DOI: 10.3901/JME.2021.17.173

磁悬浮轴承多自由度转子系统的协同控制建模与仿真研究^{*}

竺志大 王文军 寇海江 曾励 戴敏 张帆
(扬州大学机械工程学院 扬州 225127)

摘要: 电磁轴承具有无摩擦和磨损、寿命长、无油污染等优点而具有广泛的应用前景。针对非线性、高维特性以及负载不确定性和大范围变化的磁悬浮轴承的转子动力系统,建立了系统的原型模型,基于逆系统对系统进行非线性解耦伪线性化,并设计了对伪线性化系统的协同控制器,构建了基于协同控制策略的闭环控制系统,并对系统进行了仿真研究,仿真结果表明:经过逆系统解耦的磁悬浮轴承支承的多自由度转子动力系统,在协同控制作用下,系统具有无超调且响应速度快、抗负载干扰的鲁棒性强、稳态性能好等优点,与传统PID控制策略比较具有更好的动态性能和稳态性能。

关键词: 磁悬浮轴承; 转子; 协同控制; 数学模型; 仿真

中图分类号: TM355

Research on Modeling and Simulation of Cooperative Control for Multi-degree-of-freedom Rotor System of Magnetic Bearing

ZHU Zhida WANG Wenjun KOU Haijiang ZENG Li DAI Min ZHANG Fan
(School of Mechanical Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127)

Abstract: The electromagnetic bearing has the advantages of no friction and wear, long life and no oil pollution, and has wide application prospects. Aiming at the non-linearity, high-dimensional characteristics, load uncertainty and large-scale variation of the magnetic suspension bearing rotor power system, the prototype model of the system is established. Based on the inverse system, the non-linear decoupling pseudo-linearization of the system is carried out, and the cooperative controller of the pseudo-linearized system is designed. The closed-loop control system based on the cooperative control strategy is constructed, and the system is simulated and studied. The simulation results show that the multi-degree-of-freedom rotor power system supported by magnetic suspension bearing decoupled by inverse system has the advantages of no overshoot, fast response, strong robustness against load disturbance and good steady-state performance under the cooperative control. Compared with the traditional PID control strategy, the system has better dynamic and steady-state performance.

Key words: magnetic bearing; rotor; cooperative control; mathematical model; simulation

0 前言

磁悬浮轴承的传统控制策略主要有比例-微分-积分(Proportion integration differentiation, PID)控制。基于PID控制具有简单、实用以及调整参数方便等诸多优点,但PID控制策略主要用于对磁悬浮

轴承系统进行分散控制,即各自由度不考虑彼此之间的耦合,都按单输入-单输出控制系统设计。由于主动磁悬浮轴承支承的转子动力系统是多输入-多输出系统,并且各自由度之间存在高度非线性强耦合关系,需要解耦控制^[1-2]。在解耦控制中,智能解耦法对系统模型的精确度要求较低,鲁棒性强,但计算量大,编程复杂,实时性差,在电磁轴承支承转子系统中的应用不多。反馈线性化解耦法计算量较小、结构相对简单、便于实现,逐渐成为

^{*} 国家自然科学基金(51375427, 52005434)和江苏省自然科学基金(BK20190912)资助项目。20200930收到初稿,20210317收到修改稿

研究的热点。反馈线性化解耦法主要包括微分几何方法和逆系统方法。与微分几何方法相比,逆系统方法无需经过复杂抽象的坐标变换,物理意义明确,更易实现。

逆系统方法是对于给定的系统,用对象的模型生成一种可用反馈方法实现的原系统的“ α 阶积分逆系统”,将对象补偿成为具有线性传递关系且已解耦的一种规范化系统,将两者串联成为伪线性系统然后再用线性系统的各种设计理论来完成对伪线性系统的综合。在使用逆系统方法时,首先要面对的是该非线性系统的可逆性。系统的可逆性可分为左可逆和右可逆。系统的左可逆性又称为函数可观性,右可逆性又称为函数可控性。当主要研究对象为磁悬浮轴承转子非线性系统的控制时,所提及的逆系统一般均指右逆系统。将逆系统与原系统串联即可构成逆系统解耦的磁悬浮轴承支承的转子动力学伪线性解耦控制系统。但由于系统噪声、不平衡力等扰动的影响及模型误差的客观存在性,逆系统控制方法往往会影响系统的跟踪特性和鲁棒性。为了进一步提升控制性能,常将 μ 综合控制、 H_∞ 控制等现代控制算法应用于解耦后的子系统。

通过 PID 结合逆系统解耦控制策略对磁悬浮控制系统进行非线性解耦控制已经有所应用^[3-4]。考虑陀螺运动的磁悬浮轴承支承转子动力学系统,其非线性、高维特性以及负载的不确定性和大范围变化,都给系统的分析和控制增加了难度,使得采用常规控制策略往往难以设计出比较满意的控制器。针对类似这种非线性、高维特性以及负载的不确定性和大范围变化问题,文献[5]用一种积分变结构和多滑模面的鲁棒控制方法,可获得较好的稳态性和动态特性,但要求系统具有较高的带宽;文献[6]在电流内环中引入鲁棒平均电流的控制方法,以达到抑制输入电压及负载等的扰动;文献[7]基于鲁棒控制策略,将输出电压的控制与扰动补偿控制分离,可提高系统的带宽。文献[8]基于协同控制方法对多组并联 DC-DC Buck 变换器进行了设计,明显提高了系统的快速响应速度及跟随性。

协同控制是协同学在控制领域的应用,其基本思想是自组织原理,利用开放系统的自组织能力,通过协同控制器在系统中产生相互协作的行为,引导着系统各部分协调一致的达到平衡点。协同控制通过连续的控制规律,使系统可以在有限的时间内逐步收敛到达设定好的流形上,且系

