

DOI: 10.3901/JME.2021.19.030

TriMule 与 Tricept 机器人刚度解析与比对^{*}

董成林 岳巍 刘海涛 黄田 肖聚亮
(天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室 天津 300354)

摘要: 为分析比对 TriMule 机器人与 Tricept 机器人中两种 1T2R 并联机构的刚度性能, 基于旋量理论, 通过力/变形雅可比将支链层面的界面刚度矩阵映射为机构末端笛卡尔刚度矩阵, 构造出二者的刚度半解析模型。在此基础上, 结合两种 1T2R 并联机构为球坐标机构的构型特点, 推导出二者在给定参考位形下切向线柔度特性各向同性条件的显式表达, 并提出评价两种机构切向、法向柔度特性的局部与全域刚度性能评价指标。利用该模型, 揭示出两种机构中主动与从动支链的夹角对局部和全域刚度性能的影响规律。研究结果表明, 对于一组相同的尺度、结构和任务空间参数, 两种机构的刚度性能相当, 且其局部与全域刚度性能均是强线性相关的, 进而可用前者准确地表征后者。

关键词: 1T2R 并联机构; 刚度分析与评价; TriMule 机器人; Tricept 机器人

中图分类号: TG156

Stiffness Analysis and Comparison of TriMule and Tricept Robots

DONG Chenglin YUE Wei LIU Haitao HUANG Tian XIAO Juliang
(Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300354)

Abstract: This research presents a screw theory based analytical approach for stiffness modelling of 1T2R parallel mechanisms within the TriMule and Tricept robots with the goal to compare their stiffness performance over the entire task workspace, leading to the Cartesian stiffness matrix being explicitly expressed in terms of the interface stiffness matrices of limbs and force/deflection Jacobian matrix. Building upon the explicit expressions of the isotropic conditions of the tangential compliance characteristics at the reference configuration, a set of local and global indices for evaluating stiffness performance is proposed. Given a set of identical geometric and structural parameters of limbs, a comparison study is then carried out to investigate the influence of the inclination angle between the actuated and passive limbs on the local and global stiffness indices. It concludes that two robots have extremely similar stiffness performance over the entire work envelop if the local indices of two mechanisms are nearly identical.

Key words: 1T2R parallel mechanism; stiffness analysis and assessment; TriMule robot; Tricept robot

0 前言

因兼具机床精度、刚度高及关节型机器人作业空间大、可重构性强等优点, 由 1T2R(T——平动, R——转动)并联机构和 A/C 转头构成的 5 自由度混联机器人已在大型构件现场加工中得到成功应用^[1-4]。刚度半解析建模与评价是这类机器人机构数字化设计的重要组成部分。

刚度半解析建模的基本思路是: 首先构造关节力(界面变形)与操作力(末端变形)之间的映射关系, 然后利用张量变换将关节刚度矩阵映射为末端笛卡尔刚度矩阵。采用这一思路, 学者们将旋量理论、虚铰链法^[5]和有限元法相结合, 先后研究了多种并联机构的静刚度半解析建模问题^[6-13]。例如, ZHANG 等利用虚铰链描述构件的弯曲/扭转弹性变形, 建立了含恰约束从动支链并联机构的静刚度模型^[5-6]; LI 等分别以 3-PUU 和 3-PRC 并联机构为研究对象, 利用全雅可比建立了考虑机构驱动与约束刚度的整机静刚度模型^[7-8]; PASHKEVICH 提出了适用于多种三平动并联机构的静刚度建模方法, 并

^{*} 国防基础科研(JCKY2017203B066)和国家自然科学基金(91948301, 51721003)资助项目。20201018 收到初稿, 20210225 收到修改稿

以 Orthoglide 机构为例验证了该方法的有效性^[9]; WANG 同时考虑了关节与连杆弹性,建立了计及重力场影响的 3-SPR 并联机构静刚度模型^[10]; LIU 提出了一种分层递阶式的并联机构刚度建模方法^[11],通过揭示部件-界面-末端刚度之间的映射关系,可直接构造机构的界面刚度矩阵,并通过张量变换得到笛卡尔刚度矩阵。

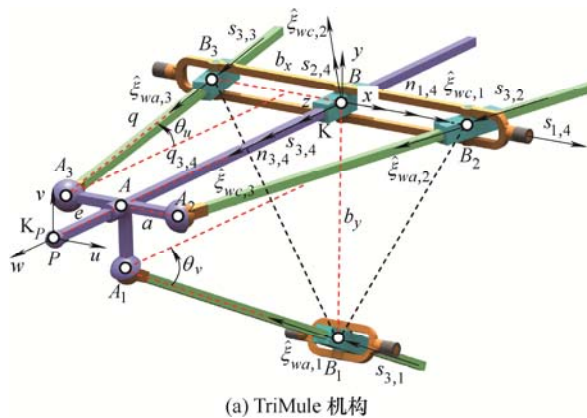
在刚度性能评价方面,通常用笛卡尔刚度矩阵的代数特征来构造性能评价指标^[14-18],并采用正则化法^[19-21]、平转分离法^[22, 23]、共线刚度法^[24-26]等来处理因非齐次量纲引发的问题。其中,正则化法利用由特征长度构成的权重矩阵对原刚度矩阵做张量变换^[19, 20];平转分离法将六维刚度矩阵按照平动和转动分块,并通过对刚度矩阵前乘归一化的力旋量矩阵,得到具有分块对角格式的齐次线刚度和角刚度矩阵;类似地,共线刚度法则通过对刚度矩阵前乘和后乘运动旋量来表征沿/绕某一轴线的线/角刚度^[24]。此外,一些学者还提出了基于弹性势能的刚度性能评价指标,如虚功刚度指标^[27]、刚度分布指标^[28]等。

本文借助文献[13]提出的方法,在建立 TriMule^[29-31]和 Tricept^[32]机器人中 1T2R 并联机构刚度半解析模型的基础上,侧重推导在参考位形下切向线柔度特性的各向同性条件,揭示主动与从动支链夹角对刚度性能影响规律,以及局部和全域刚度性能评价指标间的关联关系。本文旨在证明:

