DOI: 10.3901/JME.2021.21.022

运载器准三维着陆动力学与极限工况 缓冲性能研究*

岳帅¹ 林轻² 杜忠华¹ 聂宏³ 张明³

- (1. 南京理工大学机械工程学院 南京 210094;
2. 上海宇航系统工程研究所 上海 201109;
3. 南京航空航天大学航空学院 南京 210016)

摘要: 为满足垂直降落重复使用运载器多工况着陆分析时模型精度与求解效率相兼顾的需求, 搭建了对称着陆模式下的准三维动力学模型, 模型中考虑了运载器主体平面运动、足垫空间运动及支柱侧向载荷, 同时基于集中参数法建立了油液缓冲力模型, 并引入了含 Stribeck 效应的滑移-粘滞摩擦力及非线性接触力来构建地面作用力模型。在此基础上, 开发出运载器着陆动力学分析程序, 结合径向基函数代理模型与模拟退火优化方法给出了以着陆倾角、结构过载、缓冲行程、支柱载荷及反弹高度为指标的七种极限着陆工况, 分析了各工况下的缓冲性能及着陆稳定性能, 得到了不同冲击条件对运载器着陆动力学行为的影响规律。研究表明: 在四腿同时触地时运载器过载峰值大, 在 2-2 着陆模式下运载器姿态易倾斜, 在 1-2-1 着陆模式下先触地支腿受载恶劣且主体易反弹。

关键词: 运载器; 着陆动力学; 集中参数法; 缓冲性能

中图分类号: TP271

Analysis of Quasi-three-dimensional Landing Dynamics and Attenuation Performance under Extreme Conditions for Launch Vehicle

YUE Shuai¹ LIN Qing² DU Zhonghua¹ NIE Hong³ ZHANG Ming³

- (1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094;
2. Aerospace System Engineering Shanghai, Shanghai 201109;
3. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract: In order to improve both the accuracy and efficiency of landing dynamic analysis under multiple conditions for vertical landing reusable launch vehicle, a quasi-three-dimensional model under symmetric landing modes is established considering main-body in-plane motion, footpad space motion and strut side load simultaneously. The model also incorporates the hydraulic attenuation force based on lumped parameter method, the slip-static friction force with Stribeck effect, and the nonlinear normal contact force. Based on above model, a landing dynamic analysis program for launch vehicle is developed, and seven extreme landing conditions regarding tilt angle, structural overload, attenuation stroke, strut force and rebound height are obtained by employing both the radial-basis-function surrogate model and the simulated annealing optimization method. The dynamic responses under these conditions are then analyzed, and the influencing rules by landing conditions on dynamic responses are attained. The results show that the structural overload reaches maximum when all struts touchdown simultaneously. Besides, the tilt angle gets maximum under 2-2 landing mode, while the strut load and rebound height reach maximum under 1-2-1 landing mode.

Key words: launch vehicle; landing dynamics; lumped parameter method; attenuation performance

* 中央高校基本科研业务费专项资金(30920021109)、江苏省基础研究计划(BK20200496)、中国博士后科学基金(2020M681615)和江苏省博士后科研资助计划资助项目。20200723 收到初稿, 20210124 收到修改稿

0 前言

随着太空探索(SpaceX)公司猎鹰 9 号火箭和蓝源(Blue Origin)公司新谢帕德号火箭回收试验的相继开展,对垂直起降重复使用运载火箭的研究变成了热点问题^[1]。在运载火箭回收过程中,着陆是最后一步,也是决定回收成功与否的关键所在。由于运载器在着陆瞬时的水平速度、垂直速度、着陆姿态、转动角速度、地面倾角以及摩擦系数等重要参数具有一定的不确定性^[2],因此有必要找出运载器的着陆极限工况,并研究不同极限工况下缓冲器的缓冲性能及运载器的动力学响应。

国内外对运载器或探测器的着陆动力学研究工作中,一部分集中于对称着陆时的二维动力学分析和试验研究^[3-5],二维着陆动力学研究能够在系统自由度较少,运算时间较短的情况下得到系统的极限着陆工况以及动力学响应,但是将主、辅支柱力以及足垫-地面接触力等效到对称平面内的方法较为复杂且相关研究较少,在不能明确等效方法的情况下,二维着陆动力学模型(尤其是支柱侧向载荷等)的计算精度难以保证。另有部分学者对三维着陆动力学进行建模并分析着陆性能^[6-8],然而其中很多研究仍集中于对称着陆工况下^[9-10]。三维着陆动力学模型自由度数较多,模型分析和求解难度相应提高,在多工况系统性分析中将大大增加仿真时间,从而限制了其在着陆极限工况分析与极限工况下缓冲性能分析方面的应用。

出于兼顾模型精度与求解效率的要求,本文建立了对称着陆工况下的运载器准三维着陆冲击动力学模型,考虑了运载器主体的平面运动,足垫的空间运动以及着陆支柱的侧向受载,由此开发出运载器着陆动力学分析程序,随后基于径向基函数代理模型及模拟退火优化方法找出了对称着陆时的极限工况,并分析了不同极限工况下缓冲器的缓冲性能以及运载器的着陆稳定性能,从而为运载器着陆缓冲装置设计提供理论依据和技术支持。

1 运载器准三维着陆动力学模型

1.1 总体方案

如图 1 所示,运载器着陆装置包含有四条支腿,每条支腿由主支柱,辅助外壳以及足垫三部分组成。当运载器即将着陆时,辅助外壳与主体间的锁定装置解锁,主支柱中的多级收放套筒在气压驱动下展

开至全伸长位置,各级收放套筒之间通过内置锁相互锁定,并通过油液缓冲器来吸收着陆冲击能量。

图 1 运载器着陆装置总体方案

1.2 准三维动力学模型分析及基本假设

本文以 2-2 式对称着陆为例说明运载器准三维着陆动力学的建模流程,而由于 1-2-1 着陆模式的动力学建模与之类似,本文中不再赘述。运载器 2-2 对称着陆时的主、俯视图及各着陆支腿编号如图 2 所示。