统到达流形的动态过程可以设定,并最终使系统保持稳定运行。根据协同控制理论设计的控制器具有很好的稳态特性和动态性能,对外部干扰有较强的鲁棒性,并且通过选择合适的宏变量,可以降低对系统未知参数的敏感性。基于协同控制策略对各种多体对象的控制系统很多^[9-10],但具体应用于磁悬浮系统控制方面还很少,文献[11]基于 PI 协同控制策略对磁悬浮姿控储能两用飞轮能量转换系统,提出一种用于并联 DC-DC Buck 变换器拓扑结构的 PI 协同控制方法,克服了基本协同控制方法对负载变化适应性和鲁棒性差的不足。仿真和试验结果表明,在负载突变和大范围变化的情况下,系统输出电压稳定、纹波小、鲁棒性好;文献[12]提出了一种磁悬浮反作用飞轮速率模式非线性协同控制方法,该控制方法可改善转速过零特性,增强飞轮对随机力矩扰动的鲁棒性,提高制动控制的准确性,以及飞轮输出力矩的精度。可见,基于协同控制策略控制系统具有抗扰动的鲁棒性和系统控制稳态性好等优点。因此,本文结合逆系统解耦特性,提出基于协同控制策略对磁悬浮轴承转子动力系统进行非线性解耦控制。建立协同控制系统模型,并对系统进行仿真分析,仿真结果表明采用该种控制方法可以快速且平稳地实现位移、转速的控制和负载变化的跟随,且在应对扰动与突变情况时,也可以使其结果快速地稳定在具体值,说明该控制系统具有良好的稳态与动态特性,应对外部干扰引起的不平衡响应(转速与负载突变)时具有较强的鲁棒性。

1 磁悬浮轴承的非线性数学模型

1.1 磁悬浮轴承的电磁模型

(1) 磁悬浮轴承的电磁力方程

设径向和轴向磁悬浮轴承的电磁铁线圈匝数 N 、有效磁极面积 S 、线圈偏置电流 I_0 、工作气隙 g_0 等均相同,并假设:① 忽略磁悬浮轴承转子的体积,将其看成一个质点,选取质量;② 不考虑绕组漏磁通;③ 假设铁芯与转子之间的磁阻为零;④ 不考虑磁滞和涡流对系统的影响。根据磁悬浮轴承理论^[13],可得径向电磁力和轴向电磁力的统一表达式为

$$F_k^n = N^2 \mu_0 S \left[\left(\frac{I_0 + i_k^n}{g_0 + k_n} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_k^n}{g_0 - k_n} \right)^2 \right] \quad (1)$$

$$= F(k_n, i_k^n)$$

式中, $k=x,y,z$ 分别为径向磁悬浮轴承在 x 方向、 y 方向位移以及 z 轴方向的位移标识; $n=l,r,g$ 分别为磁悬浮轴承转子左端、右端以及形心位置标识; i 为线圈绕组的控制电流。

由上式可知, 磁悬浮轴承的电磁悬浮力绕组的控制电流以及转子的位移(气隙长度)之间为非线性关系。

磁悬浮轴承电磁力的响应速度为

$$\dot{F}_k^n = 4K \left[\frac{A(k_n) \frac{di_k^n}{dt} - B(k_n, i_k^n) \frac{dk_n}{dt}}{C(k_n)} \right] \quad (2)$$

式中, $K = N^2 \mu_0 S$; $k=x,y,z$; $n=l,r,g$; $A(k_n) = g_0^4 - k_n^4$; $C(k_n) = (g_0^2 - k_n^2)^3$; $B(k_n, i_k^n) = (g_0^3 + 3g_0 k_n^2)[I_0^2 + (i_k^n)^2] + (k_n^3 + 3g_0^2 k_n)I_0 i_k^n$

(2) 磁悬浮轴承的驱动电压方程

由欧姆定律和法拉第定律可得转子在 n 处磁悬浮轴承 k 方向驱动线圈的电压方程为^[14]

$$\begin{cases} u_{1k}^n = L_{1k}^n \frac{di_{1k}^n}{dt} + (I_0 + i_k^n) \frac{dL_{1k}^n}{dt} + (I_0 + i_k^n)R \\ u_{2k}^n = -L_{2k}^n \frac{di_{2k}^n}{dt} + (I_0 - i_k^n) \frac{dL_{2k}^n}{dt} + (I_0 - i_k^n)R \end{cases} \quad (3a)$$

式中, R 为线圈等效电阻。

$$L_{1k}^n = \frac{K}{g_0 + k_n}, \quad L_{2k}^n = \frac{K}{g_0 - k_n}$$

$$\frac{dL_{1k}^n}{dt} = -\frac{K}{(g_0 + k_n)^2} \frac{dk_n}{dt}, \quad \frac{dL_{2k}^n}{dt} = \frac{K}{(g_0 - k_n)^2} \frac{dk_n}{dt}$$

将式(3)的 2 式相减, 可得磁悬浮轴承电磁铁在 k 方向的驱动线圈电压方程为

$$u(k, i, n) = 2 \left[D(k_n) \cdot \frac{di_k^n}{dt} - E(k_n) \cdot \frac{dk_n}{dt} + H(k_n) \cdot i_k^n \right] \quad (3b)$$

$$D(k_n) = \frac{Kg_0}{g_0^2 - k_n^2}, \quad E(k_n) = \frac{KI_0(g_0^2 + k_n^2)}{(g_0^2 - k_n^2)^2}$$

$$H(k_n) = \frac{Kg_0 k_n}{(g_0^2 - k_n^2)^2} + R$$

由上式可见, 磁悬浮轴承驱动线圈的电压与转子位移之间也是非线性关系。

1.2 转子动力学方程

对磁悬浮轴承支承转子系统的受力分析如图 1 所示, 图中, O_g 为转子的理想质心, 作为坐标原点,

x_g 、 y_g 、 z_g 为坐标轴; ω_r 为转子角频率。

图 1 转子受力分析

根据转子动力学原理, 考虑转子的陀螺效应时系统的运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_g + F_x^l + F_x^r = f_x^d \\ m\ddot{y}_g + F_y^l + F_y^r = f_y^d \\ m\ddot{z}_g + F_z^g = f_z^d \\ J\ddot{\lambda} - \omega_r I \dot{\tau} = l_l F_x^l - l_r F_x^r - M_d(x_l, x_r) \\ J\ddot{\tau} + \omega_r I \dot{\lambda} = l_l F_y^l - l_r F_y^r - M_d(y_l, y_r) \\ I\dot{\omega}_r = T_e - T_L \end{cases} \quad (4)$$