① 对于一组相同的尺度和结构参数,两种 1T2R 机构的局部和全域刚度性能是相近的;② 用这类机构的局部刚度性能来表征其全域刚度性能是合理的。

1 刚度建模

图 1 示出了 TriMule 和 Tricept 机器人的三维模



型。为方便计,后采用 TriMule 机构和 Tricept 机构分别指代其中的 1T2R 机构,它们的结构简图见图 2。两种机构的异同之处在于以下几点

(1) 均由三条主动支链与一条从动支链组成,且因主动/从动支链的机械结构相同,故可互换。

(2) 两种机构中三条主动支链提供三个单位驱动力旋量 $\hat{\xi}_{wa,1}$ 、 $\hat{\xi}_{wa,2}$ 、 $\hat{\xi}_{wa,3}$, 从动支链提供三个单位约束力旋量 $\hat{\xi}_{wc,1}$ 、 $\hat{\xi}_{wc,2}$ 、 $\hat{\xi}_{wc,3}$ ^[33]。

(3) TriMule 机构中两条 RPS 主动支链与 RP 从动支链共用一个转动支架,构成平面并联运动链。

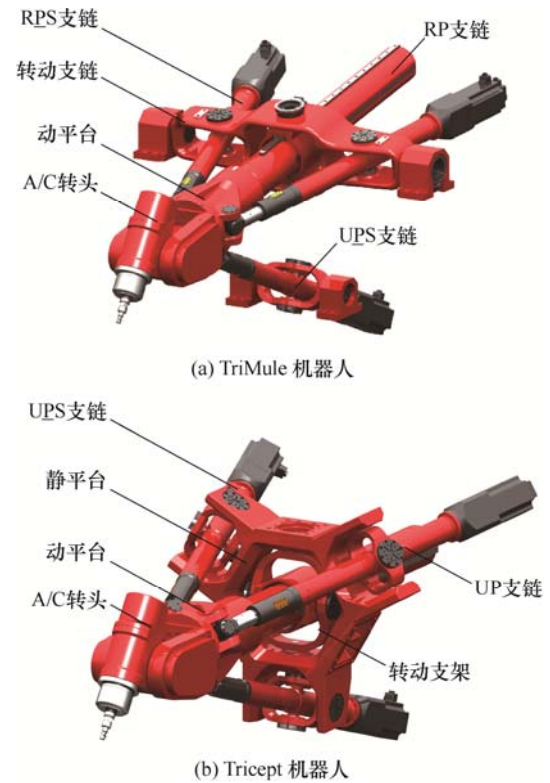


图 1 混联机器人三维模型

图 2 机构结构简图

因两种机构的拓扑结构类似且支链结构相同,

故本节将建立两者具有统一格式的刚度模型。为方

便计, 将 3 条主动支链记作支链 1~3, 从动支链记作支链 4。

列写具有旋量格式的动平台静力学方程

$$\xi_w = \sum_{i=1}^4 W_i \bar{\rho}_{w,i} = W \bar{\rho}_w \quad (1)$$

$$W = [W_1 \quad \cdots \quad W_4] \quad \bar{\rho}_w = (\bar{\rho}_{w,1}^T \quad \cdots \quad \bar{\rho}_{w,4}^T)^T$$

$$W_i = \hat{\xi}_{wa,i} \quad \bar{\rho}_{w,i} = \bar{\rho}_{wa,i} \quad i=1 \sim 3$$

$$W_4 = [\hat{\xi}_{wc,1} \quad \hat{\xi}_{wc,2} \quad \hat{\xi}_{wc,3}] \quad \bar{\rho}_{w,4} = (\bar{\rho}_{wc,1} \quad \bar{\rho}_{wc,2} \quad \bar{\rho}_{wc,3})$$

式中, W 称为力雅可比, 其中 $\hat{\xi}_{wa,i}$ 表示支链 i ($i=1 \sim 3$) 作用在动平台上单位驱动力旋量, $\hat{\xi}_{wc,j}$ 表示支链 4 作用在动平台上第 j ($j=1 \sim 3$) 个单位约束力旋量; $\bar{\rho}_{wa,i}$ ($\bar{\rho}_{wc,j}$) 表示力旋量的强度。

因外力旋量 ξ_w 在相应变形旋量 ξ_t 上所做功等于界面力 $\bar{\rho}_{w,i}$ 在与之对应界面变形 $\bar{\rho}_{t,i}$ 上所做功之和, 即

$$\xi_w^T \xi_t = \sum_{i=1}^4 \bar{\rho}_{w,i}^T \bar{\rho}_{t,i} = \bar{\rho}_w^T \bar{\rho}_t \quad (2)$$

$$\bar{\rho}_t = (\bar{\rho}_{t,1}^T \quad \cdots \quad \bar{\rho}_{t,4}^T)^T \quad \bar{\rho}_{t,i} = \bar{\rho}_{ta,i} \quad i=1 \sim 3$$

$$\bar{\rho}_{t,4} = (\bar{\rho}_{tc,1} \quad \bar{\rho}_{tc,2} \quad \bar{\rho}_{tc,3})^T$$

将式(1)代入式(2), 得

$$W^T \xi_t = \bar{\rho}_t \quad (3)$$

假设体系中各元件为线弹性体, 则由胡克定律可构造各支链的界面刚度方程

$$\bar{\rho}_w = \bar{K} \bar{\rho}_t \quad (4)$$

$$\bar{K} = \text{diag}[\bar{K}_i] \quad i=1 \sim 4$$

$$\bar{K}_i = \bar{k}_{a,i} \quad i=1 \sim 3 \quad \bar{K}_4 = \text{diag}[\bar{k}_{c,1} \quad \bar{k}_{c,2} \quad \bar{k}_{c,3}]$$

式中, \bar{K} 称为界面刚度矩阵, 其中 $\bar{k}_{a,i}$ 表示支链 i 沿 $s_{3,i}$ 的界面线刚度; $\bar{k}_{c,1}$ 、 $\bar{k}_{c,2}$ 、 $\bar{k}_{c,3}$ 表示支链 4 沿 $n_{1,4}$ 、 $s_{2,4}$ 的界面线刚度, 及绕 $n_{3,4}$ 的界面角刚度。 $s_{3,i}$ 表示支链 i 的轴线方向, $s_{1,4}$ 、 $s_{2,4}$ 表示转动支架的近架、远架转动副的轴线方向, $n_{1,4} = s_{2,4} \times s_{3,4}$ 且 $n_{3,4} = s_{1,4} \times s_{2,4}$, 如图 2 所示。