图 2 2-2 对称着陆时运载器主、俯视图

为了使得模型在反映真实着陆过程的基础上兼顾求解收敛性与快速性,基于图 2,对着陆动力学模型做出如下假设。

(1) 将运载器简化为一个弹性质量以及四个非弹性质量, 其中弹性质量为缓冲器以上部分的质量, 包括运载器主体、四条支腿中的三节收放套筒质量、油液缓冲器活塞杆质量以及辅助外壳质量的 1/2, 四个非弹性质量分别对应四条着陆支腿中的缓冲器外筒质量、足垫质量以及辅助外壳质量的 1/2。

(2) 由于是对称着陆, 弹性质量具有对称面内的三个运动自由度, 包括两个平动、一个转动自由度, 其质量集中于运载器的质心位置。各支腿的非弹性质量具有空间内平动的三个自由度, 不考虑其转动自由度, 其质量分别集中于各个足垫与相应主支柱的接头处。

(3) 辅助外壳等效为轴向具有刚度与阻尼, 横向可传递地面接触力至运载器主体的杆件, 另外, 由于主支柱油液缓冲器起到主要的弹性吸能作用, 因此不考虑多级收放套筒与运载器主体的弹性效应。

(4) 油液缓冲器采用集中参数法建模, 腔体温度在着陆过程中假设恒定, 且单个腔体内的液体压力、密度及等效弹性模量处处相同。同时由于缓冲器着陆过程中仅受轴向力作用, 因此缓冲器摩擦力建模时仅考虑密封装置的摩擦。

为了描述运载器着陆姿态角、地面倾角以及着陆初始速度方向, 模型中引入了惯性坐标系、地面坐标系、机体坐标系以及支柱坐标系, 各坐标系的定义如下。

(1) 惯性坐标系 $O_I-X_IY_IZ_I$: 如图 2 所示, O_IY_I 轴的正方向为竖直向上; O_IX_I 轴及 O_IZ_I 轴在水平面内, 其中 O_IX_I 轴的正方向为水平向右, O_IZ_I 轴由右手螺旋法则确定。

(2) 地面坐标系 $O_G-X_GY_GZ_G$: 原点 O_G 与惯性坐标系相同, O_GY_G 轴的正方向为垂直于地面向上, O_GX_G 轴的正方向为沿地面斜坡指向右, O_GZ_G 轴由右手螺旋法则确定, 地面系与惯性系的夹角为 α 。

(3) 运载器机体坐标系 $O_B-X_BY_BZ_B$: 原点 O_B 在运载器主体质心处, O_BY_B 轴的正方向为运载器主体轴线向上, O_BX_B 轴在对称平面内与 O_BY_B 轴垂直并指向右, O_BZ_B 轴由右手螺旋法则确定。

(4) 支柱坐标系 $O_S-X_SY_SZ_S$: 原点 O_S 与机体坐标系相同, O_SY_S 轴的正方向与 O_BY_B 轴相同, O_SX_S 轴在支柱 1 和 3 所在平面内, 并与 O_SY_S 轴垂直且指向右, O_SZ_S 轴由右手螺旋法则确定, 支柱系与机体系在 XOZ 平面内的夹角为 45° 。

1.2.1 弹性质量动力学模型

在惯性坐标系 $O_I-X_IY_IZ_I$ 下, 弹性质量在 O_IY_I 轴

方向上的动力学方程为

$$m_u \ddot{y}_u = 2F_{h1} \sin \theta_{y11} + 2F_{h3} \sin \theta_{y13} - 2F_{a1} \sin \varphi_{y11} - 2F_{a3} \sin \varphi_{y13} + 2F_{ey11} + 2F_{ey13} - m_u g \quad (1)$$

式中, y_u 为弹性质量在惯性坐标系 O_IY_I 轴方向上的位移, F_{h1} 和 F_{h3} 分别为支柱 1 和 3 的缓冲器轴向力, 以压缩力为正值, 由于支柱 2 和 4 上缓冲器力分别与支柱 1 和 3 相同, 因此支柱 2 和 4 的缓冲力分别由支柱 1 和 3 代替, F_{a1} 和 F_{a3} 分别是辅助支柱 1 和 3 的轴向力, 其以拉伸力为正值, F_{ey11} 和 F_{ey13} 分别是足垫通过辅助支柱 1 和 3 的横向(即支柱坐标系 O_SZ_S 轴方向)传递到运载器主体上的力在 O_IY_I 轴的分量, 它们的正方向与 O_IY_I 轴相同, θ_{y11} 和 θ_{y13} 分别为主支柱 1 和 3 与水平面的夹角, φ_{y11} 和 φ_{y13} 分别为辅助支柱 1 和 3 与水平面的夹角, m_u 为弹性质量, 可表示为 $m_u = \sum_{i=1}^4 (m_{vi} + m_{si} + m_{pi} + m_{ai} / 2)$,

其中, m_v 为运载器主体质量, m_s 为三节收放套筒质量, m_p 为缓冲器活塞杆质量, m_a 为辅助外壳质量。

弹性质量在轴 O_IX_I 方向上的动力学方程为

$$m_u \ddot{x}_u = -2F_{h1} \cos \theta_{y11} \cos \theta_{x11} + 2F_{h3} \cos \theta_{y13} \cos \theta_{x13} + 2F_{a1} \cos \varphi_{y11} \cos \varphi_{x11} - 2F_{a3} \cos \varphi_{y13} \cos \varphi_{x13} + 2F_{ex11} + 2F_{ex13} - m_u g \quad (2)$$

式中, x_u 为弹性质量在惯性坐标系 O_IX_I 轴方向上的位移, F_{ex11} 和 F_{ex13} 分别是足垫通过辅助支柱 1 和 3 的横向(即支柱坐标系 O_SZ_S 轴方向)传递到运载器主体上的力在 O_IX_I 轴的分量, 它们的正方向与 O_IX_I 轴相同, θ_{x11} 和 θ_{x13} 分别为主支柱 1 和 3 缓冲力在水平面的投影与对称面的夹角, φ_{y11} 和 φ_{y13} 分别为辅助支柱 1 和 3 轴向力在水平面的投影与对称面的夹角。