式中, F_x 表示径向悬浮力在 x 轴分量, F_y 表示径向悬浮力在 y 轴分量, F_z 表示轴向悬浮力, f_x 表示径向干扰力在 x 轴分量, f_y 表示径向干扰力在 y 轴分量, f_z 表示轴向干扰力; l_l 、 l_r 为左、右两端磁悬浮轴承所在位置距 O_g 的长度; τ 、 λ 分别是转子相对于 x_g 、 y_g 轴的角位移; I 为极转动惯量, J 为赤道转动惯量; T_L 为负载转矩; $M_d(x_l, x_r)$ 为干扰负载绕 y 轴的分量; $M_d(y_l, y_r)$ 为干扰负载绕 x 轴的分量。

式(1)~(4)即是磁悬浮轴承支承转子系统的数学模型。可见, 系统为高度耦合的非线性系统。

1.3 系统的状态空间模型

设磁悬浮轴承支承系统的输入变量为

$$U = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T = [u_x^l, u_y^l, u_x^r, u_y^r, u_z, T_e]^T$$

选取状态变量

$$X = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}]^T$$

$$= [x_g, y_g, z_g, \lambda, \tau, \dot{x}_g, \dot{y}_g, \dot{z}_g, \dot{\lambda}, \dot{\tau}, \omega_r, i_x^l, i_y^l, i_x^r, i_y^r, i_z]^T$$

输出变量

$$Y = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]^T = [x_l, x_r, y_l, y_r, z_g, \omega_r]^T$$

由磁悬浮轴承支承系统的数学模型, 可得到系统的状态方程为

$$[\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{x}_5]^T = [x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]^T \quad (5a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_6 = -\frac{1}{m}[F_x^l + F_x^r] + \frac{1}{m}f_x^d \\ \dot{x}_7 = -\frac{1}{m}[F_y^l + F_y^r] + \frac{1}{m}f_y^d \\ \dot{x}_8 = -\frac{1}{m}F_z^g + \frac{1}{m}f_z^d \\ \dot{x}_9 = \frac{1}{J}[l_l F_x^l - l_r F_x^r + M_x^d + I \cdot x_{11} \cdot x_{10}] \\ \dot{x}_{10} = \frac{1}{J}[l_l F_y^l - l_r F_y^r + M_y^d - I \cdot x_{11} \cdot x_9] \end{cases} \quad (5b)$$

由式(1)可得

$$\begin{cases} F_x^l = K \left[\left(\frac{I_0 + x_{12}}{g_0 + y_1} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - x_{12}}{g_0 - y_1} \right)^2 \right] \\ F_x^r = K \left[\left(\frac{I_0 + x_{14}}{g_0 + y_2} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - x_{14}}{g_0 - y_2} \right)^2 \right] \\ F_y^l = K \left[\left(\frac{I_0 + x_{13}}{g_0 + y_3} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - x_{13}}{g_0 - y_3} \right)^2 \right] \\ F_y^r = K \left[\left(\frac{I_0 + x_{15}}{g_0 + y_4} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - x_{15}}{g_0 - y_4} \right)^2 \right] \\ F_z^g = K \left[\left(\frac{I_0 + x_{16}}{g_0 + y_5} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - x_{16}}{g_0 - y_5} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (5c)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = \frac{1}{I}(u_6 - T_L) = f_{11}(u_6) \\ \dot{x}_{12} = \frac{1}{D(y_1)} \left[E(y_1) \cdot \dot{y}_1 - H(y_1) \cdot x_{12} + \frac{1}{2}u_1 \right] \\ \dot{x}_{13} = \frac{1}{D(y_3)} \left[E(y_3) \cdot \dot{y}_3 - H(y_3) \cdot x_{13} + \frac{1}{2}u_2 \right] \\ \dot{x}_{14} = \frac{1}{D(y_2)} \left[E(y_2) \cdot \dot{y}_2 - H(y_2) \cdot x_{14} + \frac{1}{2}u_3 \right] \\ \dot{x}_{15} = \frac{1}{D(y_4)} \left[E(y_4) \cdot \dot{y}_4 - H(y_4) \cdot x_{15} + \frac{1}{2}u_4 \right] \\ \dot{x}_{16} = \frac{1}{D(y_5)} \left[E(y_5) \cdot \dot{y}_5 - H(y_5) \cdot x_{16} + \frac{1}{2}u_5 \right] \end{cases} \quad (5d)$$

式中, $D(\cdot)$ 、 $E(\cdot)$ 、 $H(\cdot)$ 由式(3b)确定。

输出变量及其输出方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]^T \\ &= [x_l, x_r, y_l, y_r, z_g, \omega_r]^T \\ &= [x_1 - l_l x_4, x_1 + l_r x_4, x_2 - l_l x_5, x_2 + l_r x_5, x_3, x_{11}]^T \end{aligned} \quad (5e)$$

从系统数学模型可看出, 磁悬浮轴承转子支承驱动系统是一个多变量、强耦合、非线性的系统, 不仅单个电磁径向悬浮力存在着耦合, 而且左端和右端的径向偏移通过转子也存在着严重的耦合关系, 由系统状态方程及输出方程式(5)可得系统的控制结构如图 2 所示。