将式(3)和式(4)代入式(1), 即可得到机构的刚度方程

$$\xi_w = K \xi_t \quad (5)$$

$$K = W \bar{K} W^T = \sum_{i=1}^4 W_i \bar{K}_i W_i^T$$

针对两种 1T2R 机构为球坐标机构的构型特点, 需在球面切平面内 ($u-v$ 平面) 和法向 (w 轴方向) 评价其线/角柔度特性。为此, 借助伴随变换构造在系 \mathcal{K}_p (末端连体系) 下度量的柔度矩阵

$$C = X^T W^{-T} \bar{C} W^{-1} X \quad (6)$$

$$\bar{C} = \bar{K}^{-1} = \text{diag}[\bar{C}_i] \quad i=1 \sim 4$$

$$\bar{C}_i = \bar{c}_{a,i} = \bar{k}_{a,i}^{-1} \quad i=1 \sim 3 \quad X = \text{diag}[R \quad R]$$

$$\bar{C}_4 = \text{diag}[\bar{c}_{c,1} \quad \bar{c}_{c,2} \quad \bar{c}_{c,3}] \quad \bar{c}_{c,j} = \bar{k}_{c,j}^{-1} \quad j=1 \sim 3$$

式中, R 表示系 \mathcal{K}_p 相对于系 \mathcal{K} (全局坐标系) 的姿态矩阵。利用矩阵奇异值理论可构造出切向最大/最小线柔度特性、法向线/角柔度特性, 即

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(C_{\delta,t}) &= \sqrt{\lambda_{\max}(C_{\delta,t} C_{\delta,t}^T)} \\ \sigma_{\min}(C_{\delta,t}) &= \sqrt{\lambda_{\min}(C_{\delta,t} C_{\delta,t}^T)} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sigma_{\delta,w} = C(3,3), \quad \sigma_{\varepsilon,w} = C(6,6)$$

$$C_{\delta,t} = \begin{bmatrix} C(1,1) & C(1,2) \\ \text{sym} & C(2,2) \end{bmatrix}$$

式中, $\sigma_{\max}(C_{\delta,t})$ 和 $\sigma_{\min}(C_{\delta,t})$ 分别表示 $C_{\delta,t}$ 的最大和最小奇异值; $C(m,n)$ 为 C 中第 m 行、第 n 列的元素。 $\sigma_{\max}(C_{\delta,t})$ ($\sigma_{\min}(C_{\delta,t})$) 的物理意义为: 当仅在 $u-v$ 平面内加载单位力时, 点 P 在 $u-v$ 平面内的最大(最小)线变形; $\sigma_{\delta,w}$ 和 $\sigma_{\varepsilon,w}$ 的物理意义为: 当仅沿/绕 w 轴加载单位力/力偶时, 点 P /动平台沿/绕该轴的线/角变形。

2 切向线柔度特性的各向同性条件

2.1 参考位形及尺度参数关联关系

为了构造局部柔度特性的解析解, 定义三条主动支链杆长相等, 且从动支链达到行程之半时的位形为参考位形。据此有

$$\begin{aligned} q_{3,4} &= q_{3,4\text{mean}} = (q_{3,4\text{max}} + q_{3,4\text{min}})/2 \\ q_{3,1} &= q_{3,2} = q_{3,3} = q \end{aligned} \quad (8)$$

式中, $q_{3,4\text{min}}$ 和 $q_{3,4\text{max}}$ 分别表示从动支链的最小和最大杆长, q 表示参考位形下主动支链的杆长。

令主动支链行程为 Δq , 其与最小杆长之比为 $\mu = \Delta q/q_{\min}$, 动平台半径为 a , 且令在参考位形下 TriMule 机构中 RPS 主动支链、UPS 主动支链与 RP 从动支链夹角分别为 θ_u 、 θ_v , Tricept 机构中 UPS 主动支链与 UP 从动支链夹角为 θ (见图 2), 则根据

图中几何关系可得 TriMule 机构

$$\begin{aligned} q_{\min} &= \Delta q / \mu \quad q_{\max} = (1/\mu + 1) \Delta q \\ b_x &= q(\mu \lambda_q \lambda_a + \sin \theta_u) \\ b_y &= q \sqrt{(\mu \lambda_q \lambda_a + \sin \theta_u)^2 + (\cos \theta_u - \cos \theta_v)^2} \\ q_{3,4\min} &= q \sqrt{\lambda_q^2 - \sin^2 \theta_u} \\ q_{3,4\max} &= q \sqrt{(1+\mu)^2 \lambda_q^2 - \sin^2 \theta_u} \\ q_{3,4\text{mean}} &= q \cos \theta_u = \Delta q \cos \theta_u / \mu \lambda_q \end{aligned} \quad (9)$$

Tricept 机构

$$\begin{aligned} q_{\min} &= \Delta q / \mu, \quad q_{\max} = (1/\mu + 1) \Delta q \\ b &= q(\mu \lambda_q \lambda_a + \sin \theta) \\ q_{3,4\min} &= q \sqrt{\lambda_q^2 - \sin^2 \theta} \\ q_{3,4\max} &= q \sqrt{(1+\mu)^2 \lambda_q^2 - \sin^2 \theta} \\ q_{3,4\text{mean}} &= q \cos \theta = \Delta q \cos \theta / \mu \lambda_q \end{aligned} \quad (10)$$

式中, $\lambda_a = a/\Delta q$, $\lambda_q = q_{\min}/q$; 且 λ_q 满足如下等式关系, TriMule 机构

$$\sqrt{\lambda_q^2 - \sin^2 \theta_u} + \sqrt{(1+\mu)^2 \lambda_q^2 - \sin^2 \theta_u} - 2 \cos \theta_u = 0 \quad (11)$$

Tricept 机构

$$\sqrt{\lambda_q^2 - \sin^2 \theta} + \sqrt{(1+\mu)^2 \lambda_q^2 - \sin^2 \theta} - 2 \cos \theta = 0 \quad (12)$$

给定 TriMule 机构的尺度参数 a 、 e 、 Δq 、 μ 、 θ_u 和 θ_v , 或 Tricept 机构的尺度参数 a 、 e 、 Δq 、 μ 、 θ , 其余尺度参数可由式(9)和式(10)解出。

2.2 切向线柔度特性的同性条件

在参考位形下, 因机构中三条主动支链杆长相等, 且从动支链采用轴对称结构, 故如下关系成立

$$\bar{c}_{a,1} = \bar{c}_{a,2} = \bar{c}_{a,3} = \bar{c}_a \quad (13)$$

$$\bar{c}_{c,1} = \bar{c}_{c,2} = \bar{c}_c \quad \bar{c}_{c,3} = \bar{c}_w \quad (14)$$

