计算, 以研究折展和变形过程中面积和体积的变化。

图 10 面对称 Bricard-like 机构的包络

如图 10a 所示, 根据输入变量 θ_{A1} 和每个点的坐标, 可得由点 B 、 D 、 F 构成的三角形 BDF 的面积和由点 A 、 C 、 E 构成的三角形 ACE 的面积为

$$S_{\triangle ACE} = \frac{L_{AE}}{4} \sqrt{4L_{AC}^2 - L_{AE}^2} \quad (24)$$

$$S_{\triangle BDF} = \frac{L_{DF}}{4} \sqrt{4L_{BD}^2 - L_{DF}^2} \quad (25)$$

其中, $S_{\triangle BDF}$ 和 $S_{\triangle ACE}$ 分别表示三角形 BDF 和三角形 ACE 的面积, L_{AE} 、 L_{AC} 、 L_{DF} 和 L_{BD} 分别表示线 AE 、 AC 、 DF 和 BD 的长度。

如图 10b 所示, 根据点的坐标, 由点 B 、 D 、 F 、 A 、 C 和 E 组成五面体的体积计算可得

$$\begin{aligned} V_{ABCDE F} = & \frac{1}{12} \left[\sqrt{4L_{AC}^2 L_{CE}^2 L_{BC}^2 - L_{AC}^2 Q_1^2 - L_{CE}^2 Q_2^2 - L_{BC}^2 Q_3^2 + Q_1 Q_2 Q_3} + \right. \\ & \sqrt{4L_{AF}^2 L_{DF}^2 L_{BF}^2 - L_{AF}^2 Q_4^2 - L_{DF}^2 Q_5^2 - L_{BF}^2 Q_6^2 + Q_4 Q_5 Q_6} + \\ & \left. \sqrt{4L_{AF}^2 L_{EF}^2 L_{BF}^2 - L_{AF}^2 Q_7^2 - L_{EF}^2 Q_8^2 - L_{BF}^2 Q_9^2 + Q_7 Q_8 Q_9} \right] \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= L_{CE}^2 + L_{BC}^2 - L_{BE}^2 & Q_2 &= L_{AC}^2 + L_{BC}^2 - L_{AB}^2 \\
Q_3 &= L_{AC}^2 + L_{CE}^2 - L_{AE}^2 & Q_4 &= L_{DF}^2 + L_{BF}^2 - L_{BD}^2 \\
Q_5 &= L_{AF}^2 + L_{BF}^2 - L_{AB}^2 & Q_6 &= L_{AF}^2 + L_{DF}^2 - L_{AD}^2 \\
Q_7 &= L_{EF}^2 + L_{BF}^2 - L_{BE}^2 & Q_8 &= L_{AF}^2 + L_{BF}^2 - L_{AB}^2 \\
Q_9 &= L_{AF}^2 + L_{EF}^2 - L_{AE}^2
\end{aligned}$$

随着输入角度 θ_{A1} 的变化, 三角形 BDF 和 ACE 面积的变化曲线如图 11a 所示, 当 $\theta_{A1}=42.83^\circ$ 时, 两个曲线交于一点, 对应运动构型 In-3 或者运动构型 Out-3; 根据两个三角形面积的变化曲线, 当 $\theta_{A1}=17.48^\circ$ 和 $\theta_{A1}=109.82^\circ$ 时, 对应运动构型 In-1 和运动构型 Out-1 两个极限位置, 此时面积比 $S_{\triangle ACE}/S_{\triangle BDF}$ 分别是 46.80 和 0.02。五面体的体积变化曲线如图 11b 所示, 在两个极限位置($\theta_{A1}=17.48^\circ$ 和 $\theta_{A1}=109.82^\circ$)时, 体积均为 0; 当 $\theta_{A1}=20.01^\circ$ 或 $\theta_{A1}=91.73^\circ$ 时, 最大体积为: $5.0 \times 10^5 \text{ mm}^3$; 当 $\theta_{A1}=42.83^\circ$ 时, 该机构的体积为: $3.9 \times 10^5 \text{ mm}^3$ 。