图 2 系统状态结构图

2 非线性逆系统解耦控制模型

2.1 逆系统的可逆性分析

逆系统控制方法可实现对原系统的线性化解耦, 由状态方程可知, 磁悬浮轴承转子动力系统的数学模型为 6 输入 6 输出的 16 阶非线性系统, 为实现解耦控制, 本文根据逆系统理论和 Interactor 算法^[15], 分析磁悬浮轴承

转子动力系统的可逆性, 利用逆系统方法, 计算磁悬浮轴承转子动力系统的输出变量 $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]^T$ 对时间的导数, 直到明显含 $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6]^T$ 为止, 并令 $K_{11} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{l_l^2}{J}\right)$, $K_{11} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{l_l^2}{J}\right)$, $K_{12} = -\left(\frac{1}{m} - \frac{l_l \cdot l_r}{J}\right)$, $K_{22} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{l_r^2}{J}\right)$, 由系统状态方程式(5)可得系统的 α 阶导数为

$$\begin{cases}
\ddot{y}_1 = \ddot{x}_6 - l_f \ddot{x}_9 = K_{11} \dot{F}_x^l + K_{12} \dot{F}_x^r - \frac{I \cdot l_f}{J} \cdot (\dot{x}_{11} \cdot x_{10} + x_{11} \cdot \dot{x}_{10}) \\
\ddot{y}_2 = \ddot{x}_6 + l_r \ddot{x}_9 = K_{12} \dot{F}_x^l + K_{22} \dot{F}_x^r + \frac{I \cdot l_r}{J} \cdot (\dot{x}_{11} \cdot x_{10} + x_{11} \cdot \dot{x}_{10}) \\
\ddot{y}_3 = \ddot{x}_7 - l_f \ddot{x}_{10} = K_{11} \dot{F}_y^l + K_{12} \dot{F}_y^r - \frac{I \cdot l_f}{J} \cdot (\dot{x}_{11} \cdot x_9 + x_{11} \cdot \dot{x}_9) \\
\ddot{y}_4 = \ddot{x}_7 + l_r \ddot{x}_{10} = K_{12} \dot{F}_y^l + K_{22} \dot{F}_y^r + \frac{I \cdot l_r}{J} \cdot (\dot{x}_{11} \cdot x_9 + x_{11} \cdot \dot{x}_9) \\
\ddot{y}_5 = \ddot{x}_3 = \ddot{x}_8 = -\frac{4K}{m} \left(\frac{A(x_3)}{C(x_3)} \dot{x}_{16} - \frac{B(x_3, x_{16})}{C(x_3)} x_8 \right) \\
\dot{y}_6 = \dot{x}_{11} = \frac{1}{I} (u_6 - T_L)
\end{cases}
\quad (6)$$

由式(2)可得

取矩阵 $A(U) = [\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4, \ddot{y}_5, \dot{y}_6]^T$, 通过研究矩阵 $A(U)$ 特性, 就可对磁悬浮支承的转子动力系统的可逆性进行研究。计算 $A(U)$ 对 U 的导数得到

$$\frac{\partial A(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{2K \cdot K_{11} \cdot A(y_1)}{C(y_1) \cdot D(y_1)} & 0 & \frac{2K \cdot K_{12} \cdot A(y_2)}{C(y_2) \cdot D(y_2)} & 0 & 0 & -\frac{l_f}{J} x_{10} \\ \frac{2K \cdot K_{12} \cdot A(y_1)}{C(y_1) \cdot D(y_1)} & 0 & \frac{2K \cdot K_{22} \cdot A(y_2)}{C(y_2) \cdot D(y_2)} & 0 & 0 & \frac{l_r}{J} x_{10} \\ 0 & \frac{2K \cdot K_{11} \cdot A(y_3)}{C(y_3) \cdot D(y_3)} & 0 & \frac{2K \cdot K_{12} \cdot A(y_4)}{C(y_4) \cdot D(y_4)} & 0 & -\frac{l_f}{J} x_9 \\ 0 & \frac{2K \cdot K_{12} \cdot A(y_3)}{C(y_3) \cdot D(y_3)} & 0 & \frac{2K \cdot K_{22} \cdot A(y_4)}{C(y_4) \cdot D(y_4)} & 0 & \frac{l_r}{J} x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2KA(y_5)}{mC(y_5) \cdot D(y_5)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \ddot{y}_6}{\partial u_6} = \frac{1}{I} \end{pmatrix}$$

所以, $\text{rank} \left[\frac{\partial A}{\partial U} \right] = 6$, $\frac{\partial A}{\partial U}$ 非奇异。由上可知,

系统的相对阶 $\alpha = (3, 3, 3, 3, 3, 1)$, 可得出 $\sum_{i=1}^6 \alpha_i = 16$,

已知系统的状态方程为 16 阶, 所以由式(5)表示的系统可逆。

2.2 建立逆系统模型

令 $A(U) = [\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{y}_3, \ddot{y}_4, \ddot{y}_5, \dot{y}_6]^T = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6]^T$,