式中, \bar{c}_a (\bar{c}_c) 为主动支链(从动支链)沿 $\mathbf{s}_{3,i}$ ($\mathbf{n}_{1,4}$ 、 $\mathbf{s}_{2,4}$) 的界面线柔度; \bar{c}_w 为从动支链绕 $\mathbf{n}_{3,4}$ 的界面角柔度。 \bar{c}_a 、 \bar{c}_c 、 \bar{c}_w 可借助有限元软件得到。据此, 可推导出参考位形下切向和法向柔度特性的解析表达:

TriMule 机构

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(\mathbf{C}_{\delta,t}) &= \min(\sigma_{\delta,u}, \sigma_{\delta,v}) \\ \sigma_{\max}(\mathbf{C}_{\delta,t}) &= \max(\sigma_{\delta,u}, \sigma_{\delta,v}) \\ \sigma_{\delta,w} &= \bar{c}_a c_{a,3} \quad \sigma_{\varepsilon,w} = \bar{c}_w \\ \sigma_{\delta,u} &= \bar{c}_a c_{a,1} + \bar{c}_c c_{c,1} \quad \sigma_{\delta,v} = \bar{c}_a c_{a,2} + \bar{c}_c c_{c,2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$c_{a,1} = \frac{1}{2\eta_u^2} \quad c_{a,2} = \frac{1}{\eta_v^2} \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_v}{2 \cos^2 \theta_u} \right)$$

$$c_{a,3} = \frac{1}{2 \cos^2 \theta_u} \quad c_{c,1} = \frac{\gamma_u^2}{\eta_e^2 \eta_u^2} \quad c_{c,2} = \frac{\gamma_v^2}{\eta_e^2 \eta_v^2}$$

$$\eta_u = (q_{3,4\text{mean}} \sin \theta_u + a \cos \theta_u) / \eta_e$$

$$\eta_v = (q_{3,4\text{mean}} \sin \theta_v + a \cos \theta_v) / \eta_e \quad \eta_e = q_{3,4\text{mean}} + e$$

$$\gamma_u = a \cos \theta_u - e \sin \theta_u \quad \gamma_v = a \cos \theta_v - e \sin \theta_v$$

Tricept 机构

$$\sigma_{\min}(\mathbf{C}_{\delta,t}) = \sigma_{\max}(\mathbf{C}_{\delta,t}) = \bar{c}_a c_{a,1} + \bar{c}_c c_{c,1}$$

$$\sigma_{\delta,w} = \bar{c}_a c_{a,3} \quad \sigma_{\varepsilon,w} = \bar{c}_w$$

$$c_{a,1} = \frac{2}{3\eta^2} \quad c_{c,1} = \frac{\gamma^2}{\eta_e^2 \eta^2} \quad c_{a,3} = \frac{1}{3 \cos^2 \theta}$$

$$\eta = (q_{3,4\text{mean}} \sin \theta + a \cos \theta) / \eta_e \quad \eta_e = q_{3,4\text{mean}} + e \quad (16)$$

$$\gamma = a \cos \theta - e \sin \theta$$

考察式(15)和(16)可见, 在参考位形下 Tricept 机构的切向线柔度特性是各向同性的, 但若使 TriMule 机构的切向线柔度特性是各向同性的, 则应满足 $\sigma_{\min}(\mathbf{C}_{\delta,t}) = \sigma_{\max}(\mathbf{C}_{\delta,t})$, 即

$$\bar{c}_a (c_{a,1} - c_{a,2}) + \bar{c}_c (c_{c,1} - c_{c,2}) = 0 \quad (17)$$

展开后, 有

$$\bar{c}_a \left(\frac{1}{2\eta_u^2} - \frac{1}{\eta_v^2} \left(1 + \frac{\cos^2 \theta_v}{2 \cos^2 \theta_u} \right) \right) + \frac{\bar{c}_c}{\eta_e^2} \left(\frac{\gamma_u^2}{\eta_u^2} - \frac{\gamma_v^2}{\eta_v^2} \right) = 0 \quad (18)$$

当给定 θ_u 及其他尺度和结构参数后, 利用式(18)即可确定 θ_v 。

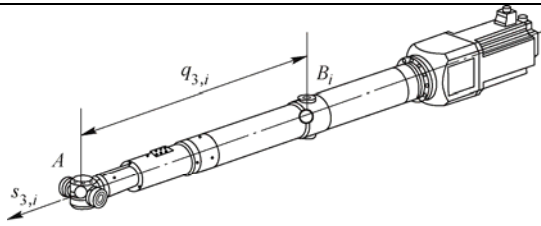
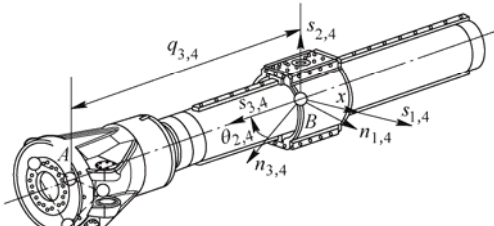
3 刚度性能分析

定义 $\sigma_{\delta,t} = \sigma_{\max}(\mathbf{C}_{\delta,t})$ 为机构的切向线柔度特性, 并定义在参考位形下的 $\sigma_{\delta,t}$ 、 $\sigma_{\delta,n}$ 与 $\sigma_{\varepsilon,n}$ 为局部刚度性能评价指标, 分别记作 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ 、 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 和 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ 。图 3 示出了在给定一组相同的尺度参数(见表 1)、支链结构及界面柔度系数(见表 2)条件下, 两种机构 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ 、 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 和 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ 随 θ_u (θ) 的变化规律。由图可见, 两种机构相应指标随 θ_u (θ) 变化趋势一致且数值相近, 表明二者具有相近的局部刚度性能。

表 1 两种机构相同的尺度参数

动平台半径 a / mm	动平台接口尺寸 e / mm	主动支链行程与 最小杆长比 μ	主动支链行 程 $\Delta q / \text{mm}$
135	360	0.8	600