根据动量矩定理, 可得运载器主体绕机体坐标轴 O_BZ_B 的转动动力学方程为

$$I_u \ddot{\psi} = 2F_{h1} L_a \sin \theta_{yB1} \cos \beta - 2F_{h1} L_b \cos \theta_{yB1} \cos \theta_{xB1} - 2F_{h3} L_a \sin \theta_{yB3} \cos \beta + 2F_{h3} L_b \cos \theta_{yB3} \cos \theta_{xB3} - 2F_{a1} L_c \sin \varphi_{yB1} \cos \beta + 2F_{a1} L_d \cos \varphi_{yB1} \cos \varphi_{xB1} + 2F_{a3} L_c \sin \varphi_{yB3} \cos \beta - 2F_{a3} L_d \cos \varphi_{yB3} \cos \varphi_{xB3} + 2F_{eyB1} L_c \cos \beta + 2F_{exB1} L_d - 2F_{eyB3} L_c \cos \beta + 2F_{exB3} L_d \quad (3)$$

式中, I_u 为弹性质量绕 O_BZ_B 轴的转动惯量, θ_{kB} 是主支柱与机体坐标系 X_BZ_B 平面的夹角, θ_{yB} 是主支

柱在机体坐标系 $X_B Z_B$ 平面的投影与对称面的夹角, φ_{xB} 是辅助支柱与机体坐标系 $X_B Z_B$ 平面的夹角, φ_{yB} 是辅助支柱在机体坐标系 $X_B Z_B$ 平面的投影与对称面的夹角, L_a 为主支柱与机体连接点到机体轴线的距离, L_b 为主支柱与机体连接点到机体质心在 $O_B Y_B$ 上的距离, L_c 为辅助支柱与机体连接点到机体轴线的距离, L_d 为辅助支柱与机体连接点到机体质心在 $O_B Y_B$ 上的距离, F_{exB} , F_{eyB} 分别是足垫通过辅助支柱的横向(即支柱坐标系 $O_S Z_S$ 轴方向)传递到运载器主体上的力在 $O_B X_B$ 轴, $O_B Y_B$ 轴的分量, 它们正方向分别与 $O_B X_B$ 轴, $O_B Y_B$ 轴相同, F_{ex1} , F_{ey1} 与 F_{exB} , F_{eyB} 的关系为

$$\begin{bmatrix} F_{ex1} \\ F_{ey1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{exB} \\ F_{eyB} \end{bmatrix} \quad (4)$$

1.2.2 非弹性质量动力学模型

为了减少系统自由度, 在支柱坐标系中建立非弹性质量的动力学方程, 以非弹性质量 1 为例说明建模流程。计及动坐标系旋转产生的科氏加速度与向心加速度, 可将非弹性质量 1 在支柱坐标系下的动力学方程写为

$$\begin{aligned} m_{f1} \ddot{\mathbf{r}}_f &= \mathbf{F}_{\text{sum}} - m_{f1} \dot{\boldsymbol{\omega}}_S \times \mathbf{r}_f - 2m_{f1} \boldsymbol{\omega}_S \times \dot{\mathbf{r}}_f - \\ &\quad m_{f1} \boldsymbol{\omega}_S \times (\boldsymbol{\omega}_S \times \mathbf{r}_f) - m_{f1} \ddot{\mathbf{r}}_S \end{aligned} \quad (5)$$

式中, m_{f1} 是支腿 1 的非弹性质量, $\mathbf{r}_f$ 为足垫 1 在支柱坐标系中的坐标, 即 $[x_{fS1}, y_{fS1}, z_{fS1}]^T$, $\mathbf{r}_S$ 为支柱坐标系原点相对于惯性坐标系原点的坐标, 为 $[x_u, y_u, 0]^T$, $\boldsymbol{\omega}_S$ 为支柱坐标系相对于惯性坐标的旋转角速度, 其表达式为

$$\boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin(\pi/4) & 0 & \dot{\psi} \cos(\pi/4) \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

$\mathbf{F}_{\text{sum}}$ 为所受合外力, 其表达式为

$$\mathbf{F}_{\text{sum}} = \mathbf{T}_{S1} \begin{bmatrix} 0 \\ -m_{f1}g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{cxS1} + F_{h1} \cos \theta_{S1} - F_{a1} \cos \varphi_{S1} \\ F_{cyS1} - F_{h1} \sin \theta_{S1} + F_{a1} \sin \varphi_{S1} \\ F_{czS1} - F_{ezS1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, F_{cxS1} , F_{cyS1} , F_{czS1} 分别是地面-足垫作用力在支柱坐标系 $O_S X_S$ 轴, $O_S Y_S$ 轴和 $O_S Z_S$ 轴的分量, F_{ezS1} 为通过辅助支柱横向传递到运载器机体上的作用力, θ_{S1} 是主支柱 1 与支柱坐标系 $X_S Z_S$ 平面的夹角, φ_{S1} 是辅助支柱 1 与支柱坐标系 $X_S Z_S$ 平面的夹角, 由此可得 m_{f1} 分别在 $O_S X_S$ 轴及 $O_S Y_S$ 轴的动力学方程为

$$\begin{aligned} m_{f1} \ddot{x}_{fS1} &= -m_{f1}g \cos \beta \sin \psi + F_{cxS1} + F_{h1} \cos \theta_{S1} - F_{a1} \cos \varphi_{S1} + \\ &\quad m_{f1} \ddot{\psi} y_{fS1} \cos(\pi/4) + 2m_{f1} \dot{\psi} \dot{y}_{fS1} \cos(\pi/4) + \\ &\quad m_{f1} \dot{\psi}^2 x_{fS1} \cos^2(\pi/4) - m_{f1} \ddot{x}_u \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} m_{f1} \ddot{y}_{fS1} &= -m_{f1}g \cos \psi + F_{cyS1} - F_{h1} \sin \theta_{S1} + F_{a1} \sin \varphi_{S1} - \\ &\quad m_{f1} \ddot{\psi} x_{fS1} \cos(\pi/4) - 2m_{f1} \dot{\psi} \dot{x}_{fS1} \cos(\pi/4) + \\ &\quad m_{f1} \dot{\psi}^2 y_{fS1} - m_{f1} \ddot{y}_u \end{aligned} \quad (9)$$