(a) 三角形 BDF 和 ACE 的面积曲线

(b) 五面体的体积曲线

图 11 面对称 Bricard-like 机构的包络曲线

4.3 样机模型验证

设计和制作面对称 Bricard-like 机构样机模型, 样机参数为 $L_1=L_4=99.00 \text{ mm}$, $L_2=79.20 \text{ mm}$, $L_3=66.00 \text{ mm}$, $L_5=92.40 \text{ mm}$, 此时 $L_2>L_3$, 根据计算可得: $L_1=L_4>L_2>L_3$, $(L_1-L_3)^2+L_2^2-L_4^2=-2439.36<0$, 并且 $(L_4-L_3)^2+L_2^2-L_1^2=-2439.36<0$, 因此满足无限翻转的约束条件公式(22), 能够实现无限翻转运动。如图 12 所示, 为该样机的八种典型运动构型的图片, 包括四种内翻运动构型(构型 In-1~In-4)和四种外翻运动构型(构型 Out-1~Out-4)。通过样机验证得

到: 该机构能够实现内翻运动和外翻运动, 进而实现无限翻转运动, 并且能够折叠成一个平面, 展开成一个三棱柱。

图 12 面对称 Bricard-like 机构的样机模型

5 结论

(1) 构造了由一个反平行四边形单元和两个镜面对称的反四边形单元组成的面对称 Bricard-like 机构。揭示了该面对称 Bricard-like 机构的等效变杆长特性。

(2) 通过分析其等效的变杆长空间 6R 机构, 给出了该机构的自由度和运动轨迹。分析了该机构的运动特性, 验证了该机构能够实现内翻运动和外翻运动, 进而实现无限翻转运动。并讨论了该机构的无限翻转的可行性, 得到了构造无限翻转机构的约束条件。

(3) 设计并制作了面对称 Bricard-like 机构实物样机, 验证了理论分析的正确性。得到的面对称 Bricard-like 机构可以作为基本单元构造多面体折展机构以及网格折展机构, 也可为后续其他单元机构的闭环连接提供参考。

参 考 文 献

- [1] BRICARD R. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé[J]. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1897, 3: 113-148.
BRICARD R. Memoir on the theory of articulated octahedra[J]. Journal of Pure and Applied Mathematics, 1897, 3: 113-148.
- [2] BRICARD R. Leçons de Cinématique, T. II[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1927.
BRICARD R. Kinematics lessons, T. II[M]. Paris: Gauthier-Villars, 1927.
- [3] ALTMANN P G. Communications to Grodzinski, P. and