$\bar{u}_i$ 即为系统新输入, 应用逆系统理论的状态反馈线性化方法, 由式(6)可得 $\bar{u}_i$ 即为系统新输入的可逆系统为

$$\begin{cases}
\bar{u}_1 = -\lambda_1 + K_{11} \dot{F}_x^l + K_{12} \dot{F}_x^r \\
\bar{u}_2 = \lambda_2 + K_{12} \dot{F}_x^l + K_{22} \dot{F}_x^r \\
\bar{u}_3 = -\lambda_3 + K_{11} \dot{F}_y^l + K_{12} \dot{F}_y^r \\
\bar{u}_4 = \lambda_4 + K_{12} \dot{F}_y^l + K_{22} \dot{F}_y^r \\
\bar{u}_5 = -\frac{4K}{m} \frac{A(x_3)}{C(x_3)} \dot{x}_{16} + \frac{4K}{m} \frac{B(x_3, x_{16})}{C(x_3)} x_8 \\
\bar{u}_6 = \frac{1}{I} u_6 - \frac{1}{I} T_L
\end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases}
\lambda_1 = \frac{I \cdot l_f}{J} (x_{10} \cdot \dot{x}_{11} + x_{11} \cdot \dot{x}_{10}) \\
\lambda_2 = \frac{I \cdot l_r}{J} (x_{10} \cdot \dot{x}_{11} + x_{11} \cdot \dot{x}_{10}) \\
\lambda_3 = \frac{I \cdot l_f}{J} (x_9 \cdot \dot{x}_{11} + x_{11} \cdot \dot{x}_9) \\
\lambda_4 = \frac{I \cdot l_r}{J} (x_9 \cdot \dot{x}_{11} + x_{11} \cdot \dot{x}_9)
\end{cases} \quad (9)$$

由式(8)及式(9)可得

$$\begin{cases}
\dot{F}_x^l = \frac{K_{22}(\bar{u}_1 + \lambda_1) - K_{12}(\bar{u}_2 + \lambda_2)}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \\
\dot{F}_x^r = -\frac{K_{12}(\bar{u}_1 + \lambda_1) - K_{11}(\bar{u}_2 + \lambda_2)}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \\
\dot{F}_y^l = \frac{K_{22}(\bar{u}_3 + \lambda_3) - K_{12}(\bar{u}_4 + \lambda_4)}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \\
\dot{F}_y^r = -\frac{K_{12}(\bar{u}_3 + \lambda_3) - K_{11}(\bar{u}_4 + \lambda_4)}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \\
F_5 = \bar{u}_5 \\
F_6 = \bar{u}_6
\end{cases} \quad (10)$$

由式(7)及状态方程式(5)得

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = \frac{1}{I}(u_6 - T_L) \\ \dot{x}_{12} = \frac{C(y_1) \cdot \dot{F}_x^l}{4K \cdot A(y_1)} + \frac{B(y_1, x_{12})}{A(y_1)} x_6 - \frac{l_l \cdot B(y_1, x_{12})}{A(y_1)} x_9 \\ \dot{x}_{13} = \frac{C(y_3) \cdot \dot{F}_y^l}{4K \cdot A(y_3)} + \frac{B(y_3, x_{13})}{A(y_3)} x_7 - \frac{l_l \cdot B(y_3, x_{13})}{A(y_3)} x_{10} \\ \dot{x}_{14} = \frac{C(y_2) \cdot \dot{F}_x^r}{4K \cdot A(y_2)} + \frac{B(y_2, x_{14})}{A(y_2)} x_6 - \frac{l_r \cdot B(y_2, x_{14})}{A(y_2)} x_9 \\ \dot{x}_{15} = \frac{C(y_4) \cdot \dot{F}_y^r}{4K \cdot A(y_4)} + \frac{B(y_4, x_{15})}{A(y_4)} x_7 - \frac{l_r \cdot B(y_4, x_{15})}{A(y_4)} x_{10} \\ \dot{x}_{16} = \frac{1}{D(y_5)} \left(E(y_5) \cdot x_8 - H(y_5) \cdot x_{16} + \frac{1}{2} u_5 \right) \end{cases} \quad (11)$$

逆系统的输出可由状态方程式(8)~(11)得逆系统的输出方程为

$$\begin{cases} u_1 = 2D(y_1) \cdot \dot{x}_{12} - 2E(y_1) \cdot \dot{y}_1 - 2H(y_1) \cdot x_{12} \\ u_2 = 2D(y_3) \cdot \dot{x}_{13} - 2E(y_3) \cdot \dot{y}_3 - 2H(y_3) \cdot x_{13} \\ u_3 = 2D(y_2) \cdot \dot{x}_{14} - 2E(y_2) \cdot \dot{y}_2 - 2H(y_2) \cdot x_{14} \\ u_4 = 2D(y_4) \cdot \dot{x}_{15} - 2E(y_4) \cdot \dot{y}_4 - 2H(y_4) \cdot x_{15} \\ u_5 = 2D(y_5) \cdot \dot{x}_{16} - 2E(y_5) \cdot \dot{y}_5 - 2H(y_5) \cdot x_{16} \\ u_6 = I \cdot \dot{x}_{11} + T_L \end{cases} \quad (12)$$

式(12)就是磁悬浮轴承支承转子动力系统的解耦控制律。由式(8)~(12)构建逆系统非线性解耦控制模型如图 3 所示。

图 3 逆系统控制模型图

2.3 构建磁悬浮转子动力非线性解耦伪线性系统

将逆系统与原系统串联即可构成逆系统解耦的

磁悬浮轴承支承的转子动力学伪线性解耦控制系统，其结构模型如图 4 所示。

图 4 磁悬浮转子动力系统非线性解耦伪线性控制系统

从图 4 可见，解耦控制的伪线性系统各输入量对应各自的输出量，外表上看一个输入只对应一个

输出，但其内部各状态变量之间是非线性强耦合在一起的。

3 磁悬浮轴承协同控制系统设计与性能仿真

3.1 协同控制器的设计

协同控制理论是在现代数学和协同学的基础上形成的状态空间方法, 适用于设计非线性、高维系统的控制器, 其设计过程可分为两步: 定义流形和控制综合。

考虑如下 n 维非线性动态系统

$$\dot{x} = f(x, d, t) \quad (13)$$

式中, x 为状态向量, d 为控制向量, t 为时间。

根据协同控制理论设计控制器的第一步是定义宏变量。宏变量是系统状态变量的函数, 可表示为 $\psi(x, t)$, 系统的流形则定义为 $\psi(x, t) = 0$ 。宏变量应根据控制目标和性能要求来选取, 一般情况下, 可简单的选择状态变量的线性组合。对于有多个控制输出的系统, 需要定义相同数量的宏变量。