基于模型假设, m_{f1} 在支柱坐标轴 $O_S Z_S$ 上的位移 z_{fS1} 始终为 0, 根据式(5)中在 $O_S Z_S$ 方向的动力学方程可得关于 F_{ezS1} 表达式为

$$\begin{aligned} F_{ezS1} &= m_{f1}g \sin \psi \sin(\pi/4) + F_{czS1} + \sqrt{2}/2 \cdot m_{f1} \ddot{\psi} y_{fS1} + \\ &\quad \sqrt{2}m_{f1} \dot{\psi} \dot{y}_{fS1} + 1/2 \cdot m_{f1} \dot{\psi}^2 x_{fS1} \end{aligned} \quad (10)$$

将 F_{ezS1} 的表达式通过下式便可转换为弹性质量方程中的向量 $[F_{ex11}, F_{ey11}, F_{ez11}]^T$ 。

$$\begin{bmatrix} F_{ex11} \\ F_{ey11} \\ F_{ez11} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1S} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{ezS1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

1.2.3 运载器运动学模型

由于不计主支柱中收放套筒的结构变形时, 主支柱的压缩量即为缓冲器的压缩量, 则缓冲器的缓冲行程可表示为

$$\begin{aligned} s_m &= L_{m0} - L_m = \\ &\quad L_{m0} - \sqrt{(x_f - x_{m1})^2 + (y_f - y_{m1})^2 + (z_f - z_{m1})^2} \end{aligned} \quad (12)$$

式中, L_{m0} 为缓冲器原长, L_m 为缓冲器实时长度, $[x_f, y_f, z_f]$ 是足垫在惯性坐标系下的坐标值, $[x_{m1}, y_{m1}, z_{m1}]$ 是主支柱与运载器主体连接点在惯性坐标系下的坐标值。将公式(12)对时间求导即可得到缓冲器的运动速度。

如图 2 所示, 主支柱与惯性坐标系 $X_i O Z_i$ 面的夹角 θ_{y1} 可表示为

$$\theta_{y1} = \arcsin \frac{|y_f - y_{m1}|}{\sqrt{(x_f - x_{m1})^2 + (y_f - y_{m1})^2 + (z_f - z_{m1})^2}} \quad (13)$$

主支柱在惯性坐标系 $X_i O Z_i$ 面的投影与对称面的夹角 θ_{x1} 可表示为

$$\theta_{xl} = \arcsin \frac{|z_f - z_{ml}|}{\sqrt{(x_f - x_{ml})^2 + (z_f - z_{ml})^2}} \quad (14)$$

足垫在惯性坐标系下的 Z 坐标值可由 X 坐标值以及 Y 坐标值表示为

$$z_f = z_{fB} = z_{fG} = (x_f - x_u) \cos \psi + (y_f - y_u) \sin \psi \quad (15)$$

式中, z_{fB} 和 z_{fG} 分别为足垫在机体坐标系以及地面坐标系下的 Z 坐标值。将式(15)对时间求导即得到足垫在惯性坐标系 Z 方向的速度。

1.2.4 油液缓冲力模型

油液缓冲器的结构剖视图及其对应的液压系统示意图如图 3 所示。缓冲器主要包括活塞杆, 活塞, 外筒以及密封装置。缓冲器安装在着陆装置的主支柱中, 其中活塞杆与多级收放套筒相固定, 而外筒与辅助外壳通过铰接相连接, 在着陆过程中缓冲器外筒与活塞杆相对压缩与拉伸从而吸收着陆能量。缓冲器采用高压压缩性液体甲基硅油作为工作介质, 其既提供缓冲弹簧力又提供缓冲阻尼力作用。

图 3 油液缓冲器示意图

当活塞杆与外筒在轴向外力 F_h 作用下产生相对位移 s_p 时, 流体流过油孔产生的体积流量为 Q_o 。此流量在缓冲器上、下腔体之间产生压力差 $\Delta P(t)$, 进而产生阻尼力来消耗能量, 同时, 由于活塞两端面积不等, 随着活塞杆向下(上)运动, 上、下两腔的总体积减小(增大)且腔内液体压力升高(降低), 进而使得缓冲器具有弹性力。本文中用符号 ρ , B , μ 分别表示液体的质量, 弹性模量以及动力黏度, 下标 1 和 2 分别用来表示两个腔体。根据以上分析, 采用集中参数法对缓冲器进行建模。

基于质量守恒定理, 得到关于第 i 个腔体中混合液体的关系式为^[11]

$$\frac{dV_i}{dt} + \frac{V_i}{B_i(P_i)} \frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{\rho_i} \left(\sum_{(j)} \dot{m}_{in,j} - \sum_{(k)} \dot{m}_{out,k} \right) \quad (16)$$

式中, V_i 为第 i 个腔体的体积, P_i 为第 i 个腔体的压

力, $B_i(P_i)$ 为在压力 P_i 下第 i 个腔体中混合液体的弹性模量, ρ_i 为第 i 个腔体中混合液体的密度, $\dot{m}_{in,j}$ 和 $\dot{m}_{out,k}$ 分别为腔体中第 j 个入口与第 k 个出口流动混合液体的质量流量。

参照式(16)以及图 3, 可得以下关系式

$$\begin{cases} \dot{V}_1 + V_1 \dot{P}_1 / B_1 = -\dot{m}_{out,1} / \rho_1 \\ \dot{V}_2 + V_2 \dot{P}_2 / B_2 = \dot{m}_{in,2} / \rho_2 \end{cases} \quad (17)$$

根据图 3 可知, 腔体 1 的出口通路即为腔体 2 的入口通路, 基于质量守恒定律可得 $\dot{m}_{in,1}(t) = \dot{m}_{out,2}(t) \equiv \dot{m}_{12}(t)$ 。在腔体 1 和 2 之间流动混合液体的质量流量与体积流量的关系为: $\dot{m}_{12} = \rho_{12} Q_o(\rho_{12}, \mu_{12})$, 式中 ρ_{12} 为流动通道中混合液体的流量, 由于在腔体 1 和 2 之间混合液体的密度具有不连续性, 即 $\rho_1 \neq \rho_2$, 因此 ρ_{12} 定义为 $\rho_{12} \equiv \rho_{avg} = (\rho_1 + \rho_2) / 2$ 。 Q_o 和 μ_{12} 分别为流动通路混合液体的体积流量以及相应的动力黏度。