- M'Ewen, E. Link mechanisms in modern kinematics[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1954, 168(37): 889-896.
- [4] WOHLHART K. A new 6R space mechanism[C]// Proceedings of the seventh world congress on the theory of machines and mechanisms, Sevilla, Spain. 1987: 193-198.
- [5] BRÁT V. A six-link spatial mechanism[J]. Journal of Mechanisms, 1969, 4(4): 325-336.
- [6] HARTENBERG R S, DENAVIT J. A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices[J]. Journal of Applied Mechanics, 1955, 22 (2): 215-221.
- [7] BAKER J E. An analysis of the Bricard linkages[J]. Mechanism and machine Theory, 1980, 15(4): 267-286.
- [8] BAKER J E. On the skew network corresponding to Bricard's doubly collapsible octahedron[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2009, 223(5): 1213-1221.
- [9] WOHLHART K. The two types of the orthogonal Bricard linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 1993, 28 (6): 809-817.
- [10] CHEN Y, YOU Z. A 6R foldable frame and its bifurcations[C]// ASME/IFTOMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms & Robots. IEEE, 2009: 95-103.
- [11] CHEN Y, YOU Z, TARNAI T. Threefold-symmetric Bricard linkages for deployable structures[J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42(8): 2287-2301.
- [12] CHEN Y, YOU Z. Two-fold symmetrical 6R foldable frame and its bifurcations[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(25-26): 4504-4514.
- [13] CHEN Y, CHAI W H. Bifurcation of a special line and plane symmetric Bricard linkage[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4): 515-533.
- [14] ZHANG K, DAI J S. A kirigami-inspired 8R linkage and its evolved overconstrained 6R linkages with the rotational symmetry of order two[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2014, 6(2): 021007.
- [15] ZHANG K, DAI J S. Screw-system-variation enabled reconfiguration of the Bennett plano-spherical hybrid linkage and its evolved parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(6): 062303.
- [16] KONG X. Type synthesis of single-loop overconstrained 6R spatial mechanisms for circular translation[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2014, 6(4): 041016.
- [17] KONG X, HE X, LI D. A double-faced 6R single-loop overconstrained spatial mechanism[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): 031013.
- [18] LÓPEZ-CUSTODIO P C, DAI J S, RICO J M. Branch reconfiguration of Bricard linkages based on toroids intersections : Plane-symmetric case[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): 031002.
- [19] LÓPEZ-CUSTODIO P C, DAI J S, RICO J M. Branch reconfiguration of Bricard linkages based on toroids intersections : Line-symmetric case[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): 031003.
- [20] FENG H, CHEN Y, DAI J S, et al. Kinematic study of the general plane-symmetric Bricard linkage and its bifurcation variations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 116: 89-104.
- [21] CHAI X, DAI J S. Three novel symmetric waldron-bricard metamorphic and reconfigurable mechanisms and their isomerization[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(5): 051011.
- [22] HUANG H, LI B, ZHANG T, et al. Design of large single-mobility surface-deployable mechanism using irregularly shaped triangular prismoid modules[J]. Journal of Mechanical Design, 2019, 141(1): 012301.
- [23] HUANG H, LI B, ZHU J, et al. A new family of Bricard-derived deployable mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016, 8(3): 034503.
- [24] LU S, ZLATANOV D, DING X, et al. A network of type III Bricard linkages[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(1): 011013.
- [25] QI X, HUANG H, MIAO Z, et al. Design and mobility analysis of large deployable mechanisms based on plane-symmetric Bricard linkage[J]. Journal of Mechanical Design, 2017, 139(2): 022302.
- [26] WANG J, KONG X. A novel method for constructing multimode deployable polyhedron mechanisms using symmetric spatial compositional units[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(2): 020907.
- [27] LIU R, LI R, YAO Y. Reconfigurable deployable Bricard-like mechanism with angulated elements[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020: 103917.
- [28] 秦波, 吕胜男, 刘全, 等. 可展收抛物柱面天线机构的设计及分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 100-107.
- QIN Bo, LÜ Shengnan, LIU Quan, et al. Structural design and analysis of a deployable parabolic-cylinder antenna[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 100-107.
- [29] 李端玲, 董凯捷, 刘利捷, 等. 基于正棱锥可展单元的球形雷达校准机构的设计方法及研究[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 123-132.
- LI Duanling, DONG Kaijie, LIU Lijie, et al. Design method and research of spherical radar calibration mechanism based on positive pyramid expandable unit[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 123-132.

- [30] 杨栋皓, 曹文熬, 丁华锋. 基于新型两层两环连杆的一族伞状可展机构的构型综合[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 150-160.
YANG Donghao, CAO Wenao, DING Huafeng. Type synthesis of a family of umbrella-shaped deployable mechanisms based on new two-layer and two-loop linkages[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5): 150-160.
- [31] SUN X, LI R, XUN Z, et al. A multiple-mode mechanism composed of four antiparallelogram units and four revolute joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 155: 104106.
- [32] SUN X, LI R, XUN Z, et al. A new Bricard-like mechanism with anti-parallelogram units[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 147: 103753.
-
- 作者简介: 孙学敏, 女, 1988 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为机构学与机器人学。
E-mail: xmsun@sdmu.edu.cn
- 李锐明(通信作者), 男, 1985 年出生, 博士, 副教授。主要研究方向为机构学与机器人学。
E-mail: lirm@bjtu.edu.cn
- 姚燕安, 男, 1972 年出生, 博士, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机构学与机器人学。
E-mail: yayao@bjtu.edu.cn