协同控制器的控制目标是使系统在有限时间内从任意初始状态收敛并保持在流形

$$\psi(x) = 0 \quad (14)$$

上, 并沿着流形趋向被控系统的平衡点。收敛到流形的动态过程可以采用如下动态方程来描述

$$T\dot{\psi} + \psi = 0 \quad (15)$$

式(15)中, T 为设计参数, 决定了系统状态变量收敛到流形 $\psi=0$ 的速度。

由于宏变量是状态变量的函数, 而状态变量又是时间的函数, 对宏变量求导得

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dx} \dot{x} \quad (16)$$

将式(13)代入式(15), 有

$$T \frac{d\psi}{dx} f(x, d, t) + \psi = 0 \quad (17)$$

求解式(17), 即可得到控制量 d 的解析解。在此控制量的作用下, 系统将从任意初始状态趋近流形 $\psi=0$, 并一直保持在该流形上。如果能保证该控制作用下系统的稳定性, 则系统必然沿此流形收敛于稳定平衡点。

(1) 构造被控系统的宏函数

对磁悬浮转子系统进行协同控制必须构建被控系统的宏函数, 再进行控制器设计。根据上述数学方程描述, 可得协同控制器的设计流程如图 5 所示。

图 5 协同控制器设计流程图

图中, $\psi_i (i=1, 2, \dots, k)$ 为被控系统的宏变量。设计协同控制器时, 确定宏变量需要包含个状态变量在内, 通常, 采用各状态变量的线性组合来建立宏函数。在本文中, 对转子各自由度进行控制, 共有 16 个状态变量, 但其中只有 $x_i (i=11, 12, \dots, 16)$ 等 6 个状态变量的微分方程中包括控制输入变量。基于式(5)状态方程中具有控制输入量的方程与其它状态变量之间的相关关系, 确定宏变量组为

$$\begin{cases} \psi_{11} = k_{11}(x_{11} - \bar{x}_{11}) + k_{10}x_{10} + k_9x_9 \\ \psi_{12} = k_{12}x_{12} + k_{x_l}(x_l - \bar{x}_l) + k_6x_6 \\ \psi_{13} = k_{13}x_{13} + k_{y_l}(y_l - \bar{y}_l) + k_7x_7 \\ \psi_{14} = k_{14}x_{14} + k_{x_r}(x_r - \bar{x}_r) + k_6x_6 \\ \psi_{15} = k_{15}x_{15} + k_{y_r}(y_r - \bar{y}_r) + k_7x_7 \\ \psi_{16} = k_{16}x_{16} + k_{z_g}(z_g - \bar{z}_g) + k_8x_8 \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\bar{x}_l$ 、 $\bar{x}_r$ 、 $\bar{y}_l$ 、 $\bar{y}_r$ 、 $\bar{z}_g$ 为磁悬浮轴承的位移参考信号, $\bar{x}_l$ 为转子自身转速参考信号。

(2) 确定系统的协同控制律

设定流形的动态收敛过程为

$$T_{li}\dot{\psi}_{li} + \psi_{li} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (19)$$

式中, $T_{li} > 0 (i=1, 2, \dots, 6)$ 为协同控制器的微分时间常数或趋近率。

联解式(12)、式(18)、式(19)得协同控制律为

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = -\frac{2D(x_l)}{k_{12}T_{12}}\psi_{12} - \frac{2[k_{xl}D(x_l) + k_{12}E(x_l)]}{k_{12}}\dot{x}_l - \frac{2k_6D(x_l)}{k_{12}}\dot{x}_6 + 2H(x_l) \cdot x_{12} \\ \bar{u}_2 = -\frac{2D(y_l)}{k_{13}T_{13}}\psi_{13} - \frac{2[k_{yl}D(y_l) + k_{13}E(y_l)]}{k_{13}}\dot{y}_l - \frac{2k_7D(y_l)}{k_{13}}\dot{x}_7 + 2H(y_l) \cdot x_{13} \\ \bar{u}_3 = -\frac{2D(x_r)}{k_{14}T_{14}}\psi_{14} - \frac{2[k_{xr}D(x_r) + k_{14}E(x_r)]}{k_{14}}\dot{x}_r - \frac{2k_6D(x_r)}{k_{14}}\dot{x}_6 + 2H(x_r) \cdot x_{14} \\ \bar{u}_4 = -\frac{2D(y_r)}{k_{15}T_{15}}\psi_{15} - \frac{2[k_{yr}D(y_r) + k_{15}E(y_r)]}{k_{15}}\dot{y}_r - \frac{2k_7D(y_r)}{k_{15}}\dot{x}_7 + 2H(y_r) \cdot x_{15} \\ \bar{u}_5 = -\frac{2D(z_g)}{k_{16}T_{16}}\psi_{16} - \frac{2[k_{zg}D(z_g) + k_{16}E(z_g)]}{k_{16}}\dot{z}_g - \frac{2k_8D(z_g)}{k_{16}}\dot{x}_8 + 2H(z_g) \cdot x_{16} \\ \bar{u}_6 = -\frac{I}{T_{11}k_{11}}\psi_{11} - \frac{k_{10}I}{k_{11}}\dot{x}_{10} - \frac{k_9I}{k_{11}}\dot{x}_9 + T_L \end{cases} \quad (20)$$

式中, $x_l = x_1 - l_l x_4 = y_1$, $x_r = x_1 + l_r x_4 = y_2$, $y_l = x_2 - l_l x_5 = y_3$, $y_r = x_2 + l_r x_5 = y_4$, $z_g = x_3 = y_5$ 。