进而对腔体 1 和 2 中的压力变化可建立如下公式

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \frac{B_1}{V_1} \left(A_{p,1} v_p - \frac{\rho_{avg}}{\rho_1} \cdot Q_o \right) \\ \frac{dP_2}{dt} = \frac{B_2}{V_2} \left(-A_{p,2} v_p + \frac{\rho_{avg}}{\rho_2} \cdot Q_o \right) \end{cases} \quad (18)$$

基于非稳定流伯努利方程^[12], 混合液体流过油孔所产生的压力差 $P_1 - P_2$ 由层流及紊流压差 ΔP_f 和惯性引起的压力差 ΔP_i 组成。其中由层流-紊流所产生的压差 ΔP_f 与流量 Q_o 的关系可表达为

$$\Delta P_f = \frac{8\pi l_h \mu_{avg}}{A_o^2} Q_o + \frac{\rho_{avg}}{2(C_d A_o)^2} Q_o |Q_o| \quad (19)$$

式中, l_h 为油孔的长度, A_o 为油孔面积, C_d 为流量系数, 取为 0.65, $\mu_{avg} \equiv \mu_{12}$ 为流动通路中混合液体的动力黏度, 其定义为两腔混合液体黏度的平均值, 有 $\mu_{avg} = (\mu_1 + \mu_2) / 2$ 。

根据参考文献[12-13], ΔP_i 可理解为将流动通道(油孔)内混合液体进行加速所需要的两端压力差, 此模型可建立为

$$\Delta P_i = I_h \frac{dQ_o}{dt} = \frac{\rho_{avg} l_h}{C_c A_o} \frac{dQ_o}{dt} \quad (20)$$

式中, I_h 为油孔内混合液体的惯性, C_c 为油孔缩流系数, 取为 0.8。

基于式(19)、(20), 可得混合液体流动模型为

$$\frac{dQ_o}{dt} = \frac{1}{I_h} \left(P_1 - P_2 - \frac{8\pi l_h \mu_{avg}}{A_o^2} Q_o - \frac{\rho_{avg}}{2(C_d A_o)^2} Q_o |Q_o| \right) \quad (21)$$

联立式(18)、(21), 可得缓冲器各腔的腔体压力。同时引入文献[14]中的密封装置摩擦力模型, 得到缓冲器轴向力 F_h 的表达式为

$$F_h = A_L P_1 - A_U P_2 + F_{hf} \quad (22)$$

式中, A_L 为下腔体截面积, A_U 为上部环形腔体截面积, F_{hf} 为缓冲器密封装置产生的摩擦力。

1.2.5 地面作用力模型

足垫-地面作用力在地面坐标系下为 $[F_{cxG}, F_{cyG}, F_{czG}]$, 其中法向接触力 F_{cyG} 采用非线性弹簧-阻尼力进行建模, 其可表示为

$$F_{cyG} = \begin{cases} 0 & y_f / x_f \geq \tan \alpha \\ K_g \delta_F^{e_n} + C_{gmax} \text{ramp}(\delta_F) \cdot \dot{\delta}_F & y_f / x_f < \tan \alpha \end{cases} \quad (23)$$

式中, α 为地面倾斜角度, 接触刚度 K_g 与阻尼 C_{gmax} 分别取为 10^5 N/mm 与 $10 \text{ N}\cdot\text{s/mm}$, e_n 为接触指数, 取 1.5, δ_F 和 $\dot{\delta}_F$ 分别为足垫的穿透深度与穿透速度, 它们的表达式为

$$\begin{bmatrix} \delta_F \\ \dot{\delta}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_f & y_f \\ v_{xf} & v_{yf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix} \quad (24)$$

对足垫-地面摩擦力建模时, 考虑滑移与粘滞阶段对摩擦力的影响以及 Stribeck 效应^[15-16]。以 x 方向为例说明摩擦力建模流程, 通过引入额外的摩擦状态变量 s_{rxf} 及其相应的位移阈值 s_{rxf0} , 来判断摩擦力处于何种阶段, 本文中位移阈值 s_{rxf0} 取 0.1 mm 。当 $v_{yfG} s_{rxf} > 0$ 以及 $|s_{rxf}| \geq s_{rxf0}$ 同时成立时, 可认为 x 方向摩擦力处于滑移阶段, 此时 s_{rxf} 满足 $\dot{s}_{rxf} = 0$, 否则 x 方向摩擦力处于粘滞阶段, 且有 $\dot{s}_{rxf} = v_{yfG}$ 。基于以上分析, 可得地面坐标系 x 方向摩擦力为

$$F_{cxG} = \begin{cases} K_{rx} (1 + a_r) s_{rxf} + C_r \dot{s}_{rxf} & |s_{rxf}| < s_{rxf0} \\ K_{rx} (1 + a_r \cdot \exp(-v_{xG} / b_{strib})) \cdot s_{rxf} & |s_{rxf}| \geq s_{rxf0} \end{cases} \quad (25)$$

式中, K_{rx} 为粘滞阶段弹性系数, 其定义为 $K_{rx} = |\mu_{cx} F_{yG}| / s_{rxf0}$, μ_{cx} 为 x 方向的等效摩擦系数, 它根据地面坐标系中 x, z 方向速度的大小来求得

$$\mu_{cx} = \begin{cases} \sqrt{2} / 2 \cdot \mu_c & v_{xG} = 0, v_{zG} = 0 \\ \frac{|v_{xG}|}{\sqrt{v_{xG}^2 + v_{zG}^2}} \cdot \mu_c & \text{其他} \end{cases} \quad (26)$$

式中, μ_c 为足垫-地面的摩擦系数。同理可得 z 方向的摩擦力 F_{czG} 。

2 运载器着陆动力学参数化程序开发

将建立的全机着陆模型与油液缓冲模型、地面接触模型进行耦合, 并运用微分方程求解器对系统着陆动力学瞬态响应进行计算求解。整个运载器着陆动力学模型包含了与机械结构相关的状态变量集 $\mathbf{x}_m$, 与油液缓冲系统相关的状态变量集 $\mathbf{x}_h$ 以及与摩擦力相关的状态变量集 $\mathbf{x}_f$, 系统的动力学方程可总结为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (27)$$