表 2 主动/从动支链界面柔度系数

编号 i	支链体	支链结构	界面柔度系数 (m/N、rad/(N·m))
$i=1\sim 3$	主动支链		$\bar{c}_{a,i} = g_{i,0} + g_{i,1}q_{3,i}$ $g_{i,0} = 2.441 \times 10^{-9}, \quad g_{i,1} = 9.853 \times 10^{-9}$
$i=4$	从动支链		$\bar{c}_{c,1} = g_{4,0} + g_{4,1}q_{3,4} + g_{4,2}q_{3,4}^2 + g_{4,3}q_{3,4}^3$ $\bar{c}_{c,2} = \bar{c}_{c,1}$ $\bar{c}_{c,3} = \bar{c}_{c,3,0} \cos^2 \theta_{2,4} + \bar{c}_{c,3,1} \sin^2 \theta_{2,4}$ $\bar{c}_{c,3,0} = g_{5,0} + g_{5,1}q_{3,4}, \quad \bar{c}_{c,3,1} = g_{5,2} + g_{5,3}q_{3,4}$ $g_{4,0} = -1.968 \times 10^{-8}, \quad g_{4,1} = 0$ $g_{4,2} = 2.351 \times 10^{-7}, \quad g_{4,3} = 1.728 \times 10^{-7}$ $g_{5,0} = -1.247 \times 10^{-6}, \quad g_{5,1} = 2.765 \times 10^{-6}$ $g_{5,2} = -1.901 \times 10^{-7}, \quad g_{5,3} = 5.403 \times 10^{-7}$

注: $\bar{c}_{a,i}$ 表示支链 i (主动支链) 沿 $s_{3,i}$ 方向的线柔度; $\bar{c}_{c,1}$ 、 $\bar{c}_{c,2}$ 分别表示支链 4 (从动支链) 沿 $n_{1,4}$ 、 $s_{2,4}$ 方向的线柔度; $\bar{c}_{c,3}$ 表示支链 4 (从动支链) 沿 $n_{3,4}$ 方向的角柔度。表中全部柔度系数 g 均借助有限元软件及曲线拟合技术得到。

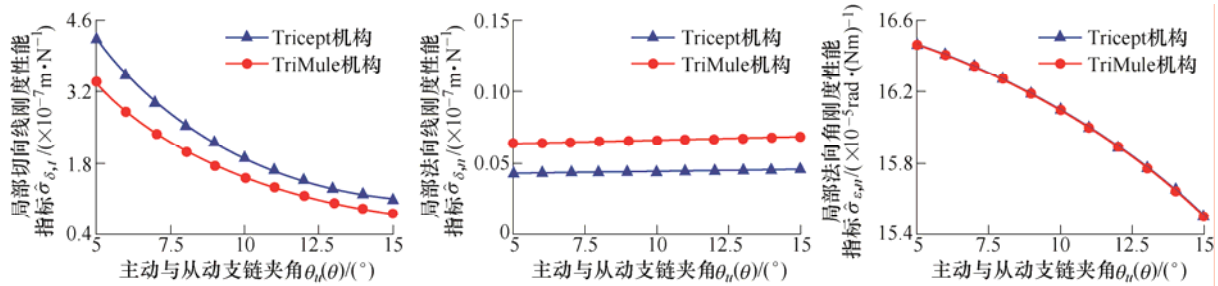
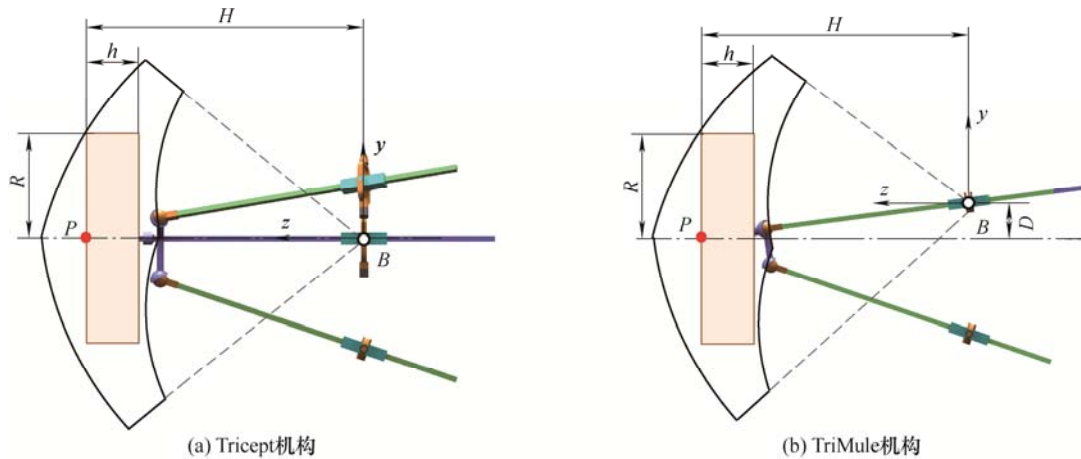
图 3 两种机构 $\hat{\sigma}_{\delta,i}$ 、 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\hat{\sigma}_{\epsilon,n}$ 随 $\theta_u(\theta)$ 的变化规律

图 4 两种机构的任务工作空间示意图

为了考察两种机构刚度性能在全域的分布规律, 定义它们的任务工作空间 W_T 为高度为 h 、半径为 R 的圆柱体(图 4), 且图中的 D 和 H 分别如下:

TriMule 机构

$$D = \frac{q(\cos \theta_u - \cos \theta_v)(\cos \theta_u + \mu \lambda_q \lambda_e)}{\sqrt{(\mu \lambda_q \lambda_a + \sin \theta_v)^2 + (\cos \theta_u - \cos \theta_v)^2}} \quad (19)$$

Tricept 机构

$$H = \frac{q(\cos \theta_u + \mu \lambda_q \lambda_e)(\sin \theta_v + \mu \lambda_q \lambda_a)}{\sqrt{(\mu \lambda_q \lambda_a + \sin \theta_v)^2 + (\cos \theta_u - \cos \theta_v)^2}} \quad (20)$$

$$D = 0, \quad H = \frac{\Delta q(\cos \theta + \mu \lambda_q \lambda_e)}{\mu \lambda_q} \quad (21)$$

式中, $\lambda_e = e/\Delta q$ 。当给定 $R = 600 \text{ mm}$ 、 $h = 200 \text{ mm}$, $\theta_u(\theta)$ 分别取 5° 、 15° 时, 图 5 和图 6 分别示出了两种机构柔度特性 $\sigma_{\delta,t}$ 、 $\sigma_{\delta,n}$ 和 $\sigma_{\varepsilon,n}$ 在任务工作空间 W_T 中的分布规律, 由图可得以下几点。

(1) 两种机构的 $\sigma_{\delta,t}$ 均在 W_T 上平面中点附近取得最小值, 此时机构的切向线刚度性能最优; 当 $\theta_u = \theta$ 时, TriMule 机构的 $\sigma_{\delta,t}$ 数值整体小于 Tricept 机构, 表明前者的切向线刚度性能优于后者。