式(20)是将原系统的输入量 u_i ($i=1,2,\dots,6$) 作为输出量 $\bar{u}_i$ ($i=1,2,\dots,6$), 原系统的输出量 y_i ($i=1,2,\dots,6$) 作为输入量的协同控制器的控制律。式中第 1 式至第 2 式输入 y_i 与输出 $\bar{u}_i$ 为独立关系, 各式之间不存在耦合问题, 而第 6 式与前 4 式之间存在耦合问题。

(3) 构建基于协同控制的系统模型

建立基于协同控制策略的转子姿态($y_1 \sim y_5$)、

速度($\dot{y}_1 \sim \dot{y}_5$, $y_6 = x_{11}$)和加速度($\dot{x}_6 \sim \dot{x}_{10}$)、电流($x_{12} \sim x_{16}$)等反馈的多闭环控

制系统如图 6 所示。速度反馈为姿位的微分先行反馈控制, 其作用是增加系统的阻尼, 提高系统的稳定性及鲁棒性、并减小超调量; 加速度反馈控制, 可在不增加系统带宽的情况下增加系统的刚度, 提高悬浮转子的等效质量, 提高系统的动态悬浮刚度, 改善系统动态特性; 磁悬浮轴承的电流反馈控制, 降低系统的电网电流扰动作用。

图 6 磁悬浮轴承支承转子协同控制系统

3.2 协同控制系统的仿真

磁悬浮轴承转子系统的结构参数如简表 1 所示。本文基于图 6 用 MATLAB 按表 1 所示参数对磁悬浮轴承支承的转子动力学协同系统进行仿真分析, 仿真模型如图 7 所示。

表 1 磁悬浮轴承的参数

参数名称	数值	参数名称	数值
转子质量 m/kg	10	左端距离 l_l/mm	92.2
极转动惯量 $I/(\text{kg}\cdot\text{mm}^2)$	6.5×10^3	右端距离 l_r/mm	168.5
赤道转动惯量 $J/(\text{kg}\cdot\text{mm}^2)$	1.4×10^5	平衡气(间)隙 g_0/mm	0.3
给定转速 $\bar{\omega}_r/(r/\text{min})$	10 000	径向负载 N	200

图 7 磁悬浮轴承多转子系统协同控制仿真模型

(1) 转子质心径向位移和转速的响应特性

磁悬浮轴承在协同控制作用下, 其转子质心在某方向(x 方向)不同权系数时径向位移的阶跃响应如图 8 所示。

图 8 转子质心径向位移的时间响应

设定各时间常数及权系数等控制参数为

$$T_{li} = 0.025 \quad (i = 1, 2, \dots, 6);$$

$$k_j = 5, 25, 50 \quad (j = 6, 7, \dots, 16)$$

由图 9 可知, 系统的响应速度很快, 时间常数确定后, 控制参数 k_j 越大, 系统的响应速度越快, 但数值过大系统会产生超调见图 8c, 仿真实验表明 $k_j = 25$ 时, 磁悬浮轴承的径向位移响应速度最快, 且无超调产生, 控制效果较好。 T_{li} 和权系数 k_j 控制参数的选取与系统的响应速度和稳定性有关。仿真过程中, 应保证系统稳定运行的前提下选取合适的控制参数值。

其中 $K_p=0.25, K_i=250, K_d=0.003$ 。

图 10 为用协同控制和传统 PID 控制时质心径向位移的阶跃响应曲线。很明显, 协同控制的转子质心位移响应速度快且无超调, 传统 PID 控制的转子质心位移存在超调量且过渡过程时间长。

图 9 协同控制与 PID 控制对比仿真模型图

图 10 协同控制与 PID 控制的比较

在协同控制下, 当转子悬浮稳定后启动电机驱动转子以 10 000 r/min 转动, 只需要 0.025 s 就能达到稳态值, 其转速波形如图 11 所示。

图 11 转子转速的阶跃响应

(2) 电磁悬浮力的响应特性

在协同控制策略下, 径向电磁悬浮力动态响应仿真曲线如图 12 所示。图 12a 是给定负载在 0.15 s 处产生 200 N 的阶跃负载时的径向电磁力的响应曲线, 可见仿真值滞后时间约 0.02 s, 响应速度很快、无超调; 图 12b 是转子转速及负载突变对电磁悬浮力带来的影响。在图中, 时间在 0.2 s 时使转子自转转速由 1 000 r/min 突变至 2 000 r/min, 当转子在陀螺运转时, 转子的质心处于瞬时偏心状态, 由于转子转速突变产生瞬时离心冲击动载荷, 系统很快克服转速扰动而恢复至稳定状态; 在 0.3 s 或 0.5 s 处加或减载荷 20 N 时, 磁悬浮轴承的电磁力可快速跟踪负载的变化, 表明系统的鲁棒性及动态性能较好。

(a) 阶跃响应

(b) 电磁力抗干扰的响应特性

图 12 磁悬浮轴承支承转子电磁力的响应特性

(3) 驱动电流对电磁悬浮力的影响

图 13 是协同控制作用下, 支承转子悬浮运转的左、右径向磁悬浮轴承电磁力随绕组驱动电流的变化规律。可见, 左右轴承的电磁悬浮力随电流的变化误差很小, 在相同的电流处产生的电磁力非常接近。

(a)

(b)

图 13 电磁力与绕组驱动电流之间的关系

(4) 质心轨迹响应特性。

图 14 所示为转子质心在转速为 10 000 r/min 下, 转子主轴垂直截面内的轨迹响应特性。图 14a 为协同控制作用下的轨迹曲线, 图 14b 为传统 PID 控制的转子质心的轨迹曲线。经统计, 采用协同控制时质心扫过的面积为 PID 的 1/2, 且协同控制下的质心普遍在平衡位置周围 0.02 mm 甚至更小以内的范围内移动, 而 PID 控制的质心则在 0.01 mm 以外 0.03 mm 甚至更大的范围内移动。很显然, 用协同控制的转子质心偏心位移比用 PID 控制的转子质心位移偏心误差小、控制精度高, 刚度明显大。