式中, t 为求解时间, 其满足 $t \in [0, t_{max}]$, 状态变量可概括为 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_h, \mathbf{x}_f]$ 。运载器着陆动力学建模流程可总结如图 4 所示。需要说明的是, 图中辅助支柱轴向力的求解基于非线性弹簧-阻尼模型, 模型中的刚度与阻尼系数由辅助外壳承力梁的等效截面尺寸与长度等计算得到, 辅助支柱横向力通过计算地面接触力在支柱横向方向上的分量得来。

图 4 着陆动力学建模流程图

基于上述模型, 编制着陆动力学分析程序。首先根据主、辅支柱力模型编制支腿力子程序, 随后基于足垫-地面接触力模型编制地面接触力子程序, 进而将力学模型与运动学模型分别带入弹性与非弹性质量准三维动力学方程中, 并通过四阶龙格库塔求解器进行求解。本文编制的程序可以得到对称着陆情况下运载器主体、主/辅支柱、足垫的动态行为以及地面接触力等多项响应数据, 还可将分析结果通过动画进行直观展示, 如图 5 所示。同时, 此程序还可对多着陆工况进

行批处理,为运载器极限着陆工况的搜寻与确定奠定了基础。

图 5 运载器对称着陆过程动画

3 极限着陆工况确定与性能分析

3.1 极限工况搜寻策略

搜寻极限工况的流程如图 6 所示,首先采用优化拉丁超立方设计对着陆初始条件组成的参数空间进行抽样,在 2-2 着陆与 1-2-1 着陆模式下各选取 500 个样本点输入给着陆动力学模型,并得到相应的响应值,随后用径向基函数代理模型(RBF)对着陆响应值进行拟合^[17],由于寻找极限工况实质上是一个优化问题,因此在代理模型的基础上,采用模拟退火优化算法(ASA)来搜索各个着陆极限工况,该算法适用于高度非线性系统。

图 6 极限工况搜索流程

径向基函数代理模型的引入可以在保证模型精度的基础上大幅减少寻找极限工况所用时间。为了方便检验径向基模型的质量,引入均方根误差相对值(RMSE)和决定系数 R^2 两个检验标准^[18],它们的表达式为

$$\begin{cases} \text{RMSE} = \frac{1}{m} \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2} \\ R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2} \end{cases} \quad (28)$$

式中, m 为样本点个数; $\hat{y}_i$ 为径向基模型计算值; y_i 为准三维动力学模型计算值; $\bar{y}$ 为动力学模型计算结果的平均值; RMSE 越接近 0 表示径向基模型的误差越小; R^2 越趋近于 1 表明径向基模型与原动力学模型的相似度高,本文将径向基模型收敛条件设置为: $\text{RMSE} < 0.04$ 以及 $R^2 > 0.98$ 。

3.2 极限工况的确定

首先将着陆各初始条件的范围总结如表 1 所示,其中机体倾角与地面倾角都以逆时针方向为正。

表 1 着陆初始条件范围

着陆初始条件	取值范围
竖直着陆速度/(m/s)	正常: 0~1; 故障: 0~2
水平着陆速度/(m/s)	正常: -0.5~0.5; 故障: -1~1
着陆地面倾角/(°)	正常: 0~1; 故障: 0~3
机体倾角/(°)	正常: -2~2; 故障: -5~5
地面动摩擦系数	正常: 0.15~0.45; 故障: 0.15~0.75
着陆模式	2-2 式及 1-2-1 式

每一种着陆极限工况都对应着某个着陆响应的极限边界值,因此根据着陆响应的不同,可将着陆极限工况分为以下七种。

- (1) 工况 A: 运载器主体合加速度最大工况,此工况下机体合加速度最大值表示为 $a_{u\max}$ 。
- (2) 工况 B: 主支柱所受压力最大工况,此工况下主支柱最大压力表示为 $F_{m\max}$ 。
- (3) 工况 C: 主支柱压缩行程最大工况,此工况下主支柱行程最大值表示为 $s_{m\max}$ 。
- (4) 工况 D: 辅助支柱所受压力最大工况,此工况下辅助支柱最大压力表示为 $F_{ac\max}$ 。
- (5) 工况 E: 辅助支柱所受拉力最大工况,此工况下辅助支柱最大拉力表示为 $F_{at\max}$ 。
- (6) 工况 F: 机体倾角最大工况,此工况下机体最大倾角表示为 $\psi_{\max}$ 。
- (7) 工况 G: 机体反弹高度最大工况,此工况下机体最大反弹高度表示为 $h_{b\max}$ 。

机体最大反弹高度定义为着陆触地后机体距地面法向高度最低点与最高点之间的高度差,它用来反应缓冲器产生的耗散能占总吸量的比重。

图 7 显示了不同着陆响应下代理模型与原动力学模型间的误差,由图可知,1-2-1 着陆时代理模型

与原动力学模型的机体最大加速度响应误差最大(RMSE 为最大的 0.039 28, R^2 为最小的 0.983 2), 但是误差被控制在可接受范围内, 因此, 认为本文建立的径向基函数代理模型可以较为准确地反映原准三维动力学模型。

通过上述方法分别确定 2-2 模式以及 1-2-1 模式下的着陆极限工况, 并分别计算相应工况下代理模型与原动力学模型的响应及误差, 其结果总结如表 2 及表 3 所示。由表 2 可知, 搜寻出的辅助支柱最大拉伸工况中地面倾角, 机体俯仰角分别为 2.98° 以及 -4.92° , 最大反弹工况中机体俯仰角为 -4.87° , 它们都十分接近但没有达到相应边界值, 而在这些变量达到边界值时, 原动力学模型中的响应达到极限值, 因此, 将这些变量最终调整为相应的边界值, 上述情况产生的原因在于代理模型与原动力学模型得到的响应值间存在误差。同理, 将表 3 中主支柱最大行程工况下的水平速度及地面倾角分别由 0.95 m/s 和 2.94° 调整为 1 m/s 和 3° 。除此之外, 代理模型与原动力学模型的响应误差除了在 1-2-1 模式最大支柱力工况下达到了 7.8%, 其他工况的响应误差都小于 1.6%, 由此可反映出代理模型的准确性。同时, 由表 3 中可得 2-2 模式下主支柱最大行程工况与辅助支柱最大拉力工况为同一工况, 1-2-1