(2) 对于不同的 $\theta_u(\theta)$, 两种机构 $\sigma_{\delta,n}$ 的数值变化并不明显, 表明两种机构的法向线刚度性能均可近似视为与 $\theta_u(\theta)$ 无关; 当 $\theta_u = \theta$ 时, TriMule 机构 $\sigma_{\delta,n}$ 的数值整体大于 Tricept 机构, 表明后者的法向线刚度性能优于前者。

(3) 两种机构的 $\sigma_{\varepsilon,n}$ 对 $\theta_u(\theta)$ 并不敏感, 且当 $\theta_u = \theta$ 时, 二者 $\sigma_{\varepsilon,n}$ 的数值相当, 表明两种机构的法向角刚度性能近似。

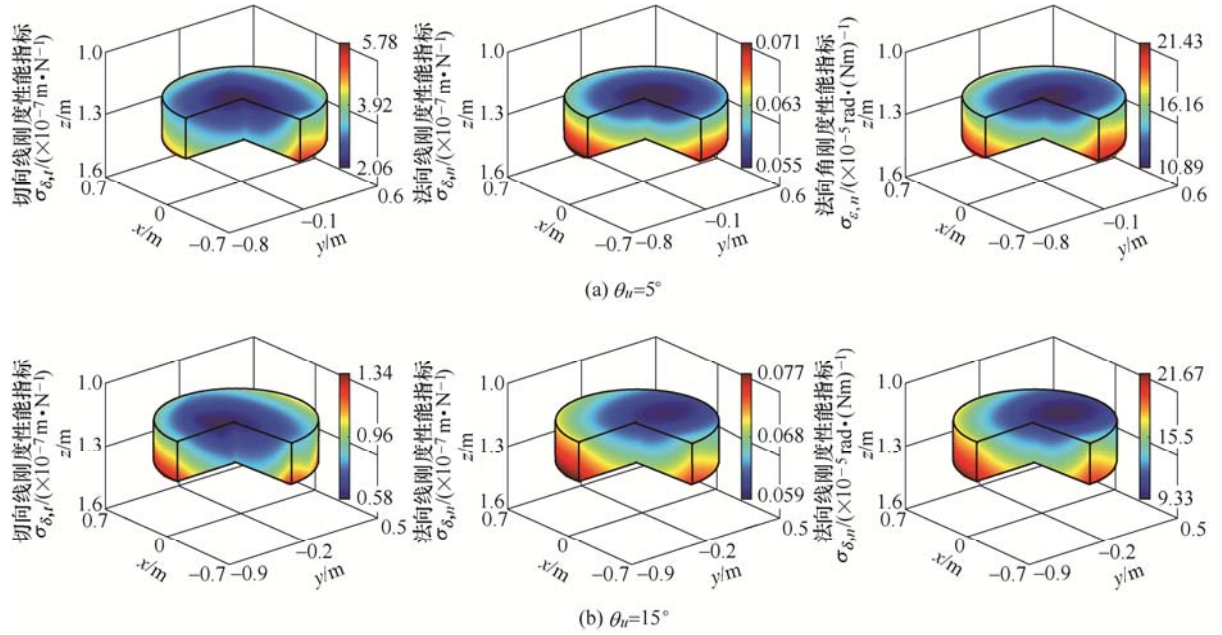


图 5 TriMule 机构 $\sigma_{\delta,t}$ 、 $\sigma_{\delta,n}$ 和 $\sigma_{\varepsilon,n}$ 在 W_T 内的分布规律

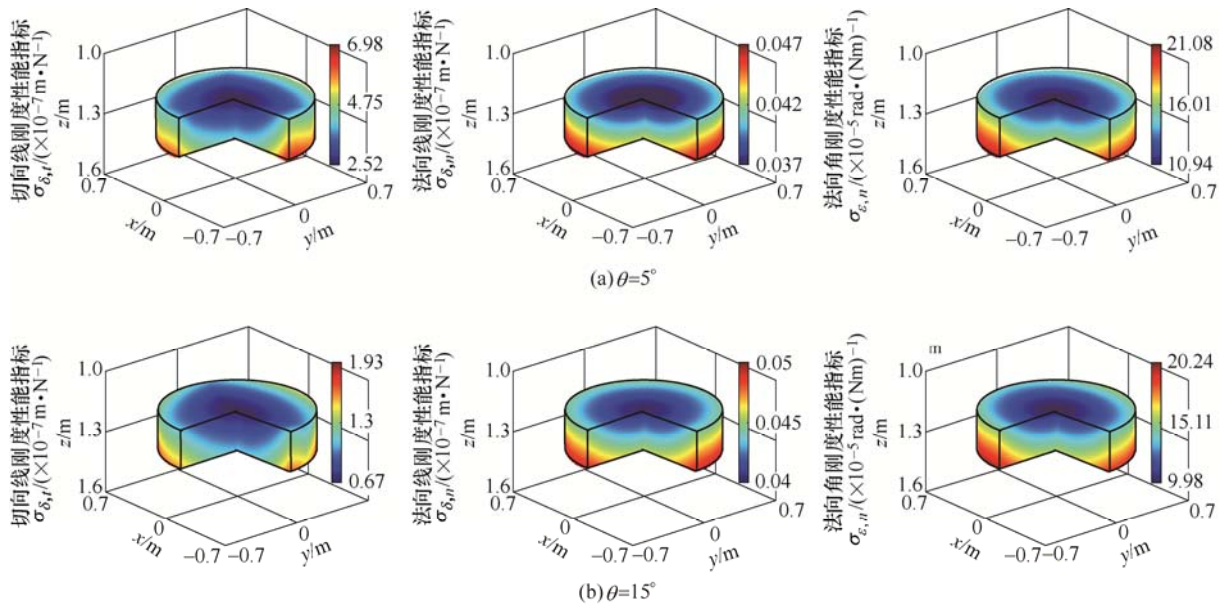


图 6 Tricept 机构 $\sigma_{\delta,t}$ 、 $\sigma_{\delta,n}$ 和 $\sigma_{\varepsilon,n}$ 在 W_T 内的分布规律