图 14 转子质心径向位移轨迹

4 结论

(1) 针对磁悬浮轴承支承的 5 自由度转子, 考虑陀螺运动建立了非线性强耦合的磁悬浮转子动力学基本模型和系统状态空间原型模型。

(2) 基于逆系统解耦原理对原型系统进行了可逆分析, 建立了逆系统解耦模型, 并对原型系统进行非线性解耦伪线性化控制。

(3) 构建了确定协同控制律的宏形函数, 基于宏形函数设计了系统的协同控制器, 并对逆系统解耦控制的磁悬浮转子动力学系统进行协同控制。

(4) 对非线性、高维特性以及其负载具有不确定性、大范围变化特点的磁悬浮支承的转子动力系统, 进行了基于逆系统解耦伪线性化的协同控制仿真研究, 仿真结果表明系统具有无超调且响应速度快、鲁棒性强、控制精度高等优点。

参 考 文 献

- [1] LIU Xianxing, DONG Lei, FAN Wenjin, et al. Decoupling control of the 5 degree-of-freedom bearingless induction motor based on α -th order inverse system method[C]//2007 Chinese Control Conference, July 26-31, 2007, Zhangjiajie, China. IEEE, 2007: 262-266.
- [2] CAO Jianrong, CHEN Quanshi. Decoupling control for a 5-D of rotor supported by active magnetic bearings[C]//Electrical Machines and Systems, Nov 9-11, 2003, Beijing, China. Sixth International Conference on Electrical Machines and Systems, 2003: 477-480.
- [3] 武涵, 徐春广, 肖定国, 等. 五自由度磁轴承系统的 α 阶逆系统解耦控制[J]. 北京理工大学学报, 2010, 30(9): 1065-1069.
WU Han, XU Chunguang, XIAO Dingguo, et al. Decoupling control of alpha-order inverse system for five-degree- of-freedom magnetic bearing system [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2010, 30(9): 1065-1069.
- [4] 曹建荣, 虞烈, 谢友柏. 主动磁悬浮轴承的解耦控制[J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(12): 44-48, 60.
CAO Jianrong, YU Lie, XIE Youbai. Decoupling control of active magnetic bearings[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1999, 33(12): 44-48, 60.
- [5] MAZUMDER S, NAYFEH A, BOROJEVIC A. Robust control of parallel DC-DC buck converters by combining integral-variable-structure and multiple-sliding surface control schemes[J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2002, 17(3): 428-437.
- [6] GARCERA G, FIGUERES E, PASCUAL M, et al. Analysis and design of a robust average current mode control loop for parallel buck DC-DC converters to reduce line and load disturbance[J]. Power Electronics Specialists Conference, 2004, 151(4): 414-424.
- [7] GARCER G, FIGUERES E, PASCUAL M, et al. Robust model-following control of parallel buck converters[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2004, 40(3): 983-997.
- [8] KONDRATIEV I, SANTI E, DOUGAL R, et al. Synergetic control for m-parallel connected DC-DC buck converters[C]//2004 IEEE 35th Annual Power Electronics Specialists Conference, June 20-25 2004, Aachen, Germany. IEEE, 2004: 182-188.
- [9] 茹常剑, 魏瑞轩, 沈东. 多无人机协同的稳定控制机理研究[J]. 物理学报, 2014, 63(22): 13-19.
RU Changjian, WEI Ruixuan, SHEN Dong. Research on stability control mechanism of multi-UAV cooperation[J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(22): 13-19.
- [10] 李金子, 肖炯然, 潘剑飞. 多永磁同步直线电机协同控制研究[J]. 吉林大学学报, 2019, 37(1): 32-39.
LI Jinzi, XIAO Jiongran, PAN Jianfei. Research on coordinated control of multiple permanent magnet synchronous linear motor[J]. Journal of Jilin University, 2019, 37(1): 32-39.

- [11] 房建成, 王志强, 刘刚. 磁悬浮姿控储能两用飞轮能量转换系统 PI 协同控制[J]. 宇航学报, 2009, 30(5): 1907-1912.
FANG Jiancheng, WANG Zhigang, LIU Gang. Magnetic suspension attitude control energy storage dual-purpose flywheel energy conversion system PI cooperative control[J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(5): 1907-1912.
- [12] 房建成, 王志强, 刘刚. 磁悬浮反作用飞轮速率模式非线性协同控制方法[J]. 航空学报, 2009, 30(10): 1930-1936.
FANG Jiancheng, WANG Zhigang, LIU Gang. Nonlinear cooperative control method for magnetic suspension reaction flywheel speed mode[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(10): 1930-1936.
- [13] 虞烈, 袁崇军. 主动磁轴承[M]. 北京: 新时代出版社, 1997.
YU Lie, YUAN Chongjun. Active magnetic bearing[M]. Beijing: New Era Press, 1997.
- [14] 金捷, 朱焜秋. 磁悬浮轴承转子位移自检测方法[J]. 微电机, 2014, 47(9): 79-84.
JIN Jie, ZHU Huangqiu. Self-detection method of magnetic suspension bearing rotor displacement [J]. Micro Motor, 2014, 47(9): 79-84.
- [15] 李春文, 冯元琨. 多变量非线性控制的逆系统方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.
LI Chunwen, FENG Yuankun. The inverse system method for multi-variable nonlinear control[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1991.

作者简介: 竺志大(通信作者), 男, 1965 年出生, 硕士研究生导师, 高级工程师。主要研究方向为机械制造自动化, 磁悬浮技术。

E-mail: zdzhu@yzu.edu.cn

王文军, 男, 1995 年出生, 硕士研究生。主要研究方向为磁悬浮电机、磁悬浮轴承及其控制系统。

E-mail: 1729807281@qq.com