模式下主支柱最大力工况与辅助支柱最大压力工况也为同一工况。

图 7 代理模型与原模型误差

表 2 2-2 着陆模式下的极限工况

初始着陆条件	垂向速度/(m/s)	水平速度/(m/s)	地面倾角/(°)	机体俯仰角/(°)	地面摩擦系数	代理模型极值	原模型极值	误差(%)
工况 A	2	0.40	3	3	0.75	130.69	130.81	0.09
工况 B	2	0.19	3	-5	0.75	12.670	12.715	0.35
工况 C	2	1	3	-5	0.15	27.87	27.88	0.04
工况 D	2	1	3	-5	0.75	-6.164	-6.164	0
工况 E	2	1	2.98	-4.92	0.15	5.243	5.239	0.08
			3	-5		5.242	5.241	0.02
工况 F	2	-1	3	-5	0.75	9.767	9.767	0
工况 G	2	-1	3	-4.87	0.48	120.65	118.79	1.57
				-5		120.39	119.61	0.65

表 3 1-2-1 着陆模式下的极限工况

初始着陆条件	垂向速度/(m/s)	水平速度/(m/s)	地面倾角/(°)	机体俯仰角/(°)	地面摩擦系数	代理模型极值	原模型极值	误差(%)
工况 A	2	1	2.1	2	0.75	159.75	159.71	0.03
工况 B	2	1	3	-5	0.75	23.129	25.086	7.8
工况 C	2	0.95	2.94	-5	0.39	35.77	35.89	0.33
		1	3			35.73	35.92	0.53
工况 D	2	1	3	-5	0.75	-9.071	-8.929	1.59
工况 E	2	1	3	-5	0.15	8.220	8.182	0.46
工况 F	2	-1	3	-5	0.75	8.291	8.357	0.79
工况 G	2	-1	3	-5	0.72	158.56	159.33	0.48

综合两种着陆模式, 最终可得机体最大倾角工况为 2-2 着陆模式下的最大倾角工况(工况 F), 其余

极限工况都为 1-2-1 着陆模式下相应的极限工况, 且主支柱最大受力工况(工况 B)与辅助支柱最大压

力工况(工况 D)的着陆条件相同。

3.3 极限工况下缓冲性能分析

本节对运载器极限工况下的动力学响应以及缓冲器缓冲性能进行综合分析。图 8~14 分别展示了运载器在各极限工况下的运动轨迹以及极限响应曲线,其中对运载器等时间间隔截取位置,并用由浅入深的颜色描绘,进而可得各工况相应的运动轨迹。图 8 显示了最大过载工况(工况 A)下的运载器运动轨迹及动力学响应曲线,由图 8a 可知,运载器主体在着陆后经历了极小幅的摆动,而后稳定。由图 8b 可知,运载器最大合加速度发生在四腿几乎同时触地时,合加速度中包含了水平及垂直两方向的加速度分量,其中水平方向的加速度极值为 146.1 m/s^2 ,发生在触地后的 $1.9 \times 10^{-3} \text{ s}$, 垂直方向的加速度极值为 102.7 m/s^2 , 发生在触地后的 $2.7 \times 10^{-3} \text{ s}$, 水平加速度极值较大, 发生时间较早的原因是大部分水平载荷经由辅助外壳传递到运载器主体上, 而辅助外壳中没有缓冲装置。

图 8 工况 A 下运载器动力学响应

图 9 及图 10 分别为主支柱力最大工况(工况 B)/辅助支柱最大压力工况(工况 D)的动力学响应曲线。由图 9 可知,运载器着陆分为两个阶段,在 $0 \sim 0.46 \text{ s}$ 时间内,运载器绕着初始触地的 1 号着陆支腿向左旋转,直到约 0.46 s 时,四腿同时触地,在 $0.46 \sim 1 \text{ s}$ 时间内,运载器绕着 3 号支腿先向右旋转,后向左小幅旋转,并最终达到稳定。由图 10 可知,

在着陆瞬时,支腿 1 中主支柱压力达到极值 25.09 kN , 辅助支柱压力达到极值 8.93 kN , 2 及 4 号支腿在约 0.253 s 触地,随后在 0.289 s , 3 号支腿触地,由于 2, 4 号腿同时着陆,因此每条支腿受力较小,在 3 号腿触地时,其主、辅支柱压力极值分别达到了 9.68 kN 及 4.32 kN 。另外,可观察到辅助支柱触地时会首先经历短暂的受压载阶段,此后随着足垫的滑动受载由压力变为拉力。

图 9 工况 B/D 下运载器动态位置

图 10 工况 B/D 下运载器动力学响应

图 11 显示了主支柱最大行程工况(工况 C)下的动力学响应,由于工况 C 下运载器运动轨迹与工况 B/D 时相似,此处不再单独列出,由图 11 可知,1 号支腿中的缓冲器行程最大,达到了 35.93 mm ,

2 号和 3 号支腿中的缓冲器行程分别达到了 14.35 mm 和 26.41 mm, 工况 C 相对于工况 B 来说唯一的差别在于地面摩擦系数由 0.75 降低为 0.39, 这是因为随着摩擦系数下降, 1 号支腿的足垫更易沿着坡面向上滑动, 进而使得支腿传力路径发生改变并导致缓冲器行程上升。当摩擦系数低于 0.39 时, 足垫过大的滑移距离又将影响主支柱缓冲器的受载, 致使其行程有所下降。综合工况 B 和 C 的动力学响应可知, 主、辅支柱最大压力及最大行程均出现于先触地的 1 号支腿中。

图 11 工况 C 下缓冲器行程

图 12 显示了辅助支柱最大拉力工况(工况 E)下的动力学响应, 由图 12a 可知, 在 0~0.26 s 时间内, 由于地面摩擦系数较小, 足垫易发生滑动, 四条支腿在较短时间内同时接触地面, 在此之后, 运载器有小幅晃动并最终趋于稳定。如图 12c 所示, 正是由于足垫较易滑动, 导致辅助支柱最大拉力发生在 3 号支腿中, 且峰值达到了 8.18 kN。