为了对比两种机构在任务空间中的全域刚度, 用均值定义如下全域刚度性能评价指标

$$\bar{\sigma}_{\delta,t} = \frac{\int_V \sigma_{\delta,t} dV}{V} \quad \bar{\sigma}_{\delta,n} = \frac{\int_V \sigma_{\delta,n} dV}{V} \quad \bar{\sigma}_{\varepsilon,n} = \frac{\int_V \sigma_{\varepsilon,n} dV}{V} \quad (22)$$

式中, V 表示 W_T 的体积。表 3、表 4 分别列出了 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ 、 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ 及 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$ 、 $\bar{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$ 随 $\theta_u(\theta)$ 变化的数值。显见, 两种机构的 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ ($\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$) 与 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$ ($\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$) 均随 $\theta_u(\theta)$ 增大单调递减, 而 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 与 $\bar{\sigma}_{\delta,n}$ 均随 $\theta_u(\theta)$ 增大单调递增, 故 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ ($\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$) 与 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$ ($\bar{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$) 是强相关的。

表 3 TriMule 机构局部和全域刚度性能

支链 夹角 θ_u /(°)	支链 夹角 θ_v /(°)	局部切 向线刚 度性能 指标 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	全域切 向线刚 度性能 指标 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	局部法 向线刚 度性能 指标 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	全域法 向线刚 度性能 指标 $\bar{\sigma}_{\delta,n}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	局部法 向角刚 度性能 指标 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ ($10^{-5}\text{rad}\cdot(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}$)	全域法 向角刚 度性能 指标 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$ ($10^{-5}\text{rad}\cdot(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}$)
5°	11.4°	3.399	3.540	0.064	0.063	16.457	15.889
10°	20.7°	1.490	1.591	0.066	0.064	16.097	15.556
15°	32.7°	0.819	0.898	0.068	0.068	15.499	15.033

表 4 Tricept 机构局部和全域刚度性能

支链 夹角 θ /(°)	局部切 向线刚 度性能 指标 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	全域切 向线刚 度性能 指标 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	局部法 向线刚 度性能 指标 $\hat{\sigma}_{\delta,n}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	全域法 向线刚 度性能 指标 $\bar{\sigma}_{\delta,n}$ ($10^{-7}\text{m}\cdot\text{N}^{-1}$)	局部法 向角刚 度性能 指标 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ ($10^{-5}\text{rad}\cdot(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}$)	全域法 向角刚 度性能 指标 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$ ($10^{-5}\text{rad}\cdot(\text{N}\cdot\text{m})^{-1}$)
5°	4.212	4.368	0.043	0.042	16.457	15.836
10°	1.906	2.021	0.044	0.043	16.097	15.487
15°	1.074	1.167	0.046	0.045	15.499	14.929

为了定量描述 $\hat{\sigma}_{\delta,t}$ ($\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$) 与 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$ ($\bar{\sigma}_{\delta,n}$ 、 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$) 的相关性, 采用表 3 和表 4 中数据首先拟合出它们关于 $\theta_u(\theta)$ 的二次响应面^[34](见表 5 和表 6), 进而得到两者之间的线性关系(见表 7 和表 8)。由表可见, 仅需用前者便可准确地预测后者。

表 5 TriMule 机构的响应面系数

刚度性能指标	响应面系数 α_0	响应面系数 α_1	响应面系数 α_2
$\hat{\sigma}_{\delta,t}$	6.546 0	-0.753 2	0.024 8
$\bar{\sigma}_{\delta,t}$	6.745 0	-0.766 6	0.025 1
$\hat{\sigma}_{\delta,n}$	0.062 0	0.000 4	0
$\bar{\sigma}_{\delta,n}$	0.065 0	-0.000 7	0.000 06
$\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$	16.579 0	-0.000 6	-0.004 8
$\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$	16.032 0	-0.009 6	-0.003 8

表 6 Tricept 机构的响应面系数

刚度性能指标	响应面系数 α_0	响应面系数 α_1	响应面系数 α_2
$\hat{\sigma}_{\delta,t}$	7.992 0	-0.903 4	0.029 5
$\bar{\sigma}_{\delta,t}$	8.208 0	-0.917 3	0.029 9
$\hat{\sigma}_{\delta,n}$	0.043 0	-0.000 1	0.000 02
$\bar{\sigma}_{\delta,n}$	0.042 0	-0.000 1	0.000 02
$\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$	16.579 0	-0.000 6	-0.004 8
$\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$	15.976 0	-0.007 1	-0.004 2

表 7 TriMule 机构局部与全域指标间线性关系系数

刚度性能指标	线性关系系数 β_0	线性关系系数 β_1
$\hat{\sigma}_{\delta,t}$ 与 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$	0.063	1.023
$\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 与 $\bar{\sigma}_{\delta,n}$	-0.018	1.250
$\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ 与 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$	1.211	0.892

表 8 Tricept 机构局部与全域指标间线性关系系数

刚度性能指标	线性关系系数 β_0	线性关系系数 β_1
$\hat{\sigma}_{\delta,t}$ 与 $\bar{\sigma}_{\delta,t}$	0.074	1.020
$\hat{\sigma}_{\delta,n}$ 与 $\bar{\sigma}_{\delta,n}$	-0.001	1.000
$\hat{\sigma}_{\varepsilon,n}$ 与 $\bar{\sigma}_{\varepsilon,n}$	0.275	0.945

4 结 论

本文采用旋量理论系统研究了 TriMule 和 Tricept 机器人中 1T2R 机构的刚度半解析建模与性能评价问题, 得到如下结论。

(1) 在参考位形下, 因 Tricept 机构为轴对称机构, 故其切向线柔度特性是各向同性的; 虽然 TriMule 机构是面对称的, 但对于给定的 θ_u , 当 θ_v 满足式(18)时, 其切向线柔度特性一定也是各向同性的。

(2) 对于一组相同的尺度、结构和任务空间参数, 两种机构的局部与全域刚度性能相近, 且是强线性相关的, 可用前者准确地预测后者。

参 考 文 献

- [1] NEUMANM K E. Tricept application[C]// Proceedings of 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, Zwickau, Germany, 2002: 547-551.
- [2] OLAZAGOITIA J L, WYATT S. New PKM Tricept T9000 and its application to flexible manufacturing at aerospace industry[C]// SAE International, 2007: 07ATC-94.