图 13 为运载器最易翻倒工况(工况 F)下的动力学响应, 运载器最易翻倒工况发生在 2-2 着陆模式下, 这是因为相较于 1-2-1 式着陆, 此时运载器翻倒所需克服的重力势能较小。在 0~0.56 s 时间内, 运载器先后绕 1/2 号支腿与 3/4 号支腿向左旋转。在 0.56~1 s 内, 运载器绕 3/4 号支腿向右旋转并最终趋于稳定, 在约 0.56 s 时, 运载器转角达到了最大值 9.77°。

图 12 工况 E 下运载器动力学响应

图 13 工况 F 下运载器动力学响应

图 14 显示了最大反弹高度工况(工况 G)下运载器质心距离地面法向高度曲线, 由图 14a 可知, 在 0~0.42 s 内, 运载器先后绕 1 号支腿与 3 号支腿向左旋转, 在 0.42~1 s 内, 运载器绕 3 号支腿向右旋转并最终趋于稳定。由图 14b 可知, 运载器法向位移分别在 0.203 s 和 0.514 s 达到最低值 1.57 m 和最高值 1.73 m。

图14 工况G下运载器动力学响应

4 结论

(1) 在考虑运载器弹性质量平面运动及非弹性质量空间运动的基础上, 计及动坐标系产生的科氏加速度与向心加速度, 并结合油液缓冲器集中参数模型及足垫-地面非线性接触模型, 建立了对称着陆模式下运载器的准三维着陆冲击模型。

(2) 开发了运载器准三维着陆冲击分析计算程序, 给出了其开发流程和结构, 介绍了其基本功能与结果输出方式。

(3) 采用径向基函数, 得到了准三维动力学模型的较高精度代理模型。基于模拟退火优化方法, 搜寻出七种着陆极限工况, 并得到: 运载器过载峰值发生在四腿同时触地工况, 运载器倾角峰值发生在 2-2 着陆模式下, 支腿受载与主体反弹峰值发生在 1-2-1 着陆模式下。

参考文献

- [1] 徐大富, 张哲, 吴克, 等. 垂直起降重复使用运载火箭发展趋势与关键技术研究进展[J]. 科学通报, 2016, 61(32): 3453-3463.
XU Dafu, ZHANG Zhe, WU Ke, et al. Recent Progress on development trend and key technologies of vertical take-off vertical landing reusable launch vehicle[J]. Chinese Science Bulletin, 2016, 61(32): 3453-3463.
- [2] YUE S, NIE H, ZHANG M, et al. Optimization and performance analysis of oleo-honeycomb damper used in vertical landing reusable launch vehicle[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2018, 31(2): 04018002.
- [3] WANTANABE T, HARA S, OTSUKI M. Study on passive momentum exchange landing gear using two-dimensional analysis[J]. Acta Astronautica, 2014, 105(2): 407-416.
- [4] MAEDA T, OTSUKI M, HASHIMOTO T, et al. Attitude stabilization for lunar and planetary lander with variable damper[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(8): 1790-1804.
- [5] 王英超, 高海波, 于海涛, 等. 垂直降落运载器着陆动力学建模与稳定性分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(11): 37-47.
WANG Yingchao, GAO Haibo, YU Haitao, et al. Landing dynamics modeling and stability analysis of vertical-landing carrier[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(11): 37-47.
- [6] 逯运通, 宋顺广, 王春洁, 等. 基于刚柔耦合模型的月球着陆器动力学分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2010, 36(11): 1348-1352.
LU Yuntong, SONG Shunguang, WANG Chunjie, et al. Dynamic analysis for lunar lander based on rigid-flexible coupled model[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(11): 1348-1352.
- [7] LIU Y Y, SONG S G, LI M, et al. Landing stability analysis for lunar landers using computer simulation experiments[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2017, 14(6): 1729881417748441.
- [8] ZHANG M, XU D F, YUE S, et al. Design and dynamic analysis of landing gear system in vertical takeoff and vertical landing reusable launch vehicle[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2019, 233(10): 3700-3713.
- [9] 陈金宝, 聂宏, 万峻麟. 深空探测着陆器数字化设计及着陆性能影响因素[J]. 航空学报, 2014, 35(2): 541-554.
CHEN Jinbao, NIE Hong, WAN Junlin. The digital design and the research on the landing performance of deep space lander[J]. Acta Astronautica, 2014, 35(2): 541-554.
- [10] WITTE L, ROLL R, BIELE J, et al. Rosetta lander Philae—Landing performance and touchdown safety assessment[J]. Acta Astronautica, 2016, 125(1): 149-160.
- [11] TITURUS B, LIEVEN N. Modelling and analysis of semi-active dampers in periodic working environments[J]. AIAA Journal, 2009, 47(10): 2404-2416.
- [12] WEAVER D S, ZIADA S. A theoretical model for self-excited vibrations in hydraulic gates, valves and seals[J]. Journal of Pressure Vessel Technology, 1980, 102(2): 146-151.
- [13] MAO M, HU W, CHOI Y T, et al. Nonlinear modelling of magnetorheological energy absorbers under impact conditions[J]. Smart Material Structure, 2013, 22(11): 115015.
- [14] 徐奎. 某小型无人机起落架缓冲器卡滞特性研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2016.
XU Kui. Research on binding characteristics of a small UAV landing gear shock absorber[D]. Nanjing: Nanjing

- University of Aeronautics and Astronautics. 2016.
- [15] KHAN Z A, CHACKO V, NAZIR H. A review of friction models in interacting joints for durability design[J]. *Friction*, 2017, 5(1): 1-22.
- [16] PENNASTRI E, ROSSI V, SALVINI P, et al. Review and comparison of dry friction force models[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83(4): 1785-1801.
- [17] 魏锋涛, 宋俐, 李言, 等. 基于径向基函数代理模型的改进协同优化方法[J]. *西安理工大学学报*, 2013, 29(3): 273-278.
- WEI Fengtao, SONG Li, LI Yan, et al. Improved collaborative optimization method based on radial basis function surrogate model[J]. *Journal of Xi'an University of Technology*, 2013, 29(3): 273-278.
- [18] FANG H, WANG Q. On the effectiveness of assessing model accuracy at design points for radial basis functions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2010, 24(3): 219-235.
-
- 作者简介:** 岳帅(通信作者), 男, 1989 年出生, 博士, 讲师。主要研究方向为航天器结构动力学与控制。
E-mail: yueshuai@njust.edu.cn