- [3] URIARTE L, ZATARAIN M, AXINTE D, et al. Machine tools for large parts[J]. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 2013, 62(2): 731-750.
- [4] 谢福贵, 梅斌, 刘辛军, 等. 一种大型复杂构件加工新模式及新装备探讨[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(19): 70-78.
- XIE Fugui, MEI Bin, LIU Xinjun, et al. Novel mode and equipment for machining large complex components[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(19): 70-78.
- [5] ZHANG D. Kinetostatic analysis and optimization of parallel and hybrid architectures for machine tools[D]. Québec: Laval University, 2000.
- [6] ZHANG D, GOSSELIN C M. Kinetostatic modelling of parallel mechanisms with a passive constraining leg and revolute actuators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37: 599-617.
- [7] LI Y, XU Q. Stiffness analysis for a 3-PUU parallel kinematic machine [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2008, 43(2): 186-200.
- [8] XU Q, LI Y. An investigation on mobility and stiffness of a 3-DOF translational parallel manipulator via screw theory[J]. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2008, 24(3): 402-414.
- [9] PASHKEVICH A, CHABLAT D, WENGER P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44(5): 966-982.
- [10] WANG M X, LIU H T, HUANG T, et al. Compliance analysis of a 3-SPR parallel mechanism with consideration of gravity[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 84: 99-112.
- [11] LIU H T, HUANG T, CHETWYND D G, et al. Stiffness modeling of parallel mechanisms at limb and joint/link levels[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2017, 33(3): 734-741.
- [12] 张俊, 赵艳芹. Exechon 并联模块的静刚度建模与分析[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(19): 34-41.
- ZHANG Jun, ZHAO Yanqin. Stiffness modeling and evaluation for Exechon parallel kinematic machine module[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(19): 34-41.
- [13] 窦永磊, 汪满新, 王攀峰, 等. 一种 6 自由度混联机器人静刚度分析[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(7): 38-44.
- DOU Yonglei, WANG Manxin, WANG Panfeng, et al. Stiffness analysis of a 6-DOF hybrid robot[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(7): 38-44.
- [14] CECCARELLI M, CARBONE G. A stiffness analysis for CaPaMan (Cassino parallel manipulator)[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37: 427-439.
- [15] TSAI L W, JOSHI S. Kinematic analysis of 3-DOF position mechanisms for use in hybrid kinematic machines[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2002, 124(2): 245-253.
- [16] ENFERADI J, AKBARZADEH A. Accuracy and stiffness analysis of a 3-RRP spherical parallel manipulator[J]. *Robotica*, 2011, 29(2): 193-209.
- [17] REZAEI A, AKBARZADEH A, AKBARZADEH T M R. An investigation on stiffness of a 3-PSP spatial parallel mechanism with flexible moving platform using invariant form[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 51: 195-216.
- [18] BELKACEM B. Multi-objective optimal design based kineto-elastostatic performance for the delta parallel mechanism[J]. *Robotica*, 2016, 34(2): 258-273.
- [19] ZHANG D, XI F, MECHEFSKE C M, et al. Analysis of parallel kinematic machine with kinetostatic modelling method[J]. *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, 2004, 20(2): 151-165.
- [20] XI F, ZHANG D, MECHEFSKE C M, et al. Global kinetostatic modelling of tripod-based parallel kinematic machine[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2004, 39(4): 357-377.
- [21] LI Y G, LIU H T, HUANG T, et al. Design of a 3-DOF PKM module for large structural component machining[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2010, 45(6): 941-954.
- [22] WANG Y Y, LIU H T, HUANG T, et al. Stiffness modelling of the Tricept robot using the overall Jacobian matrix[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2009, 1(2): 021002.
- [23] YANG C, LI Q C, CHEN Q H. Multi-objective optimization of parallel manipulators using a game algorithm[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 74: 217-243.
- [24] SHNEOR Y, PORTMAN V T. Stiffness of 5-axis machines with serial, parallel, and hybrid kinematics evaluation and comparison[J]. *CIRP Annals Manufacturing Technology*, 2010, 59(1): 409-412.
- [25] PORTMAN V T. Stiffness evaluation of machines and robots: minimum collinear stiffness value approach[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2011, 3(1): 011015.
- [26] PORTMAN V T, CHAPSKY V S, SHNEOR Y.

- Workspace of parallel kinematics machines with minimum stiffness limits collinear stiffness value based approach[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 49: 67-86.
- [27] YAN S J, ONG S K, NEE A Y C. Stiffness analysis of parallelogram-type parallel manipulators using a strain energy method[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2016, 37: 13-22.
- [28] WANG H, ZHANG L, CHEN G, et al. Parameter optimization of heavy-load parallel manipulator by introducing stiffness distribution evaluation index[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 108: 244-259.
- [29] HUANG T, DONG C L, LIU H T, et al. Five degree of freedom hybrid robot with rotational supports[P]: US, Patent No. 9943967, 2018-04-17.
- [30] 黄田, 董成林, 刘海涛, 等. 一种含多轴转动支架的五自由度混联机器人: 中国, ZL 201510401279.9[P]. 2017-01-11.
- HUANG Tian, DONG Chenglin, LIU Haitao, et al. Five degree of freedom hybrid robot with rotational supports[P]: China, ZL 201510401279.9, 2017-01-11.
- [31] 董成林. 一种新型五自由度混联机器人的参数化建模与集成设计方法研究[D]. 天津: 天津大学, 2020.
- DONG Chenglin. Modeling and integrated design of a novel 5-DOF hybrid robot[D]. Tianjin: Tianjin University, 2020.
- [32] NEUMANM K E. Robot: US, Patent No. 4732525[P]. 1988-03-22.
- [33] HUANG T, YANG S F, WANG M X, et al. An approach to determining the unknown twist/wrench subspaces of lower mobility serial kinematic chains[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 7(3): 1-9.
- [34] DOUGLAS C M. Design and analysis of experiments[M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2009.
-
- 作者简介: 董成林, 男, 1992 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机器人机构学。
E-mail: chenglindong_tju@tju.edu.cn
- 岳巍, 男, 1994 年出生, 博士研究生。主要研究方向为机器人机构学。
E-mail: yuewei@tju.edu.cn
- 刘海涛(通信作者), 男, 1981 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为机器人机构学, 工业机器人与智能制造。
E-mail: liuht@tju.edu.cn
- 黄田, 男, 1953 年出生, 教授, 博士研究生导师。主要研究方向为制造装备与系统, 机器人学, 机械动力学。
E-mail: tianhuang@tju.edu.cn
- 肖聚亮, 男, 1977 年出生, 副教授, 博士研究生导师。主要研究方向为人机协作与控制、机器人化智能制造、机电液一体化控制。
E-mail: tjxjl@tju.edu.cn